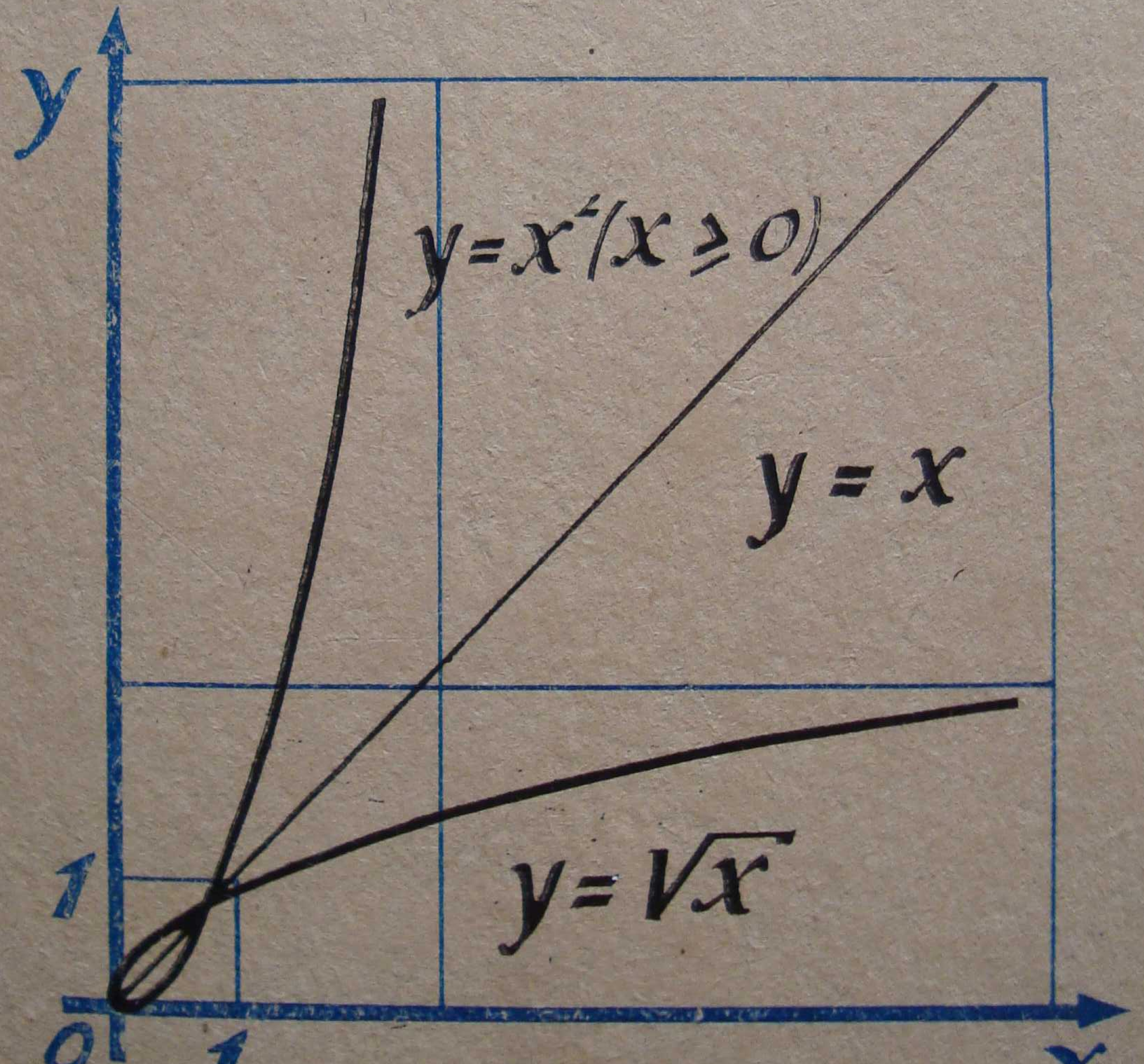
Մ. Ս. ԳԵԼՖԱՆԴ, Վ. Պ. ՊՐՈՍՏՈՍԵՐԴՈՎ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ 6-9

ԵՐԵԿՈՅԱՆ (ՀԵՐԹԱՓՈԽ ՅԻՆ) ԴՊՐՈՑԻ ՀԱՄԱՐ



Մ. Ս. Գելֆանդ, Վ. Պ. Պրոստոսերդով

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

Ուսումնական ձեռնարկ

երեկոյան
(հերթափոխային) դպրոցի 6-9-րդ
դասարանների համար

Մ. Ս. Գելֆանդի խմբագրությամբ

Թույլատրել է ՍՍՀՄ լուսավորության
մինիստրությունը

«ԼՈՒՅՍ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 1982

Գ $\frac{4306020403\ (65)\ 79}{702\ (01)\ 1982}$ 1982

М. С. Гельфанд, В. П. Простосердов

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 6—9 классов
вечерней (сменной) школы
(на армянском языке)

Издательство «Луйс»
Ереван—1982

© Издательство «Просвещение», 1981 г. с изменениями
© «Լույս» հրատարակչություն, թարգմանված է հայերեն, 1982 թ.

ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ (ԿՐԿՆՈՒԹՅՈՒՆ)

Մենք անցնում ենք նոր առարկայի՝ հանրահաշվի ուսումնասիրությանը։ Բայց հանրահաշիվը կարելի է հաջողությամբ յուրացնել միայն թվաբանության լավ իմացության դեպքում։ Ուստի սկսենք թվաբանության առավել կարևոր հարցերի կրկնությունից։

§ 1. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԲՆԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏ

Որևէ առարկաներ համրելու համար մենք օգտագործում ենք հետևյալ թվերը՝ 1, 2, 3, 4, 5, 6 և այլն։ Այս թվերը կոչվում են բնական թվեր: *Դրանց միացնենք զրո թիվը։ Բնական թվերի և զրոյի հետ կարելի է կատարել չորս թվաբանական գործողություններ՝* գումարում, հանում, բազմապատկում և բաժանում *(բացառյալ զրոյի վրա բաժանումը)։*

Հիշեցնենք այն թվերի անվանումները, որոնց հետ կատարվում են գործողություններ (այդ թվերը կոչվում են գործողությունների բաղադրիչներ), ինչպես նաև գործողությունների արդյունքների անվանումները և նշենք այդ գործողությունների միջոցով լուծվող պարզագույն խնդիրները։

Գումարում: *Այն թվերը, որոնք մենք գումարում ենք, կոչվում են* գումարելիներ: *Գումարման արդյունքում ստացված թիվը կոչվում է* գումար: *Գումարման միջոցով կարելի է լուծել հետևյալ տիպի խնդիրներ. ա) գտնել մի քանի թվերի գումարը, բ) գտնել այն թիվը, որը տրված թվից մեծ է այսքան միավորով, այսինքն, թիվը մեծացնել այսքան միավորով։*

Օրինակներ։

$$+\begin{array}{r}473\\286\\\hline 759\end{array}\qquad +\begin{array}{r}3027\\2173\\\hline 5200\end{array}\qquad +\begin{array}{r}8729\\4296\\1055\\\hline 14080\end{array}$$

Հանում: *Սա գումարման հակադարձ գործողությունն է: Այն թիվը, որից հանում են, կոչվում է* նվազելի*: Այն թիվը, որը հանում են, կոչվում է* հանելի*: Հանման արդյունքում ստացված թիվը կոչվում է* տարբերություն*: Հանման միջոցով լուծվում են հետևյալ խնդիրները. ա) գտնել թվերի տարբերությունը, այսինքն, որոշել, թե մի թիվը մյուսից քանի միավորով է մեծ կամ փոքր, բ) գտնել այն թիվը, որը այսքան միավորով փոքր է տրված թվից, այսինքն, թիվը փոքրացնել այսքան միավորով:*

Օրինակներ:

$$\begin{array}{r} 1839 \\ -\ 726 \\ \hline 1113 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9608 \\ -\ 2539 \\ \hline 7069 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2013 \\ -\ 527 \\ \hline 1486 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5200 \\ -\ 3027 \\ \hline 2173 \end{array}$$

Բազմապատկում: *Այն թվերը, որոնք մենք բազմապատկում ենք, կոչվում են* արտադրիչներ*: Բազմապատկման արդյունքում ստացված թիվը կոչվում է* արտադրյալ*:*

Բազմապատկման միջոցով լուծվում են հետևյալ խնդիրները. ա) գտնել մի քանի միանման գումարելիների գումարը, բ) թիվը մեծացնել այսքան անգամ, այսինքն, գտնել տրված թվից այսքան անգամ մեծ թիվը:

Օրինակներ:

$$\begin{array}{r} \times\ 273 \\ 32 \\ \hline 546 \\ +\ 819\ \ \\ \hline 8736 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 2700 \\ 230 \\ \hline 81 \\ +\ 54\ \ \\ \hline 621000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 216 \\ 403 \\ \hline 648 \\ +\ 864\ \ \ \ \\ \hline 87048 \end{array}$$

Բաժանում: *Սա բազմապատկման հակադարձ գործողությունն է: Այն թիվը, որը բաժանում են, կոչվում է* բաժանելի*: Այն թիվը, որի վրա բաժանում են, կոչվում է* բաժանարար*: Բաժանման արդյունքում ստացված թիվը կոչվում է* քանորդ*:*

Անհրաժեշտ է հաստատապես հիշել, որ զրոյի վրա բաժանել չի կարելի:

Բաժանման միջոցով լուծվում են հետևյալ խնդիրները. ա) գտնել քանորդը, այսինքն, որոշել, թե մի թիվը մյուսից քանի անգամ է մեծ կամ փոքր, բ) թիվը փոքրացնել այսքան անգամ, այսինքն, գտնել տրված թվից այսքան անգամ փոքր թիվը:

Հիշեցնենք քանորդի հիմնական հատկությունը. քանորդի արժեքը չի փոխվի, եթե բաժանելին և բաժանարարը բազմապատկենք կամ բաժանենք զրոյից տարբեր միևնույն թվի վրա: *Օրինակ,* 12 : 4 = 3, *եթե 12 և 4 թվերից յուրաքանչյուրը բաժանենք 2-ի կամ բազմա-*

պատկենք 5-ով, ապա դարձյալ կստանանք 3։ Իրոք, 6 : 2 = 3 և 60 : : 20 = 3։

Օրինակներ։

```
 17064 | 54          18084800 | 356          48380150 | 806
-162   |316         -1780     |50800        -4836     |60025
   86                  2848                     2015
  -54                 -2848                    -1612
   324                    0                      4030
  -324                                          -4030
     0                                              0
```

Խառը գործողություններ։ *Եթե պահանջվում է կատարել մի քանի գործողություններ, ապա հաշվումներում պահպանվում է այսպիսի հաջորդականություն. նախ կատարվում են բազմապատկումը և բաժանումը, իսկ այնուհետև՝ գումարումն ու հանումը։*

Օրինակ։ 6700 − 207 · 32 + 7245 : 23։

Այստեղ գործողությունները կատարվում են հետևյալ կարգով.

1) 207 · 32 = 6624, 3) 6700 − 6624 = 76,

2) 7245 : 23 = 315, 4) 76 + 315 = 391։

Եթե հարկ է լինում շեղվել նշված կարգից, ապա օգտագործվում են փակագծեր։ Այդ պարագայում նախ կատարում են առաջին (ներքին) փակագծերի գործողությունները, իսկ այնուհետև՝ երկրորդ (արտաքին) փակագծերինը և այլն։ Փակագծերի բոլոր գործողությունները կատարելուց հետո հետագա հաշվումները կատարվում են վերը նշված հաջորդականությամբ։

Օրինակ։

724 · 84 + ((1610 · 27 − 2146) − 976 · 35) − 67 980 : 330։

Լուծում։ Կատարենք ներքին փակագծերի հաշվումները.

1610 · 27 − 2146 = 43470 − 2146 = 41 324։

Կատարենք արտաքին փակագծերի հաշվումները.

41 324 − 976 · 35 = 41 324 − 34 160 = 7164։

Սկզբնական օրինակն արդեն կարելի է գրել առանց փակագծերի.

724 · 84 + 7164 − 67 980 : 330։

724 · 84 = 60 816, 67 980 : 330 = 206։

60 816 + 7164 − 206 = 67 980 − 206 = 67 774։

Պատասխան. 67774։

Վարժություններ

Կատարեցեք գործողությունները.

1. $34+(398\cdot708-422\cdot446):93\,572$։
2. $302\cdot49+367\,710:35-50\,702:101-24\,000$։
3. $(594\cdot404-336\cdot422):98\,184-1$։
4. $1010\cdot11+2672:(256+7416:18)-11\,100$։
5. $12\,500:(214\,221:707-127\,500:625+151)$։
6. $(202\cdot101-652\,864:404)\cdot205:606$։

§ 2. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՂԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ԵՎ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԻ ԿԱՊԸ

Թվաբանական գործողությունների անհայտ բաղադրիչներից մեկը նշանակենք x (իքս) տառով և հիշեցնենք հիմնական կանոնները։

Անհայտ գումարելին գտնելու համար պետք է գումարից հանել մյուս գումարելին։

Օրինակ: $245+x=302$։

Լուծում։ $x=302-245$, $x=57$։

Պատասխան. 57։

Անհայտ նվազելին գտնելու համար պետք է տարբերությանը գումարել հանելին։ Անհայտ հանելին գտնելու համար պետք է նվազելիից հանել տարբերությունը։

Օրինակներ: *ա)* $x-28=205$, *բ)* $325-x=36$։

Լուծում։ ա) $x=205+28$, $x=233$, *բ)* $x=325-36$, $x=289$։

Պատասխան. ա) 233, բ) 289։

Անհայտ արտադրիչը գտնելու համար պետք է արտադրյալը բաժանել հայտնի արտադրիչի վրա։

Օրինակ: $48\cdot x=336$։

Լուծում։ $x=336:48$, $x=7$։

Պատասխան. 7։

Անհայտ բաժանելին գտնելու համար պետք է քանորդը բազմապատկել բաժանարարով։ Անհայտ բաժանարարը գտնելու համար պետք է բաժանելին բաժանել քանորդի վրա։

Օրինակներ: *ա)* $x:26=205$, *բ)* $4590:x=15$։

Լուծում։ ա) $x=205\cdot26$, $x=5330$, *բ)* $x=4590:15$, $x=306$։

Պատասխան. ա) 5330, բ) 306։

Բերված օրինակներն իրենցից ներկայացնում են պարզագույն հավասարումներ։ Հավասարումների մասին մանրամասն կխոսվի հետագայում։

Վարժություններ

Գտեք թվաբանական գործողությունների անհայտ բաղադրիչները.

7. ա) $x+32=75$, գ) $x \cdot 5=120$,

բ) $x-15=123$, դ) $91 : x=13$։

8. ա) $26+x=93$, գ) $9 \cdot x=207$,

բ) $96-x=17$, դ) $x : 21=6$։

§ 3. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆ։ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆ։ ԱՍՈՒՅԹ

Այն գրառումը, որը պարունակում է թվեր, մաթեմատիկական գործողությունների նշաններ և փակագծեր, կոչվում է թվային արտահայտություն։

Եթե երկու արտահայտություններ միացնենք հավասարության նշանով, ապա կստանանք մի գրառում, որը կոչվում է հավասարություն։

Թվային արտահայտությունները կարող են լինել ճշմարիտ (ճիշտ) կամ կեղծ (սխալ)։ $2+3=1+4$, $5:5=1$ հավասարությունները ճիշտ են, իսկ $3+4=8+2$, $3 \cdot 5=16$ հավասարությունները՝ սխալ։

Եթե երկու արտահայտություններ միացնենք $>$ (մեծ է) կամ $<$ (փոքր է) նշաններից մեկով, ապա կստանանք մի գրառում, որը կոչվում է անհավասարություն։

Թվային անհավասարությունները ևս կարող են լինել ճշմարիտ (ճիշտ) կամ կեղծ (սխալ)։ $2+5>9-3$, $15-3<9+5$ անհավասարությունները ճիշտ են, իսկ $3+4<2+5$, $8+2<8-5$ անհավասարությունները՝ սխալ։

«Ճիշտ է» (ճշմարիտ է) և «սխալ է» (կեղծ է) հասկացություններին մենք հանդիպում ենք ոչ միայն մաթեմատիկայում, այլև գիտության մյուս բնագավառներում։

Ամեն մի պատմողական նախադասություն, որը ճշմարիտ է կամ կեղծ, կոչվում է ասույթ։ Բերենք ասույթների օրինակներ։

1) Կազան քաղաքը գտնվում է Եվրոպայում։ 2) Խաբարովսկ քաղաքը գտնվում է Ասիայում։ 3) Հռոմը Ֆրանսիայի մայրաքաղաքն է։ 4) Վոլգան լցվում է Սև ծով։ 5) Երկիրը մոլորակ է։ 6) Սիրիուսը մոլորակ է։ 7) Բարաբը ծառ է։ 8) Գետաձին թռչուն է։ 9) Սուր անկյան մեծությունը փոքր է բութ անկյան մեծությունից։ 10) Դատը

ածական անուն է։ 11) Հինգը մեծ է վեցից։ 12) Վեցը փոքր է յոթից։

1, 2, 5, 7, 9 և 12 ասույթները ճշմարիտ են, մնացածները կեղծ են։

Այժմ կարելի է ասել, որ թվային հավասարությունները և անհավասարությունները ասույթների օրինակներ են, որովհետև նրանք կազմում են այնպիսի առաջադրություններ, որոնք կարող են լինել ճշմարիտ կամ կեղծ։

Եթե երկու արտահայտություններ միացնենք $\geqslant$ (մեծ է կամ հավասար, այսինքն փոքր չէ) կամ $\leqslant$ (փոքր է կամ հավասար, այսինքն մեծ չէ) նշաններից մեկով, ապա ստացված գրառումը կոչվում է **ոչ խիստ անհավասարություն**։

Օրինակներ: $1+4 \geqslant 5-2$, $14:2 \leqslant 2+7$, $3+4 \geqslant 6+1$։

$>$ կամ $<$ նշաններով կազմված անհավասարությունները կոչվում են **խիստ անհավասարություններ**:

Պարզենք, թե ինչ դեպքերում ենք պայմանավորվել ոչ խիստ անհավասարությունները համարել ճշմարիտ և ինչ դեպքերում՝ կեղծ։

$5 \geqslant 3$ անհավասարությունը ճշմարիտ է, քանի որ $5>3$ և $5=3$ ասույթներից գոնե մեկը $(5>3)$ ճշմարիտ է։ $6 \geqslant 6$ անհավասարությունը նույնպես ճշմարիտ է, քանի որ $6>6$ և $6=6$ ասույթներից մեկը $(6=6)$ ճշմարիտ է։ $7 \geqslant 9$ անհավասարությունը կեղծ է, քանի որ $7>9$ և $7=9$ ասույթներից երկուսն էլ կեղծ են։ Հանգունորեն, $6 \leqslant 8$ և $6 \leqslant 6$ անհավասարությունները ճշմարիտ են, իսկ $9 \leqslant 4$ անհավասարությունը՝ կեղծ։

Վարժություններ

Հետևյալ թվային արտահայտությունների զույգերի միջև գրեք $>$, $<$ կամ $=$ նշանն այնպես, որ ստացվի ճշմարիտ ասույթ.

9. ա) $2(16+3)$, $2 \cdot 16+3$, բ) $(30-5 \cdot 3) \cdot 2$, $(7 \cdot 3+5 \cdot 3):4$։

10. ա) $3(21-5)$, $4(5+8)$, բ) $(30-6:2):3$, $(16+6:3):2$։

Հետևյալ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ և որո՞նք՝ կեղծ.

11. ա) Ինը մեծ է երեքից։
բ) Դանուբ գետը գտնվում է Եվրոպայում։
գ) Շարժման արագությունը չափում են տոննաներով։
դ) Սոճու վրա աճում է կաղին։

12. ա) Ջին ձուկ է։
բ) Լուսինը փոքր է Երկրից։
գ) Տասնութը մեծ է քսանից։
դ) Վոլգան թափվում է Կասպից ծովը։

§ 4. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ: ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

z տառով նշանակենք այն առարկայի անվանումը, որն անցնում են դպրոցում. *z*-ը փոփոխական է, փոփոխականի արժեքներն են՝ հանրահաշիվ, գրականություն, ֆիզիկա և այլն: *z* փոփոխականն ունի այնքան արժեք, որքան առարկա անցնում են դպրոցում:

Դիցուք *n*-ը երկնիշ թիվ է: *n*-ը փոփոխական է, նրա արժեքներն են 12, 28, 49, 60, 93 և այլն: Այս օրինակում *n*-ը թվային փոփոխական է, նրա արժեքները թվեր են: *n* փոփոխականը կարող է ընդունել 90 տարբեր արժեքներ:

Եթե x-ը թվային փոփոխական է, ապա $8x-3$ կամ $5(7-2x)$ գրառումները x փոփոխականով արտահայտություններ են:

Թվեր, փոփոխականներ, մաթեմատիկական գործողությունների նշաններ, փակագծեր պարունակող գրառումը կոչվում է **փոփոխականով արտահայտություն:**

Դիցուք տրված է x փոփոխականով $3x+5$ արտահայտությունը: Եթե x փոփոխականին տանք 1 արժեք, ապա արտահայտությունը կընդունի 8 արժեքը, իսկ $x=3$ դեպքում արտահայտության արժեքը հավասար է 14-ի: Այսպիսով, փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է արտահայտության որոշակի արժեք:

Եթե փոփոխական պարունակող երկու արտահայտություններ միացնենք $=$, $>$ կամ $<$ նշաններից մեկով, ապա կստանանք փոփոխականով հավասարություն կամ անհավասարություն:

Դիտարկենք x **փոփոխականով հետևյալ հավասարությունը.**

$$2x+5(3-x)=1+4x.$$

Ընդունելով $x=1$, կստանանք $12=5$. այս հավասարությունը սխալ է: Ընդունելով $x=2$, հանգում ենք ճիշտ հավասարության՝ $5+4=1+8$:

Փոփոխականով հավասարությունը կոչվում է **հավասարում:** *Փոփոխականի այն արժեքը, որի դեպքում ստացվում է ճիշտ թվային հավասարություն, կոչվում է* **հավասարման արմատ** (*լուծում*):

Օրինակ, 2 թիվը $2x+5(3-x)=1+4x$ հավասարման արմատն է, իսկ 1 թիվը նրա արմատը չէ:

$2x+3=4+2x$ հավասարումը ոչ մի արմատ չունի:

Դիցուք տրված է x **փոփոխականով հետևյալ անհավասարությունը.**

$$4(5-x)>5x-9.$$

$x=3$ դեպքում ստանում ենք ճիշտ անհավասարություն՝ $8>6$, իսկ $x=4$ դեպքում՝ սխալ անհավասարություն՝ $4>11$:

Փոփոխականի այն արժեքը, որի դեպքում փոփոխականով անհավասարությունը ճիշտ է, կոչվում է անհավասարության լուծում:

Օրինակ. 3 թիվը $4(5-x)>5x-9$ անհավասարության լուծումն է, իսկ 4 թիվը նրա լուծումը չէ։

$x+1>2+x$ անհավասարությունը ոչ մի լուծում չունի։

Թվային հավասարությունը (կամ անհավասարությունը), ինչպես գիտենք, ասույթի օրինակ է։ Բայց փոփոխականով հավասարությունը (կամ անհավասարությունը) ասույթ չէ, որովհետև փոփոխականի մի արժեքի դեպքում այն կարող է վերածվել ճիշտ, իսկ մյուսի դեպքում սխալ թվային հավասարության (անհավասարության)։ Փոփոխականով հավասարությունը կամ անհավասարությունը փոփոխականով առաջադրության օրինակներ են։

Բերենք փոփոխականով առաջադրության այլ օրինակներ։

1) x քաղաքը գտնվում է Վոլգայի ափին։ Սա փոփոխականով առաջադրություն է։ Եթե, օրինակ, x-ը Ուլյանովսկը կամ Վոլգոգրադն է, ապա դա ճշմարիտ ասույթ է։ Իսկ եթե, օրինակ, x-ը Մինսկը կամ Կիևն է, ապա դա կեղծ ասույթ է։

2) a ծառը փշատերև է։ Սա փոփոխականով առաջադրություն է։ Եթե a-ն սոճի է, ապա դա ճշմարիտ ասույթ է, եթե a-ն կաղնի է, ապա դա կեղծ ասույթ է։

Վարժություններ

13. 2, 3, 4, 5, 6 թվերից որո՞նք են հետևյալ հավասարման արմատները.

ա) $x(x-1)=2(3x-5)$, բ) $x(x-1)=7x-15$։

14. 2, 3, 4, 5, 6, 7 թվերից որո՞նք են հետևյալ անհավասարության արմատները.

ա) $x(x-1)<7x-12$, բ) $x(x-1)\geqslant 7x-12$։

Հետևյալ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ և որո՞նք՝ կեղծ.

15. ա) $5a-7=2a+8$, երբ $a=3$,

բ) $3a+2b>4b-7a$, երբ $a=2$, $b=5$,

գ) $8m-3n\leqslant 8n-7m+1$, երբ $m=3$, $n=4$,

դ) $3x+5y>2y+7z$, երբ $x=2$, $y=5$, $z=4$։

16. ա) $3x+2<5x-3$, երբ $x=4$,

բ) $7m-5n>6n+m$, երբ $m=5$, $n=3$,

գ) $4p+6q=3q-5p$, երբ $p=4$, $q=7$,

դ) $5a+4c\geqslant 8c-5b$, երբ $a=3$, $b=1$, $c=5$։

Փոփոխականի այն արժեքը, որի դեպքում փոփոխականով անհավասարությունը ճիշտ է, կոչվում է անհավասարության լուծում:

Օրինակ, 3 թիվը $4(5-x)>5x-9$ անհավասարության լուծումն է, իսկ 4 թիվը նրա լուծումը չէ։

$x+1>2+x$ անհավասարությունը ոչ մի լուծում չունի։

Թվային հավասարությունը (կամ անհավասարությունը), ինչպես գիտենք, ասույթի օրինակ է։ Բայց փոփոխականով հավասարությունը (կամ անհավասարությունը) ասույթ չէ, որովհետև փոփոխականի մի արժեքի դեպքում այն կարող է վերածվել ճիշտ, իսկ մյուսի դեպքում սխալ թվային հավասարության (անհավասարության)։ Փոփոխականով հավասարությունը կամ անհավասարությունը փոփոխականով առաջադրության օրինակներ են։

Բերենք փոփոխականով առաջադրության այլ օրինակներ։

1) x քաղաքը գտնվում է Վոլգայի ափին։ Սա փոփոխականով առաջադրություն է։ Եթե, օրինակ, x-ը Ուլյանովսկը կամ Վոլգոգրադն է, ապա դա ճշմարիտ ասույթ է։ Իսկ եթե, օրինակ, x-ը Մինսկը կամ Կիևն է, ապա դա կեղծ ասույթ է։

2) a ծառը փշատերև է։ Սա փոփոխականով առաջադրություն է։ Եթե a-ն սոճի է, ապա դա ճշմարիտ ասույթ է, եթե a-ն կաղնի է, ապա դա կեղծ ասույթ է։

Վարժություններ

13. 2, 3, 4, 5, 6 թվերից որո՞նք են հետևյալ հավասարման արմատները.

ա) $x(x-1)=2(3x-5)$, բ) $x(x-1)=7x-15$։

14. 2, 3, 4, 5, 6, 7 թվերից որո՞նք են հետևյալ անհավասարության արմատները.

ա) $x(x-1)<7x-12$, բ) $x(x-1)\geqslant 7x-12$։

Հետևյալ ասույթներից որո՞նք են ճշմարիտ և որո՞նք՝ կեղծ.

15. ա) $5a-7=2a+8$, երբ $a=3$,

բ) $3a+2b>4b-7a$, երբ $a=2$, $b=5$,

գ) $8m-3n\leqslant 8n-7m+1$, երբ $m=3$, $n=4$,

դ) $3x+5y>2y+7z$, երբ $x=2$, $y=5$, $z=4$։

16. ա) $3x+2<5x-3$, երբ $x=4$,

բ) $7m-5n>6n+m$, երբ $m=5$, $n=3$,

գ) $4p+6q=3q-5p$, երբ $p=4$, $q=7$,

դ) $5a+4c\geqslant 8c-5b$, երբ $a=3$, $b=1$, $c=5$։

§ 5. ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Մարդկանց, կենդանիների, բույսերի և ընդհանրապես ինչ-որ առարկաների ամբողջություն նշելու համար օգտագործվում են զանազան անվանումներ։ Ասում են, օրինակ, թռչունների երամ, ձիերի երամակ, կովերի նախիր, ոչխարների հոտ, մեղուների պարս, ինքնաթիռների էսկադրիլիա, նավերի տորմիղ, ծղոտի խուրձ, խոտի դեզ, ծաղիկների փունջ, գրքերի կոմպլեկտ, նկարների հավաքածու և այլն։

Բառերի այս տեսակությունը (երամ, նախիր, տորմիղ, հավաքածու և այլն) մաթեմատիկայում փոխարինվում է միասնական տերմինով՝ բազմություն: Բազմության կազմող օբյեկտները՝ թռչուններ, կենդանիներ, գրքեր, նկարներ, կոչվում են բազմության տարրեր: Բազմության տարրեր կարող են լինել նաև թվերը, տառերը, կետերը։ Բազմության բոլոր տարրերը տարբեր են, երկու միանման տարրերը համարվում են մեկ տարր։

Երբ տրված է ինչ-որ տարրերի բազմություն, ապա կարելի է ճշգրիտ որոշել, թե որ տարրերն են պատկանում բազմությանը և որ տարրերը պատկանել չեն կարող։ Երբեմն դա արվում է պարզապես բազմության տարրերը թվարկելով։

Որևէ դասարանի բոլոր աշակերտների բազմությունը կարելի է համարել տրված, եթե կա այդ դասարանի աշակերտների ճշգրիտ ցուցակը։ Դա նշանակում է, որ ցուցակում չպետք է լինեն այլ դասարանների աշակերտների ազգանուններ և այդ դասարանի ոչ մի աշակերտ չպետք է վրիպի ցուցակից։

Պայմանավորվենք բազմությունները նշանակել լատինական այբուբենի գլխատառերով և բազմության տարրերը գրել ձևավոր փակագծերում։

Օրինակ, K, L, M և P տառերով նշանակենք համապատասխանաբար օվկիանոսների, աշխարհամասերի, Երկրի բնական արբանյակների, 10-ից փոքր կենտ թվերի բազմությունները։ Ահա այդ բազմությունները.

K={Ատլանտյան, Հնդկական, Հյուսիսային Սառուցյալ, Խաղաղ},
L={Եվրոպա, Ամերիկա, Ասիա, Աֆրիկա, Ավստրալիա, Անտարկտիդա},
M={Լուսին}, P={1, 3, 5, 7, 9}։

K բազմությունը պարունակում է 4 տարր, L բազմությունը՝ 6 տարր, P բազմությունը՝ 5 տարր, իսկ M բազմությունը՝ միայն մեկ տարր։

Ձևավոր փակագծերի մեջ բազմության տարրերի գրելու կարգը նշանակություն չունի։

3 թիվը P բազմության տարրն է, իսկ 8 թիվը P բազմության տարրը չէ, այլ կերպ ասած, 3 տարրը պատկանում է P բազմությանը, 8 տարրը չի պատկանում P բազմությանը: Դա գրվում է այսպես.

$$3 \in P, \ 8 \notin P:$$

$\in$ նշանը կոչվում է պատկանելիության նշան, իսկ $\notin$ (կամ $\overline{\in}$) նշանը՝ չպատկանելիության:

Երկու բազմություններ կոչվում են հավասար, եթե առաջին բազմության յուրաքանչյուր տարրը երկրորդ բազմության տարրն է և, ընդհակառակը, երկրորդ բազմության յուրաքանչյուր տարրը առաջին բազմության տարրն է:

Այսպես, «ծրար» բառի տառերի A բազմությունը հավասար է «արարած» բառի տառերի B բազմությանը. A=B: Այդ բազմությունը կազմված է երեք տարրերից՝ {ա, ծ, ր}:

Որոշակի թվով տարրեր պարունակող բազմությունը կոչվում է վերջավոր բազմություն: Դրա հետ մեկտեղ մաթեմատիկայում ուսումնասիրում են նաև անվերջ բազմություններ: Օրինակ, ուղղի հատվածը, շրջանագիծը կամ շրջանը կետերի անվերջ բազմություններ են: Բնական թվերի, զույգ թվերի, առանց մնացորդի 3-ի բաժանվող թվերի բազմությունները ևս անվերջ են:

Վարժություններ

17. Դիցուք A-ն շաբաթվա օրերի բազմությունն է, B-ն՝ տարվա ամիսների բազմությունը, C-ն՝ տարվա եղանակների բազմությունը: Գրեցեք այդ բազմությունները, օգտագործելով ձևավոր փակագծեր:

18. Դիցուք K, L, P, Q բազմությունները համապատասխանաբար պայուսակ, մաթեմատիկա, ինժեներ, կկու բառերի տառերի բազմություններն են: Գրեցեք այդ բազմությունները, օգտագործելով ձևավոր փակագծեր:

19. Դիցուք K-ն 70-ից փոքր և 7-ի բաժանվող թվերի բազմությունն է: Պատկանելիության և չպատկանելիության նշանների միջոցով գրեցեք, թե K բազմության տա՞րր են արդյոք հետևյալ թվերը. 6, 21, 25, 35, 56, 60, 119, 162:

20. Դիցուք L-ը 75-ից փոքր, 6-ի բաժանվող, բայց 4-ի չբաժանվող թվերի բազմությունն է: Օգտագործելով համապատասխան նշաններ, գրեցեք, թե L բազմության մեջ մտնո՞ւմ են արդյոք հետևյալ թվերը. 10, 12, 30, 36, 42, 45, 54, 102, 174:

§ 6. ՏՐՎԱԾ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԵՆԹԱԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Բոլոր բնական թվերի բազմությունը մեծ նշանակություն ունի մաթեմատիկայում։ Այն նշանակվում է N *տառով.*

$$N=\{1;\ 2;\ 3;\ \dots\}։$$

Բազմակետի իմաստն այն է, որ թվերը կարելի է անվերջ շարունակել։

Դիցուք K*-ն կենտ թվերի բազմությունն է.* $K=\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ \dots\}$,

L*-ը զույգ թվերի բազմությունն է.* $L=\{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \dots\}$,

M*-ը առանց մնացորդի 5-ի բաժանվող թվերի բազմությունն է.*

$$M=\{5;\ 10;\ 15;\ 20;\ \dots\}։$$

Նշված K, L, M *անվերջ բազմություններից յուրաքանչյուրը* N *բազմության ենթաբազմությունն է։*

Q բազմությունը կոչվում է տրված R բազմության ենթաբազմություն, եթե Q-ի յուրաքանչյուր տարրը նաև R-ի տարրն է:

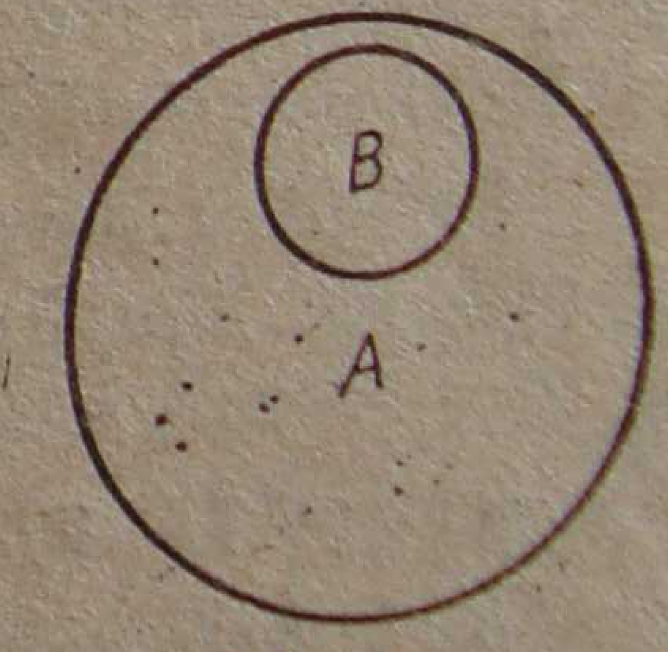
Եթե Q *բազմությունը* R *բազմության ենթաբազմությունն է, ապա դա գրում են հետևյալ կերպ.*

$$Q\subset R \text{ կամ } R\supset Q,$$

որը կարդացվում է այսպես. Q*-ն մտնում է* R*-ի մեջ, կամ* R*-ը պարունակում է* Q*-ն։*

$\subset$ նշանը կոչվում է ընդգրկման նշան:

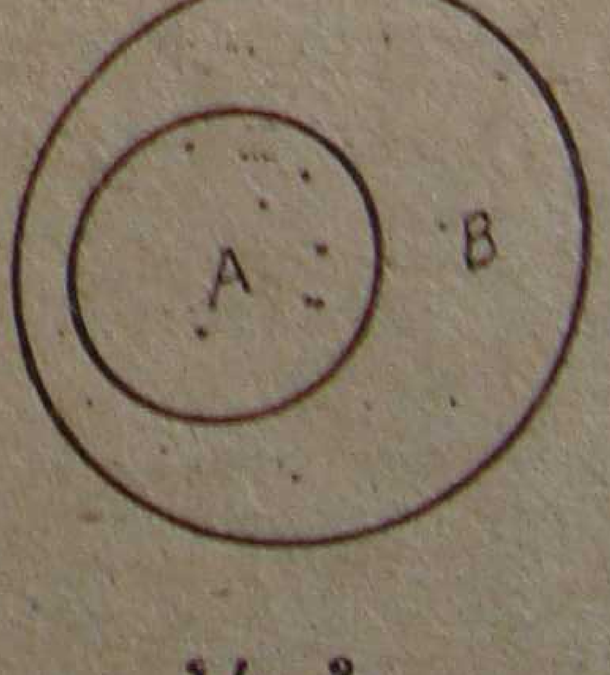
Դիցուք A*-ն և* B*-ն երկու կետային բազմություններ են, օրինակ, երկու շրջաններ։ 1-ին նկարում ցույց է տրված, որ* $B\subset A$, *իսկ 2-րդ նկարում, որ* $A\subset B$։



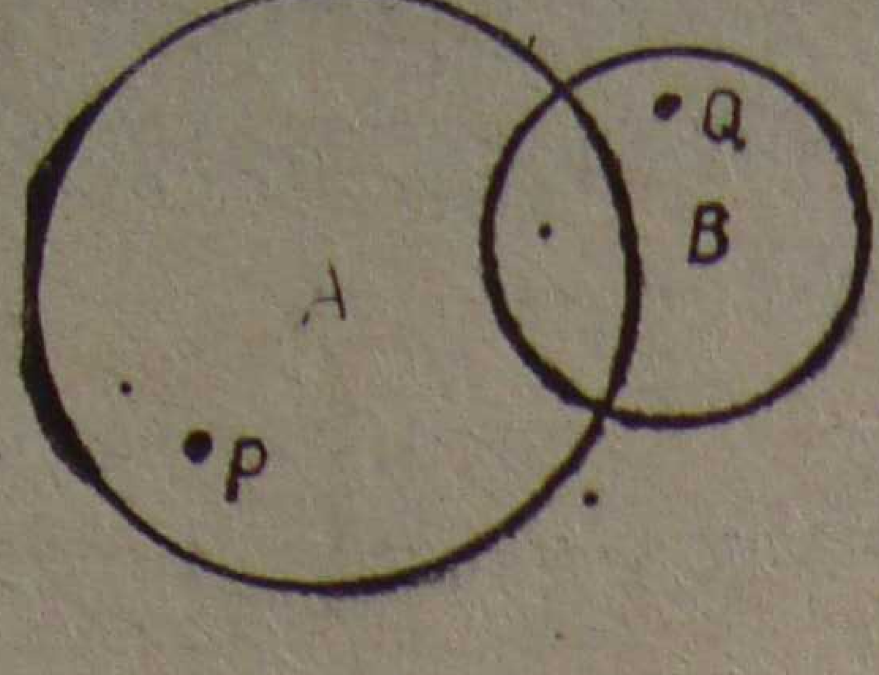
Նկ. 1

3-րդ նկարում պատկերված է այն դեպքը, երբ բազմություններից ոչ մեկը մյուսի ենթաբազմությունը չէ։ Տեղի չունի ոչ $A\subset B$, *ոչ էլ* $B\subset A$ *դեպքը, որովհետև կան* A *բազմության տարրեր, որոնք չեն պատկանում* B *բազմությանը, և կան* B *բազմության տարրեր, որոնք չեն պատկանում* A *բազմությանը։ Դիցուք, օրինակ,* P*-ն և* Q*-ն երկու կետեր են։ Նկարից երևում է, որ* $P\in A$, *բայց* $P\notin B$, $Q\in B$, *բայց* $Q\notin A$։

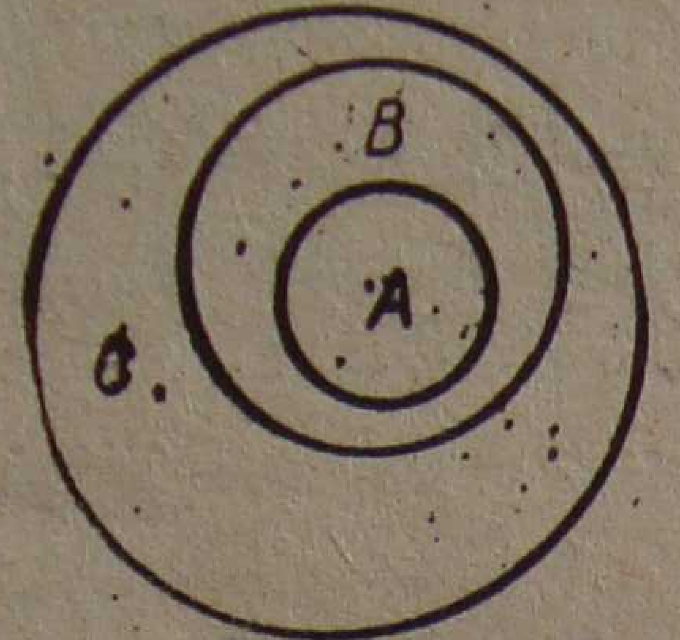
Այս դեպքում կարելի է գրել՝ $A\not\subset B$ *և* $B\not\subset A$, *այսինքն,* A*-ն* B*-ի ենթաբազմությունը չէ, և* B*-ն* A*-ի ենթաբազմությունը չէ։*



Նկ. 2



Նկ. 3



Նկ. 4

Ցանկացած A, B, C երեք բազմությունների համար $A \subset B$ և $B \subset C$-ից հետևում է, որ $A \subset C$։ Օրինակ, բաղաձայն տառերի բազմությունը հայերեն այբուբենի տառերի բազմության ենթաբազմությունն է, իսկ շշական տառերի բազմությունը բաղաձայն տառերի բազմության ենթաբազմությունն է, ուստի շշական տառերի բազմությունը նաև այբուբենի տառերի բազմության ենթաբազմությունն է։

Այսպիսով, եթե $A \subset B$ և $B \subset C$, ապա $A \subset C$, դա լուսաբանվում է 4-րդ նկարում։

Դիցուք K-ն 26-ի և 49-ի միջև գտնվող և առանց մնացորդի 25-ի բաժանվող բնական թվերի բազմությունն է։ Այն չի պարունակում ոչ մի տարր։

Ոչ մի տարր չպարունակող բազմությունը կոչվում է **դատարկ բազմություն** և նշանակվում $\varnothing$ նշանով։ Այսպիսով, $K=\varnothing$։

Պայմանավորվենք համարել, որ յուրաքանչյուր բազմություն ինքն իր ենթաբազմությունն է, և դատարկ բազմությունը ցանկացած բազմության ենթաբազմությունն է։

Միակ բազմությունը, որն ունի մեկ ենթաբազմություն, դա դատարկ բազմությունն է։

Եթե A բազմությունը բաղկացած է մեկ տարրից, օրինակ, միայն 8 թվանշանից, այսինքն՝ $A=\{8\}$, ապա այն ունի ընդամենը երկու ենթաբազմություն՝ A և $\varnothing$։

Եթե A-ն բաղկացած է երկու տարրերից, օրինակ, 5 և 7 թվանշաններից, այսինքն՝ $A=\{5; 7\}$, ապա A-ն ունի չորս ենթաբազմություն.

1) $\{5; 7\}$, 2) $\{5\}$, 3) $\{7\}$, 4) $\varnothing$։

Եթե A-ն բաղկացած է երեք տարրերից, օրինակ, a, b, c տառերից, այսինքն՝ $A=\{a, b, c\}$, ապա A-ն ունի արդեն ութ ենթաբազմություն.

1) $\{a; b; c\}$; 2) $\{a; b\}$, 3) $\{a; c\}$, 4) $\{b; c\}$, 5) $\{a\}$, 6) $\{b\}$, 7) $\{c\}$, 8) $\varnothing$։

Վարժություններ

21. Գրեցեք. ա) տարվա ամիսների բազմության, բ) մայր ցամաքների բազմության, գ) «վարդ» բառի բաղաձայն տառերի բազմության 4-ական ենթաբազմությունը։

22. Գրեցեք. ա) շաբաթվա օրերի բազմությունը, բ) օվկիանոսների բազմությունը, գ) «հերոս» բառի ձայնավոր տառերի բազմության 4-ական ենթաբազմությունը։

23. Տրված է 5 բազմություն. $A=\{2; 3; 5; 7; 11\}$, $B=\{2; 5; 7; 8\}$, $C=\{2; 5; 7\}$, $D=\{5\}$ և $\varnothing$ դատարկ բազմությունը։ Օգտագործելով ընդգրկման նշանը, գրեցեք, թե այդ բազմություններից որոնք են A բազմության ենթաբազմությունը։

24. A-ն զույգ թվերի բազմությունն է, B-ն՝ 3-ի բաժանվող թվերի բազմությունը, C-ն՝ 6-ի բաժանվող թվերի բազմությունը։ Հետևյալ առնչություններից որո՞նք են ճշմարիտ. $A\subset B$, $B\subset A$, $A\subset C$, $C\subset A$, $B\subset C$, $C\subset B$, $B\subset B$։

25. Գրեցեք հետևյալ բառերի տառերի բազմությունը և կազմեցեք դրանց բոլոր հնարավոր ենթաբազմությունները. ա) մոմ (4 ենթաբազմություն), բ) ավազ (8 ենթաբազմություն), գ) պապիկ (16 ենթաբազմություն)։

§ 7. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻԱՎՈՐՈՒՄ ԵՎ ՀԱՏՈՒՄ

A և B երկու բազմությունների միավորում կոչվում է այն տարրերի S բազմությունը, որոնք պատկանում են այդ բազմություններից գոնե մեկին, $S=A\cup B$, որտեղ $\cup$-ն բազմությունների միավորման նշանն է։

Եթե A-ն և B-ն ունեն որևէ ընդհանուր տարր, ապա վերջինս S բազմության մեջ մտնում է որպես մեկ տարր (և ոչ թե որպես երկու միանման տարրեր), ուստի S բազմության տարրերը հաշվելիս այդ տարրը հաշվվում է մեկ անգամ։

Եթե $B\subset A$, ապա $A\cup B=A$։

A և B երկու բազմությունների հատում կոչվում է այն տարրերի P բազմությունը, որոնք պատկանում են այդ բազմություններից յուրաքանչյուրին. $P=A\cap B$, որտեղ $\cap$-ն բազմությունների հատման նշանն է։

Եթե A և B բազմությունները ընդհանուր տարրեր չունեն, ապա դրանց հատումը համարվում է դատարկ բազմություն։ Դա գրվում է այսպես. $A\cap B=\varnothing$։

Եթե $B\subset A$, ապա $A\cap B=B$։

Օրինակ 1։ A և B բազմությունները համապատասխանաբար «արեգակ» և «կարապ» բառերի տառերի բազմություններն են։ Գտնել A և B բազմությունների միավորումը և հատումը։

$$A=\{\text{ա, ր, ե, գ, կ}\},\quad B=\{\text{կ, ա, ր, պ}\},$$
$$A\cup B=\{\text{ա, ր, ե, գ, կ, պ}\},\quad A\cap B=\{\text{ա, ր, կ}\}։$$

Օրինակ 2: A և B բազմությունները համապատասխանաբար առանց մնացորդի 2-ի և 3-ի բաժանվող բնական թվերի բազմություններն են: Գտնել այս երկու անվերջ բազմությունների միավորումը և հատումը:

$$A=\{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ \cdots\},$$

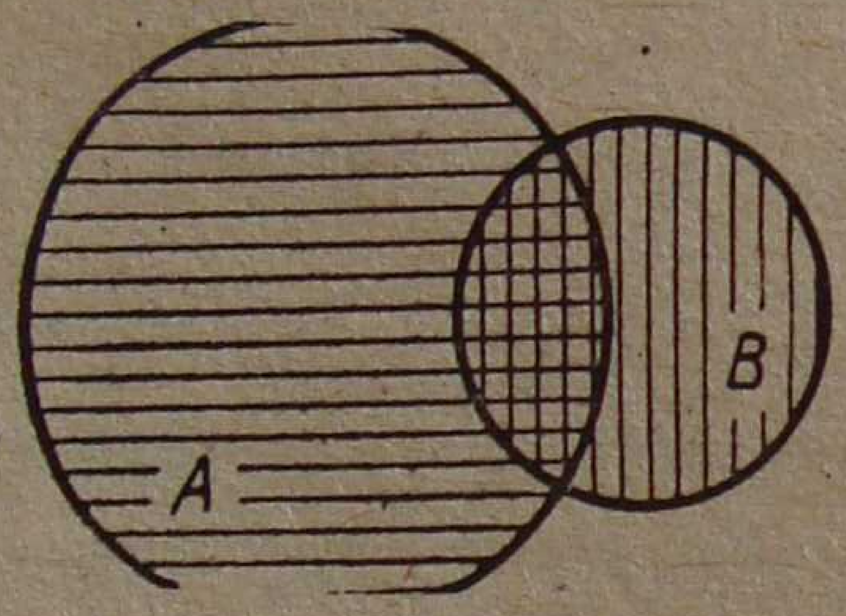
$$B=\{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15;\ 18;\ \cdots\},$$

$$A\cup B=\{2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 10;\ 12;\ 14;\ 15;\ \cdots\},$$

$$A\cap B=\{6;\ 12;\ 18;\ 24;\ \cdots\}:$$

Օրինակ 3: *Դիցուք A-ն հորիզոնական գծապատ շրջանի կետերի բազմությունն է, իսկ B-ն՝ ուղղաձիգ գծապատ շրջանի (նկ. 5): $A\cup B$ միավորումը ամբողջ գծապատ պատկերի կետերի բազմությունն է, իսկ $A\cap B$ միավորումը՝ կրկնակի գծապատ պատկերի (ցանցի) կետերի բազմությունը:*

Կազմենք որևէ A բազմության և դատարկ բազմության միավորումը և հատումը.



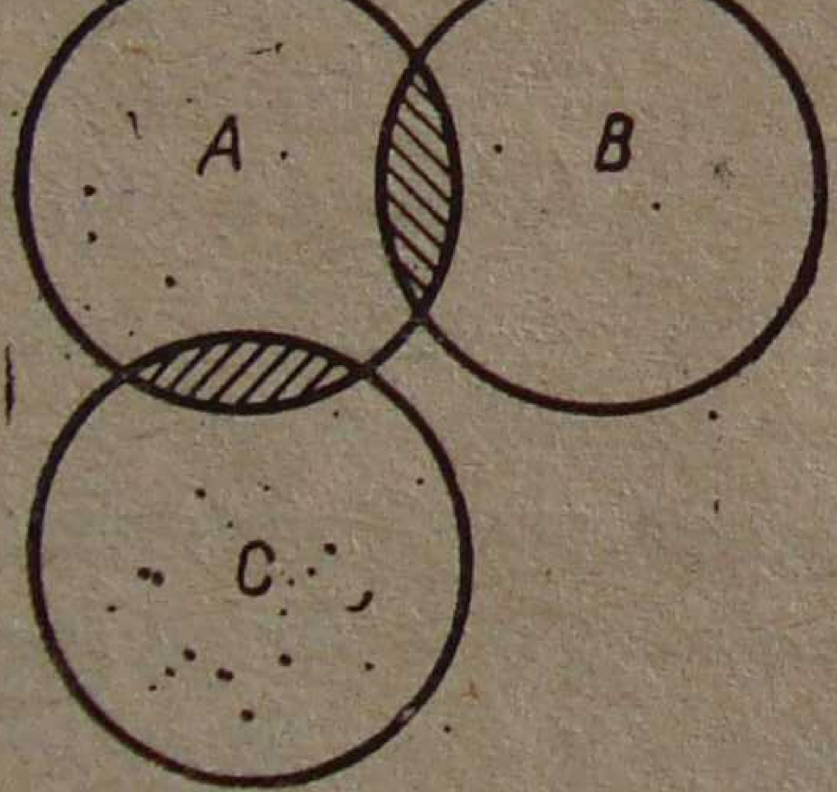
Նկ. 5

$$A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing:$$

Եթե $B\subset A$ *(նկ. 1), ապա* $A\cup B=A$, $A\cap B=B$:

Եթե $A\subset B$ *(նկ. 2), ապա* $A\cup B=B$, $A\cap B=A$:

Ցանկացած A բազմության համար ճշմարիտ են հետևյալ հավասարությունները.

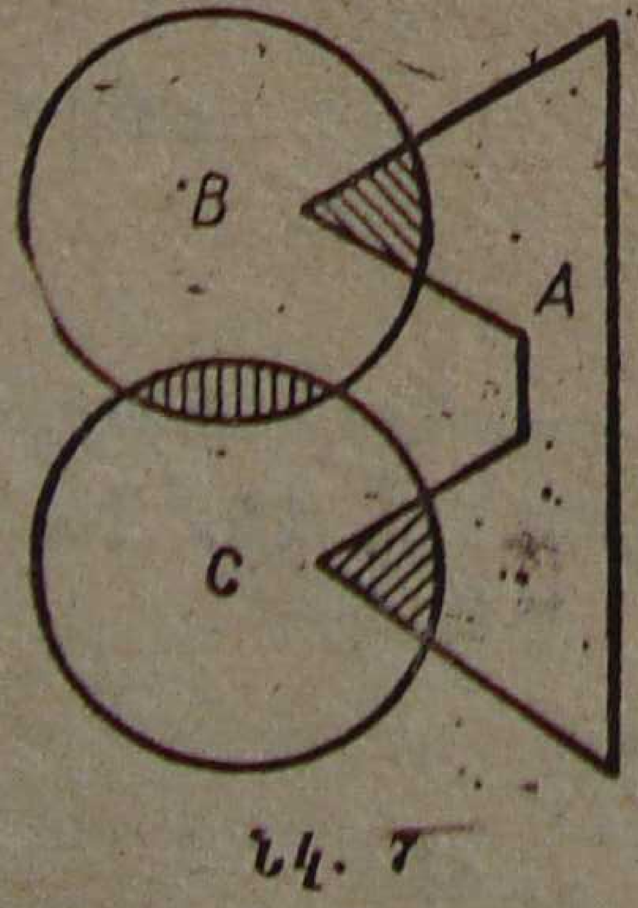


Նկ. 6

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A:$$

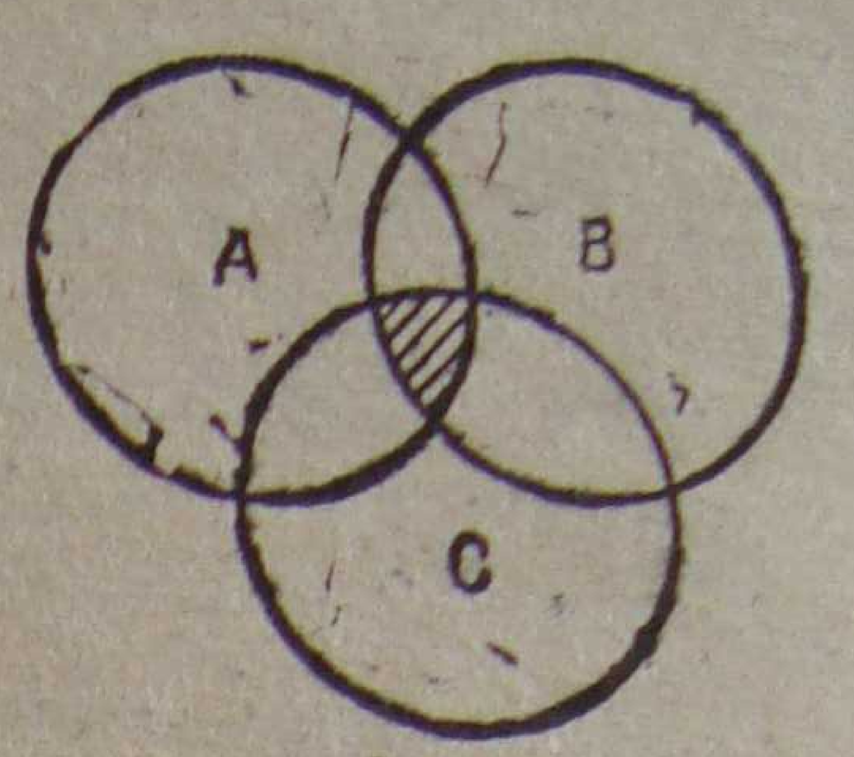
Դիցուք տրված են A, B և C որևէ երեք բազմություններ և պահանջվում է գտնել դրանց միավորումը և հատումը:

6-րդ նկարում ցույց է տրված այն դեպքը, երբ $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C\neq\varnothing$, *բայց* $B\cap C=\varnothing$, *ուստի և* $A\cap B\cap C=\varnothing$: *7-րդ նկարում ցույց է տրված, որ* $A\cap B\neq\varnothing$, $B\cap C\neq\varnothing$, $A\cap C\neq\varnothing$, *բայց* $A\cap B\cap C=\varnothing$: *8-րդ նկարում բոլոր* $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$ *հատումները դատարկ բազմություններ չեն:* $A\cap B\cap C$ *բազմությունը այդ նկարում գծապատված է:*



Նկ. 7

Վարժություններ



Նկ. 8

26. Ճի՞շտ են արդյոք հետևյալ գրառումները.

ա) $A \cap B=\{7\}$, $A \cup B=\{3;\ 7;\ 8;\ 15\}$, եթե $A=\{7;\ 9;\ 15\}$, $B=\{3;\ 7;\ 8\}$,

բ) $A \cap B=\varnothing$, $A \cup B=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6\}$, եթե $A=\{1;\ 3;\ 4\}$, $B=\{2;\ 6\}$։

27. Տրված են հաջորդական բնական թվերի հետևյալ երեք բազմությունները. $A=\{20;\ 21;\ \cdots;\ 28\}$, $B=\{18;\ 19;\ \cdots;\ 22\}$, $C=\{21;\ 22;\ \cdots;\ 26\}$։

ա) Կազմեցեք հետևյալ բազմությունները. $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$ և $B \cap C$։

բ) Գրեցեք $A \cup B \cup C$ և $A \cap B \cap C$ բազմությունները։

Կազմեցեք հետևյալ բառերից յուրաքանչյուրի բոլոր տառերի բազմությունները և գտեք դրանց միավորումը և հատումը։

28. ա) տակառ, կառք, բ) սոխակ, մեխակ, գ) ապրիլ, օգոստոս, դ) վարդ, մարդ, աչք։

29. ա) կինո, կրկես, բ) կաքավ, կարապ, գ) առավոտ, օր, դ) լույս, հույս, գույն։

§ 8. ԲՆԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ՊԱՐԶ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ

Այս պարագրաֆում կխոսենք բացառապես բնական թվերի մասին։

Տրված թվի **բաժանարար** *կոչվում է այն թիվը, որի վրա տրված թիվը բաժանվում է ամբողջությամբ (առանց մնացորդի)։* Օրինակ, 8-ը 40-ի բաժանարարն է։

Թիվը կոչվում է **պարզ**, *եթե այն ունի միայն երկու տարբեր բաժանարարներ՝ 1-ը և հենց ինքը։* Օրինակ, 2, 3, 5, 47, 101, 401, 1973 թվերը պարզ են։

Թիվը կոչվում է **բաղադրյալ**, *եթե այն ունի երկուսից ավելի բաժանարարներ։* Այսպես, 6, 9, 12, 40, 201, 301, 1001 թվերը բաղադրյալ են։

1 թիվը չի համարվում ոչ պարզ, ոչ էլ բաղադրյալ։

Ամեն մի բաղադրյալ թիվ կարելի է ներկայացնել մի քանի պարզ թվերի արտադրյալի տեսքով։ Այդ գործողությունը կոչվում է բաղադրյալ թվի վերլուծում պարզ արտադրիչների։ Օրինակ.

$30=5 \cdot 6=2 \cdot 3 \cdot 5$, $\quad 42=6 \cdot 7=2 \cdot 3 \cdot 7$,

$105=5 \cdot 21=3 \cdot 5 \cdot 7$, $\quad 81=3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3=3^4$,

$125=5 \cdot 5 \cdot 5=5^3$, $\quad 72=2^3 \cdot 3^2$, $1001=7 \cdot 11 \cdot 13$։

2—509

3^4, 5^3, 3^2 գրառումները կարդացվում են այսպես. 3-ի չորրորդ աստիճան, 5-ի երրորդ աստիճան (կամ 5-ի խորանարդ), 3-ի երկրորդ աստիճան (կամ 3-ի քառակուսի)։

Մի քանի միևնույն արտադրիչների արտադրյալը կոչվում է **աստիճան**: Եթե $3^4=81$, ապա 81-ը աստիճան է, 3-ը աստիճանի հիմքն է, իսկ 4-ը՝ աստիճանացույցը (աստիճանի ցուցիչը)։

Թիվը պարզ արտադրիչների վերլուծելու պրոցեսը ցույց տանք ևս մի քանի օրինակներով։

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Այսպիսով, $150=2\cdot3\cdot5\cdot5=2\cdot3\cdot5^2$,

$210=2\cdot3\cdot5\cdot7$,

$360=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5=2^3\cdot3^2\cdot5$։

Մի քանի թվերի **ընդհանուր բաժանարար** *կոչվում է այն թիվը, որի վրա բոլոր այդ թվերը բաժանվում են ամբողջությամբ։* Օրինակ, 150 և 210 թվերն ունեն այսպիսի ընդհանուր բաժանարարներ. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30։ Այդպիսի ընդհանուր բաժանարարներ ունեն նաև 150, 210 և 360 թվերը։ 66, 99 և 165 թվերի ընդհանուր բաժանարարներն են՝ 1, 3, 11 և 33։

Մի քանի թվերի **ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար** (D) *կոչվում է այն ամենամեծ թիվը, որի վրա բաժանվում են բոլոր այդ թվերը։*

Օրինակ, $D(150;\ 210)=30$, $D(150;\ 210;\ 360)=30$, $D(66;\ 99;\ 165)=33$։

Գտնենք 120, 144 և 180 թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

Ունենք. $120=2^3\cdot3\cdot5$, $144=2^4\cdot3^2$, $180=2^2\cdot3^2\cdot5$։

Այժմ գրենք բոլոր այն պարզ արտադրիչները, որոնք մտնում են տրված թվերից յուրաքանչյուրի վերլուծման մեջ և հաշվենք դրանց արտադրյալը։ Այդպիսի արտադրիչները երեքն են՝ 2, 2 և 3։ Այսպիսով,

$$D(120;\ 144;\ 180)=2^2\cdot3=12$$

Եթե երկու կամ մի քանի թվեր չունեն 1-ից բացի այլ ընդհանուր բաժանարարներ, ապա դրանք կոչվում են փոխադարձաբար պարզ թվեր։

Օրինակ, 20 և 21 թվերը փոխադարձաբար պարզ են։ 14, 22 և 77 թվերը ևս փոխադարձաբար պարզ են.

$$D(20; 21)=1, \quad D(14; 22; 77)=1։$$

Տրված թվի բազմապատիկ կոչվում է այն թիվը, որը ամբողջությամբ բաժանվում է տրված թվի վրա։ Օրինակ, 50-ը 10-ի բազմապատիկն է։

Մի քանի թվերի **ընդհանուր բազմապատիկ** կոչվում է այն թիվը, որը ամբողջությամբ բաժանվում է բոլոր այդ թվերի վրա։

Այսպես, 30 և 40 թվերն ունեն, օրինակ, այսպիսի ընդհանուր բազմապատիկներ՝ 120, 240, 600, 1200։ Իսկ 9, 10 և 15 թվերն ունեն, օրինակ, այսպիսի ընդհանուր բազմապատիկներ՝ 90, 180, 900, 1800։

Մի քանի թվերի **ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ** (K) կոչվում է այն ամենափոքր թիվը, որը ամբողջությամբ բաժանվում է այդ թվերից յուրաքանչյուրի վրա։

Օրինակ, $K(30; 40)=120, \quad K(9; 10; 15)=90$։

Մի քանի թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու համար պետք է այդ թվերը վերլուծել պարզ արտադրիչների, գրել մի թվի բոլոր արտադրիչները, դրանց ավելացնել պակասող արտադրիչները մնացած թվերի վերլուծություններից և բազմապատկել բոլոր այդ արտադրիչները։

Օրինակ 1: Գտնել 45, 50, 80 թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։

Ունենք. $45=3 \cdot 3 \cdot 5$, $50=2 \cdot 5 \cdot 5$, $80=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$։

Այսպիսով, $K(45; 50; 80)=(3 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2)=3600$։

Օրինակ 2: Գտնել $K(18, 24, 36)$-ը։

Ունենք. $18=2 \cdot 3^2$, $24=2^3 \cdot 3$, $36=2^2 \cdot 3^2$։

Այսպիսով, $K(18; 24; 36)=2^3 \cdot 3^2=72$։

Վարժություններ

30. Գրեցեք 1-ից մինչև 50 բոլոր պարզ թվերը։

31. 65, 90, 140, 512 թվերը վերլուծեցեք պարզ արտադրիչների։

32. Գտեք 99 և 121; 39, 65 և 130; 160, 200 և 240; 162, 36 և 80 թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

83. Գտեք հետևյալ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը.

ա) 165 և 210, 18, 24 և 54; 48, 64 և 96; 6, 26 և 39;

բ) 56 և 70; 72, 75 և 120; 42, 54 և 96; 24, 60 և 144։

84. Կազմեցեք թվերի հետևյալ զույգերից յուրաքանչյուրի բոլոր բաժանարարների բազմությունների միավորումն ու հատումը.

ա) 65 և 26, բ) 21 և 55, գ) 7 և 14, դ) 4 և 8։

§ 9. ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐ: ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄՆ ՈՒ ՀԱՆՈՒՄԸ

Բնական թվերի և զրո թվի հետ մեկտեղ դիտարկենք կոտորակային թվերը: Դրանք առաջանում են զանազան մեծությունների չափման պրոցեսում, օրինակ, հատվածների երկարությունները, անկյունների, ժամանակի, զանգվածի և այլ մեծություններ չափելիս։

Սովորական կոտորակների գրառման մեջ ($\frac{2}{3}$, $\frac{63}{100}$, $\frac{25}{12}$ և այլն) կոտորակի գծից վերև գրված թիվը կոչվում է համարիչ, իսկ գծից ներքև գրվածը՝ հայտարար: Կոտորակը համարիչի և հայտարարի բաժանման քանորդն է։

Տասնորդական կոտորակներ կոչվում են այնպիսի կոտորակները, որոնց հայտարարներն են 10, 100, 1000 և նման թվերը: Դրանք գրվում են հետևյալ տեսքով. 3,4; 0,63; 27,081 և այլն։ Ստորակետը ամբողջ մասը բաժանում է կոտորակային մասից. ստորակետից ձախ գտնվում է ամբողջ մասը, ստորակետից աջ՝ կոտորակային մասը: Ստորակետից աջ գտնվող թվանշանները կոչվում են տասնորդական նիշեր։

Ձախից առաջին տասնորդական նիշը ցույց է տալիս տասնորդական մասերը, երկրորդը՝ հարյուրերորդական մասերը, երրորդը՝ հազարերորդական մասերը և այլն։ Կարդանք վերը գրված տասնորդական կոտորակները. 0,63-զրո ամբողջ վաթսուներեք հարյուրերորդական, 27,081-քսանյոթ ամբողջ ութսունմեկ հազարերորդական։

Սյունակային գումարում կամ հանում կատարելիս կարևոր է, որ մի թվի ամբողջ մասը գրվի մյուսի ամբողջ մասի տակ, ստորակետը՝ ստորակետի տակ, տասնորդական մասերը՝ տասնորդականների տակ, հարյուրերորդականները՝ հարյուրերորդականների տակ և այլն։

$$\begin{array}{r} 12{,}63 \\ +\;0{,}025 \\ 3{,}07 \\ \hline 15{,}725 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14{,}0300 \\ -\;5{,}2136 \\ \hline 8{,}8164 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8{,}2045 \\ -\;2{,}5392 \\ \hline 5{,}6653 \end{array}$$

Հարմարության համար երբեմն նվազելիի կոտորակային մասին աջից ավելացնում են զրոներ, որպեսզի հավասարեցնեն ստորակետից աջ գտնվող թվանշանների քանակը։

Օրինակ: *Կատարել գործողությունները.*

$$9{,}376-((2{,}6-1{,}827)+(4{,}23+0{,}607))\text{։}$$

Լուծում։

1) $\begin{array}{r} 2{,}6 \\ -\;1{,}827 \\ \hline 0{,}773 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 4{,}23 \\ +\;0{,}607 \\ \hline 4{,}837 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 0{,}773 \\ +\;4{,}837 \\ \hline 5{,}61 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 9{,}376 \\ -\;5{,}61 \\ \hline 3{,}766 \end{array}$

Պատասխան, 3,766։

Վարժություններ

Կատարեցեք գործողությունները.

35. $15{,}3+(12{,}63-5{,}28)-(11{,}63-4{,}28)$։

36. $(6{,}006-2{,}88)+(3{,}61-1{,}964)-4{,}594-0{,}084$։

37. $(4{,}102+2{,}3004)-3{,}4484-(5{,}7-(3{,}8041+1{,}0159))$։

38. $22-20{,}8004+(4{,}2055-(2{,}904-0{,}5289))$։

§ 10. ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄՆ ՈՒ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

Հիշենք, թե ինչպես է փոխվում տասնորդական կոտորակի արժեքը, երբ ստորակետը աջ կամ ձախ ենք տեղափոխում մի քանի թվանշանով։ Վերցնենք, օրինակ, 19,72 թիվը և ստորակետը տեղափոխենք աջ կամ ձախ։ 19,72 թվից 197,2 թվին անցնելիս հարյուրերորդական մասը (2) դարձան տասներորդական մասեր, տասներորդական մասերը (7)՝ միավորներ, միավորները (9)՝ տասնավորներ, տասնավորները (1)՝ հարյուրավորներ. պարզ է, որ տրված թիվը մեծացավ 10 անգամ։ Հակառակը, 19,72 թվից, օրինակ, 1,972 թվին անցնելիս հարյուրերորդական մասերը (2) դարձան հազարերորդական մասեր, տասներորդական մասերը (7)՝ հարյուրերորդական մասեր, միավորները (9)՝ տասներորդական մասեր, տասնավորները (1)՝ միավորներ, ուստի տրված թիվը փոքրացավ 10 անգամ։

Այսպիսով, ստորակետը 1, 2, 3 և այլն նիշով աջ տեղափոխելիս կոտորակի արժեքը մեծանում է 10, 100, 1000 և այլ անգամ, իսկ 1, 2 և այլն նիշով ձախ տեղափոխելիս կոտորակի արժեքը փոքրանում է 10, 100 և այլն անգամ։

Դիցուք պետք է 3,23-ը բազմապատկել 5,1-ով։ Առաջին արտադրիչի ստորակետը աջ տեղափոխենք 2 նիշով, իսկ երկրորդինը՝ 1 նիշով։ Դրանից 1-ին արտադրիչը կմեծանա 100 անգամ, իսկ 2-րդը՝ 10 անգամ և, հետևաբար, ամբողջ արտադրյալը կմեծանա 1000 անգամ։ 323-ը բազմապատկելով 51-ով, կստանանք 16473։ Որոնելի արտադրյալը գտնելու համար այս թիվը պետք է փոքրացնել 1000 անգամ, դրա համար բավական է աջից առանձնացնել 3 նիշ։ Կստանանք. $3,23 \cdot 5,1=16,473$։

Այսպիսով, տասնորդական կոտորակը բնական թվով կամ տասնորդական կոտորակով բազմապատկելու համար պետք է դրանք բազմապատկել որպես բնական թվեր (ուշադրություն չդարձնելով ստորակետների վրա) և արտադրյալում աջից առանձնացնել այնքան թվանշան, որքան տասնորդական նիշ կա երկու արտադրիչներում միասին։

Օրինակներ։

$$\begin{array}{r} \times\, 3,23 \\ 5,1 \\ \hline 323 \\ +\,1615 \\ \hline 16,473 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 2,03 \\ 27 \\ \hline 1421 \\ +\,406 \\ \hline 54,81 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 1,25 \\ 0,16 \\ \hline 750 \\ +\,125 \\ \hline 0,2000=0,2 \end{array}$$

Դիտարկենք տասնորդական կոտորակի բաժանումը բնական թվի վրա։

Օրինակներ։

$$\begin{array}{r|l} -\,123,69 & 93 \\ 93 & \overline{1,33} \\ \hline -\,306 & \\ 279 & \\ \hline -\,279 & \\ 279 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,7,5295 & 37 \\ 74 & \overline{0,2035} \\ \hline -\,129 & \\ 111 & \\ \hline -\,185 & \\ 185 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Այսպիսով, $123,69 : 93=1,33$; $7,5295 : 37=0,2035$,

Տասնորդական կոտորակը տասնորդական կոտորակի վրա բաժանելը հանգեցվում է բնական թվի վրա բաժանելու դեպքին։ 1,32-ը 2,4-ի բաժանելիս բաժանելին և բաժանարարը մեծացնենք 10 անգամ, որի համար ստորակետը աջ տեղափոխենք մեկ նիշով։ Դրանից քանորդի արժեքը չի փոխվի։ 1,32 թիվը 2,4 տասնորդական կոտորակի վրա բաժանելը հանգեց 13,2 թիվը 24 բնական թվի վրա բաժանելուն։ Կատարելով հաշվումները, քանորդում ստանում ենք 0,55։

Այսպիսով, $1,32 : 2,4=13,2 : 24=0,55$։

Օրինակներ:

1) $2352 : 0{,}42 = 235\,200 : 42 = 5600$,

2) $11025{,}42 : 1{,}05 = 1102\,542 : 105 = 1050{,}04$։

Վարժություններ

Կատարեցեք գործողությունները.

39. *ա)* $326{,}5317 : 0{,}9$, *բ)* $1{,}530612 : 0{,}306$։

40. *ա)* $2{,}8764 : 1{,}41$, *բ)* $2{,}5553 : 25{,}3$։

41. *ա)* $7{,}5348 \cdot 70{,}2 : 3{,}64$, *բ)* $9{,}3025 \cdot 12 : 3{,}05$։

42. *ա)* $0{,}77 \cdot 36{,}72 : 1{,}02$, *բ)* $0{,}025 \cdot 36{,}2 : 12{,}5$։

43. $564{,}0004 - 510{,}719 : 6{,}38 \cdot 7{,}008$։

44. $0{,}025 \cdot (134{,}7075 + 3{,}75 : 2{,}4 - 2{,}27)$։

Գտեք թվաբանական գործողության անհայտ բաղադրիչը.

45. *ա)* $x + 0{,}939 = 2{,}571$, *գ)* $x - 3{,}571 = 0{,}103$,

բ) $9{,}26 + x = 10{,}321$, *դ)* $4{,}007 - x = 2{,}574$։

46. *ա)* $7{,}003 \cdot x = 14{,}35615$, *գ)* $16{,}7097 : x = 32{,}7$,

բ) $x \cdot 3{,}201 = 16{,}06902$, *դ)* $x : 0{,}721 = 0{,}304$։

Լուծեցեք հավասարումը (գտեք նրա արմատների բազմությունը).

47. *ա)* $5{,}273 + 2 \cdot x = 8{,}693$, *գ)* $0{,}5 : x + 6{,}027 = 7{,}277$,

բ) $0{,}75 \cdot x - 12{,}462 = 3{,}588$, *դ)* $x : 7{,}2 - 3{,}234 = 4{,}526$։

48. *ա)* $(3{,}5 + x) \cdot 16{,}7 = 64{,}462$, *գ)* $(x + 4{,}12) : 6{,}23 = 27{,}2$,

բ) $(x - 2{,}7) \cdot 3{,}86 = 32{,}231$, *դ)* $(6{,}32 + x) : 32{,}6 = 0{,}53$։

§ 11. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ: ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄՆ ՈՒ ՀԱՆՈՒՄԸ

Ձևակերպենք կոտորակի հիմնական հատկությունը։ Կոտորակի արժեքը չի փոխվի, եթե համարիչն ու հայտարարը մեծացնենք կամ փոքրացնենք նույնքան անգամ: *Սա արտահայտում է քանորդի հիմնական հատկությունը (§ 1), քանի որ ցանկացած կոտորակ կարելի է դիտել որպես համարիչը հայտարարի վրա բաժանելու քանորդ։ Այսպիսով, կոտորակի համարիչն ու հայտարարը զրոյից տարբեր միևնույն թվով բազմապատկելիս կամ բաժանելիս ստացվում են միմյանց հավասար կոտորակներ։*

Հավասար կոտորակներ են այն կոտորակները, որոնք հանդիսանում են միևնույն թվի գրառումներ։ Օրինակ. $\frac{6}{8}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{36}{48}$ կոտորակները միմյանց հավասար են և $\frac{3}{4}$ կոտորակային թվի գրառումներն են, $\frac{0}{4}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{0}{5}$ հավասար կոտորակները զրո թվի գրառումներն են, $\frac{10}{2}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{15}{3}$ հավասար կոտորակները 5 բնական թվի գրառումներն են։

Եթե կոտորակի համարիչը զրոյից տարբեր է և առանց մնացորդի բաժանվում է հայտարարի վրա, ապա այդ կոտորակը բնական թվի գրառում է։ Եթե կոտորակի համարիչը առանց մնացորդի չի բաժանվում հայտարարի վրա, ապա այդ կոտորակը կոտորակային թվի գրառում է։

Համարիչը և հայտարարը զրոյից տարբեր թվի վրա բաժանելը կոչվում է կոտորակի կրճատում: Կոտորակը կոչվում է անկրճատելի, եթե համարիչն ու հայտարարը փոխադարձաբար պարզ թվեր են, այսպես, $\frac{14}{45}$ կամ $\frac{3}{1}$ կոտորակները անկրճատելի են՝ $D(14;\ 45)=1$, $D(3;\ 1)=1$։

Եթե համարիչը փոքր է հայտարարից՝ ապա կոտորակը կոչվում է կանոնավոր: Եթե համարիչը մեծ է հայտարարից կամ հավասար է նրան, ապա կոտորակը կոչվում է անկանոն:

Անկանոն կոտորակը կարելի է ներկայացնել բնական թվի և կանոնավոր կոտորակի գումարի տեսքով։ Օրինակ.

$$\frac{37}{5}=\frac{35}{5}+\frac{2}{5}=7+\frac{2}{5}=7\frac{2}{5}.$$

Եվ ընդհակառակը, բնական թվի և կանոնավոր կոտորակի գումարը կարելի է ներկայացնել անկանոն կոտորակի տեսքով։ Օրինակ

$$6\frac{5}{11}=6+\frac{5}{11}=\frac{66}{11}+\frac{5}{11}=\frac{71}{11},$$

Ամեն մի թիվ կարելի է ներկայացնել ամբողջ մասի և 1-ից փոքր կոտորակային մասի գումարի տեսքով։ Այսպես, $\frac{37}{5}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{71}{11}$ կոտորակային թվերի ամբողջ մասերն են համապատասխանաբար

7, 0, 0, 6, իսկ կոտորակային մասերը՝ $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{11}$։ Բնական թվի ամբողջ մասը հավասար է հենց թվին, իսկ կոտորակային մասը՝ զրոյի։ Զրոյի ամբողջ և կոտորակային մասերը հավասար են զրոյի։

Բերենք սովորական կոտորակների գումարման և հանման օրինակներ.

1) $6\frac{4}{7}+2\frac{3}{7}+5\frac{1}{7}=13\frac{4+3+1}{7}=13\frac{8}{7}=14\frac{1}{7}$,

2) $7\frac{53}{55}-5\frac{42}{55}=2\frac{53-42}{55}=2\frac{11}{55}=2\frac{1}{5}$,

Այստեղ մենք նախ գումարեցինք կամ հանեցինք թվի ամբողջ մասերը, իսկ այնուհետև՝ արդեն կոտորակային մասերը։

3) $13\frac{5}{18}-4\frac{17}{18}$,

Մենք չենք կարող 5-ից հանել 17։ Ուստի մենք ստիպված պետք է նվազելիի ամբողջ մասից փոխ առնենք մեկ միավոր, այն արտահայտենք տասնութերորդական մասերով և ավելացնենք նվազելիի կոտորակային մասին, որից հետո նոր հանենք կոտորակները.

$$13\frac{5}{18}-4\frac{17}{18}=12\frac{23}{18}-4\frac{17}{18}=8\frac{23-17}{18}=8\frac{6}{18}=8\frac{1}{3},$$

Տարբեր հայտարարներով կոտորակներ գումարելիս կամ հանելիս անհրաժեշտ է դրանք նախապես բերել ընդհանուր հայտարարի։ Հարմար է դրանք բերել ամենափոքր ընդհանուր հայտարարի, վերջինս կոտորակների հայտարարների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է։

4) $2\frac{7}{8}+3\frac{4}{15}+1\frac{5}{24}$,

Գտնենք ամենափոքր ընդհանուր հայտարարը՝ $K(8, 15, 24)=120$։ 8, 15 և 24 հայտարարների լրացուցիչ արտադրիչները (բաժանարարները) հավասար են համապատասխանաբար 15, 8 և 5։ Այսպիսով,

$$2\frac{105}{120}+3\frac{32}{120}+1\frac{25}{120}=6\frac{105+32+25}{120}=6\frac{162}{120}=7\frac{42}{120}=7\frac{7}{20},$$

Դիտարկենք մեկ օրինակ ևս.

5) $5\frac{8}{15}+\left(3\frac{11}{90}-\left(6\frac{1}{2}-5\frac{11}{45}\right)\right)-2\frac{7}{12}$,

$$6\frac{1}{2}-5\frac{11}{45}=1\frac{23}{90}, \qquad 3\frac{11}{90}-1\frac{23}{90}=1\frac{13}{15},$$

$$5\frac{8}{15}+1\frac{13}{15}=7\frac{2}{5}, \qquad 7\frac{2}{5}-2\frac{7}{12}=4\frac{49}{60},$$

Պատասխան. $4\frac{49}{60}$։

Վարժություններ

Կատարեցեք գործողությունները.

49. $\left(42\frac{5}{12}-12\frac{11}{18}\right)-\left(25-4\frac{7}{36}\right)$։

50. $\left(1\frac{2}{5}+3\frac{2}{3}+12\frac{1}{2}+6\frac{4}{9}\right)-\left(9\frac{3}{4}+\frac{7}{12}\right)$։

51. $\left(4\frac{3}{5}+2\frac{5}{18}\right)-\left(1\frac{1}{3}+2\frac{17}{25}\right)-2\frac{209}{450}$։

52. $\left(18\frac{35}{132}-5\frac{1}{22}\right)+\left(2\frac{19}{33}-1\frac{9}{22}\right)-14\frac{17}{44}$։

Լուծեցեք հավասարումը.

53. *ա)* $x+5\frac{7}{8}=12\frac{4}{5}$, *բ)* $2\frac{8}{9}+x=3\frac{14}{15}$։

54. *ա)* $x-4\frac{6}{11}=5\frac{7}{8}$, *բ)* $13\frac{2}{3}-x=6\frac{3}{4}$։

§ 12. ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄՆ ՈՒ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

Հիշեցնենք հիմնական կանոնները։

Երկու կոտորակների արտադրյալը հավասար է մի կոտորակի, որի համարիչը հավասար է տրված կոտորակի համարիչների արտադրյալին, իսկ հայտարարը՝ հայտարարների արտադրյալին։

Երկու թվեր կոչվում են փոխհակադարձ, *եթե դրանց արտադրյալը հավասար է 1-ի։ Այդպիսին են, օրինակ,* 3 *և* $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{7}$ *և* $\frac{7}{5}$ *թվերը։*

Կոտորակը կոտորակի բաժանելու համար պետք է բաժանելին բազմապատկել բաժանարարի հակադարձ թվով, *օրինակ,*

$$\frac{18}{25}:\frac{27}{35}=\frac{18}{25}\cdot\frac{35}{27}=\frac{18\cdot35}{25\cdot27}=\frac{14}{15},$$

Եթե երկու արտադրիչները կամ բաժանարարը տրված են բնական թվի և կանոնավոր կոտորակի գումարի տեսքով, ապա պետք է նախապես դրանք ներկայացնել անկանոն կոտորակի տեսքով։

Դիտարկենք օրինակներ։

1) $18\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{11}=\frac{55\cdot 12}{3\cdot 11}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 1}=20,$

2) $6\frac{2}{3}\cdot 12=\left(6+\frac{2}{3}\right)\cdot 12=6\cdot 12+\frac{2}{3}\cdot 12=80,$

3) $60\frac{5}{7}:5=\left(60+\frac{5}{7}\right):5=12+\frac{1}{7}=12\frac{1}{7},$

4) $120:2\frac{2}{5}=\frac{120}{1}:\frac{12}{5}=\frac{120\cdot 5}{12}=50,$

5) $2\frac{1}{4}:1\frac{1}{8}=\frac{9}{4}:\frac{9}{8}=\frac{9\cdot 8}{4\cdot 9}=2$։

Վարժություններ

Կատարեցեք գործողությունները։

55. $\left(2\frac{1}{2}:3\frac{2}{3}\right):\left(7\frac{1}{2}:7\frac{1}{3}\right)\cdot 5\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{21}$,

56. $\left(\left(3\frac{3}{8}:1\frac{1}{2}\right):\left(2\frac{11}{12}:\frac{7}{8}\right)\right)\cdot\left(1\frac{2}{3}:\frac{27}{100}\right)$,

Լուծեցեք հավասարումը.

57. *ա)* $1\frac{2}{9}\cdot x\cdot 3\frac{3}{7}=3\frac{2}{3},$ *բ)* $1\frac{2}{7}\cdot 3\frac{1}{6}\cdot x=2\frac{5}{7}$,

58. *ա)* $\left(x:1\frac{13}{22}\right)\cdot 2\frac{3}{14}=7\frac{3}{4},$ *բ)* $22\frac{1}{2}:x=15\frac{5}{7}\cdot 5\frac{1}{4}$,

§ 13. ԽԱՌԸ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԵՎ ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՀԵՏ

Տասնորդական կոտորակը սովորական կոտորակ դարձնելը ցույց տանք օրինակներով.

$$0{,}625=\frac{625}{1000}=\frac{125}{200}=\frac{5}{8},\quad 8{,}75=8\frac{75}{100}=8\frac{3}{4},$$

Սովորական անկրճատելի կոտորակը տասնորդական դարձնելիս հնարավոր է երկու դեպք։

1. Եթե կոտորակի հայտարարը պարզ արտադրիչների վերլուծելիս ստացվում են կամ միայն երկուսներ, կամ միայն հինգեր, կամ երկուսներ և հինգեր, ապա համարիչը հայտարարի վրա բաժանելով կստանանք որոնելի տասնորդական կոտորակը. դա վերջավոր տասնորդական կոտորակ է։

Օրինակներ: Հետևյալ սովորական կոտորակները դարձնել տասնորդական. $\frac{12}{25}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{49}{80}$։

Համարիչները հայտարարների վրա բաժանելով, կստանանք հաջորդաբար. $\frac{12}{25}=0,48$, $\frac{3}{16}=0,1875$, $\frac{49}{80}=0{\cdot}6125$։

2. Իսկ եթե սովորական անկրճատելի կոտորակի հայտարարի վերլուծման մեջ պարունակվում է 2-ից և 5-ից տարբեր գոնե մեկ պարզ արտադրիչ, ապա բաժանման պրոցեսը չի ավարտվում, քանի որ անընդհատ առաջանում է զրոյից տարբեր մնացորդ։

Օրինակներ: $\frac{2}{3}=0,6666\cdots$, $\frac{13}{15}=0,8666\cdots$, $\frac{9}{22}=0,40909\ldots$։

Սրանք անվերջ տասնորդական կոտորակների օրինակներ են։

Տասնորդական և սովորական կոտորակների հետ խառը գործողություններ կատարելիս պետք է տասնորդական կոտորակը դարձնել սովորական, կամ սովորական կոտորակը դարձնել (եթե դա հնարավոր է) վերջավոր տասնորդական կոտորակ։

Օրինակ: $68\frac{4}{5}:0,86-60,3:73\frac{1}{11}$,

Լուծում. $68,8:0,86=80$, $60\frac{3}{10}:73\frac{1}{11}=\frac{33}{40}$, $80-\frac{33}{40}=$

$=79\frac{7}{40}=79,175$։

Պատասխան. 79,175։

Վարժություններ

Կատարեցեք գործողությունները.

59. $3,24:0,9\cdot\frac{4}{9}+\left(5-11\frac{7}{8}:2,5\right):0,0625$։

60. $\left(1\frac{17}{50}+\frac{7}{40}:2\frac{11}{12}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot8,6-1\frac{107}{180}\right)$,

61. $1{,}5\cdot\left(\frac{3}{50}+0{,}2652:0{,}13-1\frac{17}{30}\right)+1\frac{13}{15}$,

62. $14{,}95+\frac{5}{24}:\frac{25}{42}+0{,}3\cdot\left(30\frac{1}{2}:0{,}5-1976:32{,}5\right)$,

63. $0{,}06+0{,}2652:0{,}03-3\frac{29}{180}-17\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}$,

64. *Տուրիստն առաջին օրը անցավ ամբողջ ճանապարհի $\frac{10}{31}$-ը, երկրորդ օրը՝ առաջին օրվա անցածի 0,9-ը, իսկ երրորդ օրը՝ մնացած 24 կմ-ը։ Քանի՞ կիլոմետր ճանապարհ անցավ տուրիստը երեք օրում։*

65. *Ավտոսիրողն առաջին օրն անցավ ամբողջ ճանապարհի $\frac{2}{9}$-ը, երկրորդ օրը՝ մնացած մասի $\frac{5}{14}$-ը, իսկ երրորդ օրը՝ մնացած 360 կմ-ը։ Ավտոսիրողը քանի՞ կիլոմետր անցավ առաջին և երկրորդ օրերին առանձին-առանձին։*

Լուծեցեք հավասարումը.

66. ա) $8\frac{7}{11}-\frac{3}{4}\cdot x=2{,}375$, բ) $6{,}33\cdot x+2\frac{3}{14}=11\frac{9}{35}$,

67. ա) $5\frac{26}{27}:(2{,}5-3\cdot x)=53\frac{2}{3}$, բ) $(5\cdot x+0{,}2):3\frac{12}{13}=48{,}75$,

68. ա) $(4{,}2-3\cdot x):\frac{8}{21}=\frac{7}{6}$, բ) $\left(2\cdot x-\frac{3}{11}\right):\frac{5}{33}=5{,}5$,

69. ա) $\left(0{,}7\cdot x-\frac{4}{7}\right)\cdot 1\frac{2}{3}=6{,}45$, բ) $\left(\frac{1}{27}+\frac{2}{3}\cdot x\right)\cdot 0{,}63=\frac{7}{36}$,

Ինքնուրույն աշխատանք № 1

1. *Տրված է երեք բազմություն.* A={3; 4; 5}, B={1; 2; 3; 7} *և* C={3; 7}։

ա) Գտեք A և B բազմությունների միավորումն ու հատումը։

բ) Պատկանելիության և չպատկանելիության նշանների միջոցով գրեցեք, թե որ բազմությունն է պարունակում 2 տարրը և որը չի պարունակում այդ տարրը։

գ) Ընդգրկման նշանի միջոցով գրեցեք, թե A և B բազմություններից որի ենթաբազմությունն է C բազմությունը։ Կազմեցեք C բազմության բոլոր չորս ենթաբազմությունները։

2. Կատարեցեք գործողությունները.

$$\frac{3,85 \cdot 5\frac{1}{7}+69,25 : 27,7-14\frac{3}{20}}{\left(1,75 : \frac{2}{3}-1\frac{5}{8}\right) : \frac{7}{16}+14\frac{1}{70}},$$

3. Լուծեցեք հավասարումը (գտեք նրա արմատների բազմությունը).

$$0,3 \cdot x-8,632=3,644,$$

§ 14. ՏՐՎԱԾ ԹՎԻ ՏՈԿՈՍ ԳՏՆԵԼԸ

Թվի հարյուրերորդական մասը կոչվում է այդ թվի տոկոս: «Տոկոս» բառի նշանակման համար օգտագործվում է % նշանը:

Թվի տոկոսային գրառումը հավասարապես օգտագործվում է թվերի կոտորակային գրառումների հետ:

Օրինակներ

$0,01=\frac{1}{100}=1\%,$ $0,8=\frac{4}{5}=80\%,$

$0,05=\frac{1}{20}=5\%,$ $1=100\%,$

$0,1=\frac{1}{10}=10\%,$ $1,2=1\frac{1}{5}=120\%,$

$0,25=\frac{1}{4}=25\%,$ $1,5=1\frac{1}{2}=150\%,$

$0,5=\frac{1}{2}=50\%,$ $1,625=1\frac{5}{8}=162,5\%,$

$0,75=\frac{3}{4}=75\%,$ $2=200\%:$

Պլանային առաջադրանքը կատարել 200%-ով, նշանակում է կատարել կրկնակի պլանային առաջադրանք:

Դիտարկենք տրված թվի տոկոս գտնելու վերաբերյալ հետևյալ խնդիրը:

Դիցուք պահանջվում է գտնել 150-ի 7%-ը: Նախ հաշվենք 150-ի 1%-ը. դրա համար պետք է 150-ը բաժանել 100-ի: Այնուհետև հաշվենք 150-ի 7%-ը, դրա համար պետք է $\frac{150}{100}$-ը բազմապատկել

7-ով: Այսպիսով, 150 թիվը պետք է բաժանել 100-ի և ստացված քանորդը բազմապատկել 7-ով, կամ, որ նույնն է, պետք է 150-ը բազմապատկել 0,07-ով; $150 \cdot 0,07 = 10,5$: Այսպիսով, 150 թվի 7%-ը հավասար է 10,5-ի:

Տրված թվի տոկոս գտնելու համար պետք է տոկոսային թիվն արտահայտել կոտորակով և տրված թիվը բազմապատկել այդ կոտորակով:

Օրինակներ:

1) Գտնել 860-ի 7,2%-ը:

$$7,2\% = 0,072; \quad 860 \cdot 0,072 = 61,92$$

2) Գտնել 24-ի 145%-ը:

$$145\% = 1,45; \quad 24 \cdot 1,45 = 34,8$$

3) Գտնել $3\frac{1}{13}$-ի 6,5%-ը:

$$6,5\% = 0,065; \quad 3\frac{1}{13} \cdot 0,065 = 0,2$$

Խնդիր: Հաշվել ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ձև ունեցող բլոկի բարձրությունը, եթե նրա երկարությունը հավասար է 2,7 մ-ի, լայնությունը կազմում է երկարության 40%-ը, իսկ բարձրությունը լայնության 75%-ը:

Նախ որոշենք բլոկի լայնությունը, իսկ այնուհետև՝ բարձրությունը.

$$40\% = 0,4, \qquad 2,7 \cdot 0,4 = 1,08 \ (մ),$$

$$75\% = 0,75, \qquad 1,08 \cdot 0,75 = 0,81 \ (մ):$$

Պատասխան. բլոկի բարձրությունը 0,81մ է:

Այս խնդիրը կարելի է լուծել նաև տոկոսային թվի տոկոսը հաշվելու ճանապարհով.

1) Երկարության ո՞ր տոկոսն է կազմում բարձրությունը.

Գտնենք 40%-ի 75%-ը. $0,75 \cdot 0,4 = 0,3 = 30\%$:

1) Ինչի՞ է հավասար բլոկի բարձրությունը:

$$2,7 \cdot 0,3 = 0,81 \ (մ):$$

Վարժություններ

70. Հետևյալ կոտորակները արտահայտեցեք տոկոսներով. 0,07; 36,5; 124,9; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{50}$; $2\frac{1}{4}$; $5\frac{3}{16}$; 0,027; 42,57; 0,0035:

71. *Հետևյալ տոկոսները արտահայտեցեք կոտորակներով.* 1% 5%, 6,2%, 18,5%, 102%, 163,5%, $\frac{2}{7}$%, $3\frac{2}{3}$%, $13\frac{1}{3}$%։

72. *Գտեք. 100 կգ-ի 2%-ը, 50 մ-ի 12%-ը, 9 տ-ի* $\frac{2}{3}$*%-ը, 75 սմ-ի 160%-ը, 512-ի 230%-ը, 16-ի 0,5%-ը, 270-ի 7,2%-ը, 900-ի* $3\frac{1}{3}$*%-ը, 1800-ի 0,02%-ը։*

73. *Գտեք. 200 մ-ի 3%-ը, 25 մ-ի 18%-ը, 140 սմ-ի* $\frac{3}{7}$ *%-ը, 50 տ-ի 112%-ը, 130-ի 320%-ը, 20-ի 0,4%-ը, 1500-ի* $4\frac{2}{3}$ *%-ը, 350-ի 6,5%-ը 1500-ի 0,03%-ը։*

74. *Անտառտնտեսությունը տնկեց 600 հա անտառ։ Սոճուն հատկացվեց ամբողջ մակերեսի 32,5%-ը, կաղնուն՝ մնացածի 60%-ը, իսկ եղևնուն՝ մնացած մակերեսը։ Որքա՞ն մակերես հատկացվեց եղևնուն։*

75. *Ավտոբուսն առաջին օրն անցավ ամբողջ ճանապարհի 35%-ը, երկրորդ օրը՝ մնացածի 75%-ը, երրորդ օրը՝ մնացած ճանապարհը։ Ավտոբուսը քանի՞ կիլոմետր անցավ երրորդ օրը, եթե ամբողջ ճանապարհը 1280 կմ է։*

§ 15. ԹՎԻ ԳՏՆԵԼԸ ԸՍՏ ԻՐ ՏՈԿՈՍԻ

Այժմ դիտարկենք թիվն ըստ իր տոկոսի գտնելու խնդիրը։

Դիցուք պահանջվում է գտնել թիվը, եթե նրա 16%-ը հավասար է 275-ի։ Որոշենք որոնելի թվի 1%-ը. դրա համար պետք է 275-ը բաժանել 16-ի։ Այնուհետև հաշվենք որոնելի թվի 100%-ը. դրա համար պետք է $\frac{275}{16}$*-ը բազմապատկել 100-ով։ Այսպիսով, 275-ը պետք է բաժանել 16-ի և ստացված քանորդը բազմապատկել 100-ով, կամ որ նույնն է, 275-ը բաժանել 0,16-ի.* 275 : 0,16=1718,75։

Այսպիսով, 1718,75-ը այն թիվն է, որի 16%-ը հավասար է 275-ի։

Թիվն ըստ իր տոկոսի գտնելու համար պետք է տոկոսային թիվն արտահայտել կոտորակով, այնուհետև որոնելի թվի տրված մասը բաժանել այդ կոտորակի վրա։

Օրինակներ:

1. Գտնել թիվը, եթե նրա 75%-ը հավասար է 390-ի։

Քանի որ $75\%=0{,}75$, ուստի որոնելի թիվը գտնելու համար պետք է 390-ը բաժանել 0,75-ի։ Արդյունքում կստանանք 520։

2) Գտնել թիվը, եթե նրա 125%-ը հավասար է 165-ի։

Լուծումը նույնն է.

$$125\%=1{,}25=\frac{5}{4}, \qquad 165:\frac{5}{4}=\frac{165\cdot 4}{5}=132.$$

Համեմատենք այս օրինակները։ Առաջինում որոնելի թիվը մեծ ստացվեց պայմանում տրված թվից. $520>390$, իսկ երկրորդում՝ փոքր. $132<165$։ (Ինչու՞։)

Խնդիր։ Բանվորն առաջին օրը կատարեց դետալներ պատրաստելու ամբողջ առաջադրանքի 35%-ը երկրորդ օրը՝ առաջին օրվա արածի 60%-ը, իսկ երրորդ օրը՝ առաջադրանքի մնացած մասը։ Երկրորդ օրը բանվորը 184 դետալ պակաս պատրաստեց, քան երրորդ օրը։ Քանի՞ դետալ պատրաստեց բանվորը երեք օրում։

Լուծում։ Առաջին օրը բանվորը կատարեց ամբողջ առաջադրանքի 35%-ը, իսկ երկրորդ օրը՝ առաջին օրվա պատրաստած դետալների քանակի 60%-ը։ Գտնենք 35%-ի 60%-ը, այսինքն՝ 0,35-ի 0,6-ը.

$$0{,}6\cdot 0{,}35=0{,}21=21\%.$$

Առաջին երկու օրը բանվորը կատարել է ամբողջ առաջադրանքի $35\%+21\%=56\%$-ը։ Երրորդ օրը նա կատարել է ամբողջ առաջադրանքի $100\%-56\%=44\%$-ը։

Այժմ գտնենք, թե առաջադրանքը երրորդ օրը քանի՞ տոկոսով է ավելի կատարվել երկրորդ օրվա հետ համեմատած. $44\%-21\%=23\%$։

Բայց ըստ պայմանի բանվորը երրորդ օրը պատրաստել է 184 դետալ ավելի, քան երկրորդ օրը։ Հետևաբար, 184 դետալը կազմում է ամբողջ առաջադրանքի 23%-ը կամ 0,23-ը։ Վերջապես կարելի է պատասխանել խնդրի գլխավոր հարցին՝ որոշել ամբողջ առաջադրանքը.

$$184:0{,}23=800.$$

Այսպիսով, ամբողջ առաջադրանքը կազմում էր 800 դետալ։

Վարժություններ

76. Գտեք թիվը, եթե. ա) նրա 5%-ը կազմում է 11,3, բ) նրա 35%-ը կազմում է $1\frac{2}{3}$, գ) նրա 3,5%-ը կազմում է 0,45, դ) նրա 115%-ը կազմում է 69։

77. Գտեք թիվը, եթե. ա) նրա 7%-ը կազմում է 126, բ) նրա 32%-ը կազմում է $2\frac{5}{7}$, գ) նրա 7,3%-ը կազմում է 0,25, դ) նրա 135%-ը կազմում է 27։

78. Գտեք թիվը, եթե. ա) նրա 0,15%-ը կազմում է 0,0027, բ) նրա $\frac{2}{7}$%-ը կազմում է 630, գ) նրա 6,5%-ը կազմում է $8\frac{2}{3}$, դ) նրա 240%-ը կազմում է 17,5։

79. Գտեք թիվը, եթե. ա) նրա 0,83%-ը կազմում է 0,332, բ) նրա 205%-ը կազմում է 8,2, գ) նրա 9,1%-ը կազմում է $16\frac{6}{11}$, դ) նրա $\frac{7}{12}$%-ը կազմում է 490։

80. Երեք բանվորների տրված էր դետալներ պատրաստելու առաջադրանք։ Առաջին բանվորը կատարեց առաջադրանքի 32,5%-ը, երկրորդը՝ մնացածի 70%-ը, իսկ երրորդը՝ մնացած բոլորը։ Առաջին բանվորը 1225 դետալ ավելի պատրաստեց, քան երրորդը։ Քանի՞ դետալ պետք է պատրաստեին բոլոր բանվորները։

81. Տուրիստն առաջին օրը քայլարշավով անցավ ամբողջ ճանապարհի 35%-ը, երկրորդ օրը՝ առաջին օրվա անցածի 75%-ը, իսկ երրորդ օրը՝ մնացած ամբողջ ճանապարհը։ Որքա՞ն ճանապարհ կտրեց տուրիստը երեք օրում, եթե երրորդ օրը նա անցավ 10 կմ ավելի, քան երկրորդ օրը։

§ 16. ԵՐԿՈՒ ԹՎԵՐԻ ՏՈԿՈՍԱՅԻՆ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ԳՏՆԵԼԸ

Խնդիր: Մի քաղաքից մյուսը գնացքը գնում է 24 ժ-ում, իսկ ինքնաթիռը՝ 2 ժ-ում։ Պահանջվում է համեմատել գնացքի և ինքնաթիռի ընթացքի տևողությունները։

Խնդրի հարցը կարելի է ձևակերպել երկու եղանակով.

1) Գնացքի ընթացքի տևողությունը քանի՞ անգամ է մեծ ինքնաթիռի ընթացքի տևողությունից։

(Պատասխան. 12 անգամ։)

2) Գնացքի ընթացքի տևողության ո՞ր մասն է կազմում ինքնաթիռի ընթացքի տևողությունը։

(Պատասխան. $\frac{1}{12}$ մասը։)

24-ը 2-ի բաժանման 12 քանորդը կոչվում է նաև 24 թվի

հարաբերությունը 2 թվին, իսկ 2-ը 24-ի բաժանման $\frac{1}{12}$ քանորդը՝ 2-ի հարաբերությունը 24-ին։ Թվերի հարաբերությունը, արտահայտված տոկոսներով, կոչվում է այդ թվերի տոկոսային հարաբերություն.

$\frac{24}{2}=1200\%$, $\frac{1}{12}=\frac{100}{12}\%=8\frac{1}{3}\%$։

Այսպիսով, գնացքի ընթացքի տևողությունը կազմում է ինքնաթիռի ընթացքի տևողության 1200%-ը, կամ, որ նույնն է, ինքնաթիռի ընթացքի տևողությունը կազմում է գնացքի ընթացքի տևողության $8\frac{1}{3}\%$-ը։

Լուծենք երկու խնդիր։

Խնդիր 1: Ճանապարհաշինարարական բրիգադի համար հաստատվել է այսպիսի նորմա. օրական կառուցել 2,5 կմ ճանապարհ։ Առաջին օրը բրիգադը կառուցեց 2 կմ, իսկ երկրորդ օրը՝ 3 կմ ճանապարհ։ Գտնել նորմայի կատարման տոկոսը առաջին և երկրորդ օրը։

Խնդիրը լուծելու համար գտնենք 2-ի հարաբերությունը 2,5-ին և 3-ի հարաբերությունը 2,5-ին և դրանք արտահայտենք տոկոսներով.

$$\frac{2}{2,5}=\frac{20}{25}=0,8=80\%,\quad \frac{3}{2,5}=\frac{30}{25}=1,2=120\%.$$

Հետևաբար, առաջին օրը առաջադրանքը կատարվել է 80%-ով, իսկ երկրորդ օրը՝ 120%-ով։

Խնդիր 2: Առաջին բանվորի նորման է 850, բայց նա մշակեց 884 դետալ։ Երկրորդի նորման է 680, բայց նա մշակեց 714 դետալ։ Ո՞ր բանվորի աշխատանքի արտադրողականությունն է ավելի բարձր։

Նախ գտնենք յուրաքանչյուր բանվորի մշակած դետալների թվի և նորմայի տոկոսային հարաբերությունը, այսինքն՝ նորմայի կատարումը տոկոսներով, իսկ այնուհետև համեմատենք այդ մեծությունները։

Առաջին բանվորը նորման կատարեց

$$\frac{884}{850}=1,04=104\%\text{-ով},$$

իսկ երկրորդ բանվորը՝

$$\frac{714}{680}=1,05=105\%\text{-ով}։$$

Հետևաբար, երկրորդ բանվորի աշխատանքի արտադրողականությունը ավելի բարձր է, քան առաջին բանվորինը։

Վարժություններ

82. *Գտեք հետևյալ թվերի տոկոսային հարաբերությունը.*

28 և 40; $0,65$ և $\frac{3}{8}$; $4,5$ և $0,75$; $748,8$ և 960; 72 և 160;

$\frac{25}{162}$ և $\frac{10}{81}$; $1\frac{7}{20}$ և $0,9$։

83. *Գտեք հետևյալ թվերի տոկոսային հարաբերությունը.*

21 և 30; 240 և $187,2$; $0,75$ և $\frac{5}{8}$; 27 և $4\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{9}$ և $\frac{20}{27}$;

$14,4$ և 32; $8,1$ և $6,48$։

84. *Կիրառելով մետաղամշակման նոր ձևեր, խառատը մեկ հերթափոխում 40-ի փոխարեն մշակեց 54 դետալ։ Քանի՞ տոկոսով բարձրացավ աշխատանքի արտադրողականությունը։*

85. *Նոր մեթոդների ներդրման շնորհիվ մետաղի տաշեղային թափոնը 60 կգ-ից նվազեց մինչև 51 կգ։ Քանի՞ տոկոսով նվազեց մետաղի կորուստը։*

86. *Հոկեյի մրցամարտի ժամանակ առաջին թիմը խփել է 64 գոլ և բաց է թողել 61-ը, իսկ երկրորդ թիմը խփել է 70 գոլ և բաց է թողել 67-ը։ Ո՞ր թիմի խփած և բաց թողած գոլերի հարաբերությունն է ավելի լավ։*

87. *Հրաձգության մրցումների ժամանակ առաջին թիմը 135 հնարավորից հավաքել է 108 միավոր, իսկ երկրորդ թիմը՝ 120 միավորից 92 միավոր։ Այդ երկու թիմերից ո՞րն է ցույց տվել ավելի լավ արդյունք։*

§ 17. ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄ

Խնդիր 1: *Սարքի մոնտաժման համար օգտագործվեց 225 մ հաղորդալար։ Մոնտաժի նոր սխեմա ներդնելուց հետո այդ սարքի համար օգտագործվեց 198 մ հաղորդալար։ Քանի՞ տոկոսով նվազեց հաղորդալարի ծախսը։*

Լուծում։ Նախ և առաջ որոշենք, թե քանի մետրով է կրճատվել հաղորդալարի ծախսը.

$$225-198=27 \text{ (մ)}։$$

Այնուհետև որոշենք, թե 27 մ-ը 225 մ-ի քանի՞ տոկոսն է կազմում,

$$\frac{27}{225}=0,12=12\%։$$

Հետևաբար, մոնտաժի նոր սխեմայի ներդնումից հետո հաղորդալարի ծախսը նվազել է 12%-ով։

Այս խնդիրը կարելի է լուծել այլ եղանակով. նախ որոշել, թե 225 մ-ի որ տոկոսն է կազմում 198 մ-ը.

$$\frac{198}{225}=0,88=88\%,$$

այնուհետև պարզել, թե քանի տոկոսով են նվազել ծախսերը։ Քանի որ 225 մ-ը կազմում է 100%, իսկ 198 մ-ը՝ 88%, ապա կստանանք՝

$$100\%-88\%=12\%.$$

Խնդիրը լուծված է։

Խնդիր 2։ *Բանվորը քանի՞ տոկոսով է գերակատարել առաջադրանքը, եթե նա նորմալով նախատեսված 375-ի փոխարեն պատրաստել է 510 դետալ։*

Լուծում։ Նախ որոշենք, թե քանի՞ դետալով է գերակատարվել նորման.

$$510-375=135 \text{ (դետալ)}.$$

Այժմ պարզենք, թե 375 դետալի քանի՞ տոկոսն է կազմում 135 դետալը.

$$\frac{135}{375}=0,36=36\%.$$

Այսպիսով, նորման գերակատարվել է 36%-ով։

Բերենք լուծման մեկ այլ եղանակի հակիրճ գրառումը.

$$\frac{510}{375}=1,36=136\%,\ 136\%-100\%=36\%.$$

Խնդիր 3։ *Տուրիստը առաջին օրը անցավ երեք օրվա անցնելիք ճանապարհի 37,5%-ը, երկրորդ օրը՝ մնացածի 40%-ը, իսկ երրորդ օրը՝ 6,5 կմ-ով ավելի, քան երկրորդ օրը։ Որքա՞ն ճանապարհ անցավ տուրիստը երեք օրում,*

Լուծում։ Առաջին օրվանից հետո տուրիստին դեռ մնում էր անցնելու ամբողջ ճանապարհի $100\%-37,5\%=62,5\%$-ը։

Երկրորդ օրը նա անցավ ամբողջ ճանապարհի $62,5\% \cdot 0,4=$ $=25\%$-ը։ Երրորդ օրվան մնաց ամբողջ ճանապարհի $62,5\%-25\%=$ $=37,5\%$-ը։ Երրորդ օրը անցած ճանապարհը երկրորդ օրը անցածից ավելի է 6,5 կմ-ով, իսկ տոկոսներով արտահայտված՝ 12,5%-ով, քանի որ $37,5\%-25\%=12,5\%$.

Հետևաբար, ճանապարհի 6,5 կմ-ը կազմում է 12,5%, Այժմ կարելի է գտնել ամբողջ ճանապարհը.

$12{,}5\% = 0{,}125, \quad 6{,}5 : 0{,}125 = 52$ (կմ)։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. *Տուրիստը երեք օրում անցավ 52 կմ։*

Խ ն դ ի ր 4: *Օդանավակայանում ինքնաթիռի են սպասում 880 ուղևորներ, որոնց 35%-ը տղամարդիկ են։ Կանայք կազմում են կանանց և երեխաների ընդհանուր թվի 75%-ը։ Քանի՞ կին և քանի՞ երեխա կա օդանավակայանում։*

Լ ու ծ ու մ։

1-ին ե ղ ա ն ա կ։ Որոշենք, թե օդանավակայանում քանի տղամարդ կա. $35\% = 0{,}35$; $880 \cdot 0{,}35 = 308$ *(տղամարդ)։ Կանայք և երեխաները միասին կլինեն* $880 - 308 = 572$ *(հոգի)։ Քանի որ կանայք կազմում են այդ քանակության 75%-ը, ուստի օդանավակայանում կլինի.*

$75\% = 0{,}75$; $572 \cdot 0{,}75 = 429$ *(կին)։ Այժմ հաշվենք, թե օդանավակայանում քանի երեխա կա.*

$$572 - 429 = 143 \text{ (երեխա)}։$$

2-րդ ե ղ ա ն ա կ։ Որոշենք, թե ուղևորների քանակության որ տոկոսն են կազմում կանայք և երեխաները. $100\% - 35\% = 65\%$։ *Այժմ գտնենք, թե կանանց և երեխաների ընդհանուր թվի որ տոկոսն են կազմում կանայք, այսինքն, գտնենք 65%-ի 75%-ը.*

$0{,}75 \cdot 0{,}65 = 0{,}4875 = 48{,}75\%$։ *Ուրեմն երեխաները կազմում են.*

$$65\% - 48{,}75\% = 16{,}25\%\text{-ը}։$$

Մնում է հաշվել, թե քանի՞ կին և քանի՞ երեխա կար.

$$880 \cdot 0{,}4875 = 429 \text{ (կին)},$$

$$880 \cdot 0{,}1625 = 143 \text{ (երեխա)}։$$

Խ ն դ ի ր 5: *Տրված է երկու թիվ։ Դրանցից առաջինը կազմում է երկրորդի 27%-ը։ Գտնել այդ թվերը, եթե դրանց գումարը հավասար է 317,5-ի։*

Լ ու ծ ու մ։ Քանի որ առաջին թիվը համեմատվում է երկրորդի հետ, ուստի պետք է ընդունել, որ երկրորդ թիվն ինքը կազմում է 100%։ *Հետևաբար, առաջին և երկրորդ թվերը միասին կազմում են 127%, իսկ դրանց գումարը հավասար է 317,5-ի։ Ուստի 317,5-ն էլ հենց երկրորդ թվի 127%-ն է։ Գտնենք երկրորդ թիվը.*

$$127\% = 1{,}27, \quad 317{,}5 : 1{,}27 = 250։$$

Այժմ գտնենք առաջին թիվը։ Դա կարելի է անել երկու եղանակով։

1-ին եղանակ։ $317{,}5-250=67{,}5$։

2-րդ եղանակ։ $27\%=0{,}27$, $250\cdot0{,}27=67{,}5$։

Պատասխան. առաջին թիվը հավասար է 67,5-ի, իսկ երկրորդը՝ 250-ի։

Խնդիր 6: Մեքենաների մի հավաքակայանում կա 250 մեքենա, որոնց 24%-ը կազմում են ինքնաթափերը, իսկ երկրորդ հավաքակայանում կա 150 մեքենա, որոնց 8%-ն են ինքնաթափերը։ Երկու հավաքակայանների մեքենաների ընդհանուր թվի ո՞ր տոկոսն են կազմում ինքնաթափերը։

Լուծում։ Նախ և առաջ որոշենք, թե քանի ինքնաթափ կա առաջին հավաքակայանում. $24\%=0{,}24$; $250\cdot0{,}24=60$։ Այնուհետև որոշենք երկրորդ հավաքակայանի ինքնաթափերի քանակը. $8\%=0{,}08$; $150\cdot0{,}08=12$։ Հաշվենք երկու հավաքակայանների մեքենաների ընդհանուր թիվը.

$250+150=400$, որոնցից $60+12=72$-ը ինքնաթափ են։

Այժմ կարելի է հաշվել, թե բոլոր մեքենաների թվի ո՞ր տոկոսն են կազմում ինքնաթափերը.

$$72:400=0{,}18=18\%$$

Պատասխան. 18%։

Վարժություններ

88. Տակառից դատարկեցին բենզինի 60%-ը, այնուհետև դատարկեցին մնացածի 25%-ը։ Բենզինի սկզբնական քանակության ո՞ր տոկոսը մնաց տակառում։

89. Գարու 22,5 կգ զանգվածից ստացվում է 9 կգ հատիկ։ Ամբողջ զանգվածի ո՞ր տոկոսն է կազմում հատիկը։

90. Գտնել երկու թվերը, եթե դրանցից առաջինը կազմում է երկրորդի 12,5%-ը և դրանց տարբերությունը հավասար է 217-ի։

91. Գտնել երկու թվերը, եթե դրանց տարբերությունը հավասար է 10,5-ի և առաջին թիվը կազմում է երկրորդի 135%-ը։

92. Ձեռնարկությունում աշխատում է 8316 մարդ, ընդ որում տղամարդկանց թիվը կազմում է կանանց թվի 65%-ը։ Տղամարդիկ քանիսո՞վ են քիչ կանանցից։

93. Ժողովին մասնակցում էին 40 պատանի և 50 աղջիկ։ Պատանիները քանի՞ տոկոսով են քիչ աղջիկներից։ Աղջիկները քանի՞ տոկոսով են շատ պատանիներից։

94. 525 սմ երկարությամբ ձողը կտրեցին երկու մասի այնպես, որ առաջին մասը 25%-ով կարճ ստացվեց երկրորդից։ Գտեք յուրաքանչյուր մասի երկարությունը։

95. 436 մ երկարությամբ ձողը սղոցեցին երկու մասի այնպես, որ առաջին մասը 18%-ով երկար ստացվեց երկրորդից։ Գտեք յուրաքանչյուր մասի երկարությունը։

96. Ռելսից կտրեցին այն մասը, որը կազմում է նրա երկարության 68%-ը։ Մնացած մասի զանգվածը հավասար է 79,2 կգ-ի։ Որոշեցեք կտրված մասի զանգվածը։

97. Գրավոր աշխատանքի ժամանակ դասարանի աշակերտների 8%-ը բոլորովին չի լուծել խնդիրը, 28%-ը լուծել է փոքր սխալներով, իսկ մնացած 16 հոգին լուծել են ճիշտ։ Քանի՞ աշակերտ կար դասարանում։

Ինքնուրույն աշխատանք № 2

1. Խնդիր: Զբոսայգում տնկելու համար բերեցին սոճու, եղևնու, կեչու և ակացիայի տնկիներ։ Սոճին կազմում է բոլոր տնկիների 75%-ը, իսկ կեչին՝ մնացածի 36%-ը։ Որքա՞ն եղևնու տնկի բերեցին, եթե ակացիաները 800 հատ են և կազմում են բոլոր տնկիների 6,4%-ը։

2. Գտեք 135-ի 120%-ը, 74-ի 35%-ը։

3. Գտեք թիվը, եթե. ա) նրա 12%-ը հավասար է 90-ի, բ) նրա 175%-ը հավասար է 70-ի։

4. Գտեք հետևյալ թվերի տոկոսային հարաբերությունը. 24 և 32, 270 և 80։

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Անվանեցեք թվաբանական չորս գործողություններից յուրաքանչյուրի բաղադրիչներն ու արդյունքները։

2. Ինչպե՞ս հաշվել գումարման կամ հանման անհայտ բաղադրիչը։ Բերեք օրինակներ։

3. Ինչպե՞ս հաշվել բազմապատկման կամ բաժանման անհայտ բաղադրիչը։ Բերեք օրինակներ։

4. Ինչպիսի՞ թիվն է կոչվում պարզ և ինչպիսի՞ն՝ բաղադրյալ։ Բերեք օրինակներ։ 1-ը համարվու՞մ է արդյոք պարզ կամ բաղադրյալ թիվ։

5. Ի՞նչն է կոչվում թվի բաժանարար, մի քանի թվերի ընդհանուր բաժանարար, ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար։ Ինչպե՞ս պետք է գտնել մի քանի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

6. Ի՞նչն է կոչվում թվի բազմապատիկ, մի քանի թվերի ընդհանուր բազմապատիկ, ամենափոքր բազմապատիկ։ Ինչպե՞ս պետք է գտնել մի քանի թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։

7. Կազմեցեք երկու թվային հավասարություն (մեկը՝ ճիշտ, մեկը՝ սխալ), և երկու թվային անհավասարություն (մեկը՝ ճիշտ, մեկը՝ սխալ)։

8. Մտածեք երկու այնպիսի ճշմարիտ և երկու կեղծ ասույթներ, որոնց բովանդակությունը վերցված լինի թվաբանությունից կամ երկրաչափությունից, աշխարհագրությունից կամ պատմությունից, բուսական (ֆլորա) կամ կենդանական աշխարհից (ֆաունա)։

9. Բերեք փոփոխականով առաջադրության երկու օրինակ։ Յուրաքանչյուր օրինակի համար մտածեք փոփոխականի երկու այնպիսի արժեքներ, որոնց դեպքում այդ առաջադրությունը վերածվի ճշմարիտ ասույթի, և երկու այնպիսի արժեքներ, որոնց դեպքում այն վերածվի կեղծ ասույթի։

10. Ի՞նչն է կոչվում մեկ փոփոխականով հավասարման արմատ (կամ լուծում)։ Ի՞նչն է կոչվում մեկ փոփոխականով անհավասարության լուծում։

11. Ինչպիսի՞ բազմությունն է կոչվում երկու բազմությունների միավորում։ Ինչպե՞ս է այն նշանակվում։ Բերեք երկու բազմության օրինակ և կազմեցեք դրանց միավորումը։

12. Ինչպիսի՞ բազմությունն է կոչվում երկու բազմությունների հատում։ Ինչպե՞ս է այն նշանակվում։ Բերեք երկու բազմության օրինակ և կազմեցեք դրանց հատումը։

13. Ի՞նչն է կոչվում տրված բազմության ենթաբազմություն։ Բերեք որևէ բազմության օրինակ և նրա տարրերից կազմեցեք երկու ենթաբազմություն։ Քանի՞ ենթաբազմություն ունի մեկ տարրից բաղկացած բազմությունը։

14. Կարո՞ղ է արդյոք տրված երկու բազմությունների միավորումը կամ հատումը հավասար լինել դրանցից մեկին։ Բերեք օրինակ։

15. Բացատրեցեք հետևյալ հավասարությունները (A-ն որևէ բազմություն է, ∅-ն դատարկ բազմություն է).

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cup A = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap A = A։$$

16. Ասացեք մի քանի բնական թիվ և մի քանի կոտորակային թիվ։ Զրոն համարվո՞ւմ է արդյոք բնական կամ կոտորակային թիվ։

17. Ձևակերպեցեք կոտորակի հիմնական հատկությունները։ Ի՞նչ է նշանակում կրճատել կոտորակը։ Ինչպիսի՞ սովորական կոտորակն է կոչվում անկրճատելի։ Կրճատելի՞ է արդյոք $\frac{3}{1}$ կոտորակը։

18. Ո՞ր դեպքում է թվի և կոտորակի արտադրյալը փոքր այդ թվից, ո՞ր դեպքում է մեծ և ո՞ր դեպքում՝ հավասար։

19. Ո՞ր դեպքում է թիվը կոտորակի բաժանելիս քանորդը փոքր

ստացվում բաժանելիից, ո՞ր դեպքում՝ մեծ և ո՞ր դեպքում՝ հավասար։

20. Ինչպիսի՞ սովորական անկրճատելի կոտորակն է վերածվում վերջավոր տասնորդական կոտորակի և ինչպիսի՞ն չի կարող վերածվել վերջավոր տասնորդական կոտորակի։ Բերեք օրինակներ։

21. Բացատրեցեք թվի տոկոս գտնելու վերաբերյալ խնդրի լուծումը։ Բերեք օրինակներ, երբ տոկոսային թիվը փոքր է 100-ից և երբ տոկոսային թիվը մեծ է 100-ից։

22. Ինչպե՞ս է լուծվում թիվն ըստ իր տոկոսի գտնելու խնդիրը։ Բերեք օրինակներ, երբ տոկոսային թիվը փոքր է 100-ից և երբ տոկոսային թիվը մեծ է 100-ից։

§ 18. ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ԹՎԵՐԸ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Գոյություն ունեն անվերջ բազմությամբ բնական թվեր, որոնք (զրոյի հետ միասին) օգտագործվում են անհրաժեշտ առարկաների համրանքի ժամանակ։ Գոյություն ունեն նաև անվերջ բազմությամբ կոտորակային թվեր, առանց որոնց հնարավոր չէ գլուխ բերել երկարությունների, մակերեսների, ծավալների, անկյունների չափումը, ժամանակի որոշումը, միջին արժեքների հաշվումը և, ընդհանրապես, թվի բաժանումը հավասար մասերի։ Եվ համենայն դեպս բոլոր այդ թվերը բավական չեն. շատ խնդիրների լուծումը հնարավոր է դարձել միայն այն բանից հետո, երբ մտցվել են նոր՝ բացասական թվերը:

Բացասական թվերը գրվում են թվանշանների և դրանց առջև գրված մինուս նշանի օգնությամբ։ Օրինակ, -6, $-3{,}2$, $-\frac{3}{7}$ գրառումները կարդացվում են այսպես. մինուս 6, մինուս 3,2, մինուս $\frac{3}{7}$։

Ավելի վաղ ուսումնասիրված բնական և կոտորակային թվերը կանվանենք դրական թվեր: Դրական թվերի առջև երբեմն գրվում է պլյուս նշան։ Օրինակ, $+5$, $+\frac{7}{8}$ գրառումները կարդացվում են այսպես. պլյուս 5, պլյուս $\frac{7}{8}$։

Դրական և բացասական թվերով բնութագրվում են փոխադարձաբար հակադիր հասկացություններ, օրինակ, եկամուտ-ծախս, վերելք-վայրէջք, տաքություն-ցրտություն։ Ուղղագիծ շարժման դեպքում որպես դրական ուղղություն համարվում է շարժումը դեպի աջ, առաջ, վերև, իսկ որպես բացասական՝ դեպի ձախ, ետ, ներքև։ Պտտական շարժման դեպքում որպես բացասական ուղղություն համարվում է ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությունը, իսկ որպես դրական՝ սլաքի շարժման հակառակ ուղղությունը։

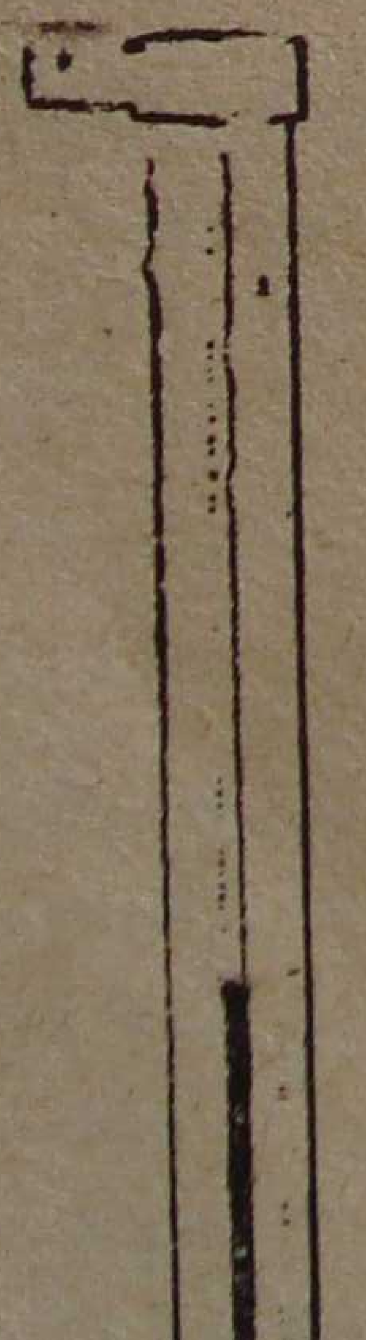
Օրինակներ:

1) Պայմանավորվել են ջերմաչափի սանդղակի բացասական բաժանումներ համարել 0°-ից ներքև գտնվողները, իսկ դրական՝ 0°-ից վերև գտնվողները։ Դիցուք սնդիկի վերին մակարդակը համընկնում է զրոյից ներքև 18° նշագծի հետ (Նկ. 9)։ Այդ դեպքում ջերմաչափը ցույց է տալիս —18° (մինուս 18°) կամ 18° ցրտություն։ Եթե սնդիկի մակարդակը հասել է զրոյից վերև 6° նշագծին, ապա ջերմաչափը ցույց է տալիս +6° (պլյուս 6°) կամ 6° տաքություն։ Իրեն՝ սանդղակի վրա + և — նշաններ չկան։

2) Մետաղե ձողն ունի 200 մմ երկարություն։ Դիցուք սառելու դեպքում նրա երկարությունը փոքրացել է 0,4 մմ-ով, իսկ տաքանալու դեպքում՝ մեծացել է 0,5 մմ-ով։ Մենք կասենք, որ ձողի երկարության փոփոխությունը առաջին դեպքում կազմում է —0,4 մմ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ 0,5 մմ։

3) 10-րդ նկարում պատկերված է երկաթուղու M և N կայարանների միջև գտնվող հատվածը։ Պայմանավորվենք M-ից N շարժման ուղղությունը համարել դրական և, հետևաբար, N-ից M ուղղությունը՝ բացասական։ Գնացքը կանգնած էր M և N կայարանների միջև և M-ից 300 կմ հեռավորության վրա գտնվող C կայարանում։ Այնուհետև գնացքը գնաց C-ից 50 կմ հեռավորության վրա գտնվող կայարանը։ M կայարանից ի՞նչ հեռավորության վրա է գտնվում գնացքը։ Այս հարցին պատասխանելու համար պետք է քննարկել երկու դեպք։

Եթե գնացքը C կայարանից շարժվել է դրական ուղղությամբ, ապա հեռավորության փոփոխությունը կազմում է +50 կմ, և գնացքը գտնվում է D_1 կետում, իսկ եթե շարժվել է բացասական ուղղությամբ, ապա հեռավորության փոփոխությունը կազմում է —50 կմ, և գնացքը գտնվում է D կետում։ Գնացքի հեռավորությունը M կայարանից հավասար է համապատասխանաբար 350 կմ կամ 250 կմ (Նկ. 10)։



Նկ. 11

Վարժություններ

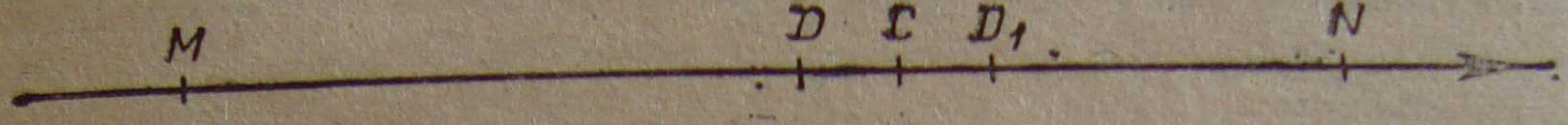
98. Ինչպես կարելի է գրել բենզինի քանակության փոփոխությունը, եթե.

ա) նրան ավելացվի 20 լ, 55 լ, 70 լ։

բ) նրանից վերցվի 15 լ, 36 լ, 42 լ։

99. Ներքևից վերև ուղղությունը համարելով դրական, գրեցեք ամբարձիչի դիրքի փոփոխությունը, եթե նա 12 մ նշակետից.

ա) իջել է 3 մ, 5 մ, 7 մ,



Նկ. 10

բ) բարձրացել է 1 մ, 4 մ, 6 մ։

100. Պայմանավորվենք ճանապարհի A վայրից B վայրը ուղղությունը համարել դրական։ Ավտոմեքենան գտնվում է միջանկյալ M վայրում։ Գրեցեք M վայրից մեքենայի հեռավորության փոփոխությունները, եթե նա տեղափոխվել է.

ա) դեպի A-ն՝ 12 կմ, 17 կմ,

բ) դեպի B-ն՝ 14 կմ, 23 կմ։

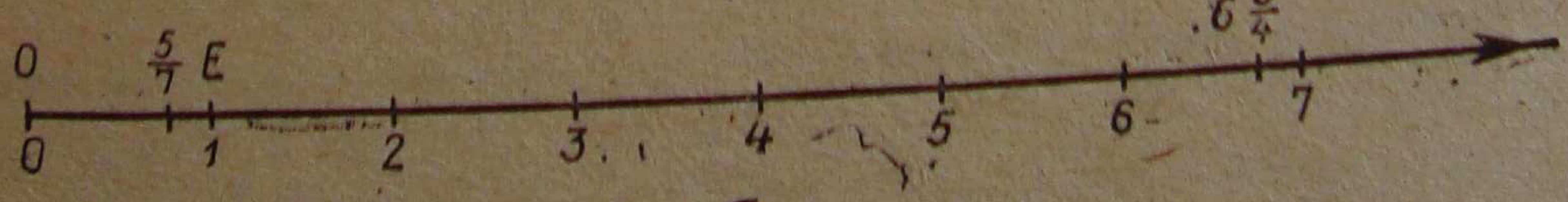
101. Հաշվեցեք Կասպից ծովի (Կասպից լճի) և Բայկալ լճի խորությունը օվկիանոսի մակարդակի նկատմամբ, այսինքն, գտեք օվկիանոսի մակարդակի և այդ լճերի ամենախոր տեղի հեռավորությունը։ Տվյալները վերցրեք հետևյալ աղյուսակից.

	Կասպից ծով	Բայկալ լիճ
Ջրի մակերևույթի բարձրությունը մ-երով (օվկիանոսի մակարդակից)	—28	455
Ամենամեծ խորությունը (մետրերով)	1025	1620

§ 19. ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՈՒՂԻՂ

Դրական թվերը և զրոն կարելի է պատկերել O սկզբնակետով որևէ Ox ճառագայթի կետերի տեսքով (Նկ. 11)։ Ճառագայթի վրա նշենք OE հատվածը և նրա երկարությունը ընդունենք 1-ի հավասար. OE ճառագայթը միավոր ճառագայթ է, կամ մասշտաբի միավոր՝ $|OE| = 1$։

Կոորդինատային ճառագայթը դա այն ճառագայթն է, որի վրա նշված է նույն սկզբնակետով միավոր հատված։



Նկ. 11

Օրինակ: *Կոորդինատային ճառագայթի վրա պատկերել* $4;\ \frac{5}{7};\ 6\frac{3}{4};$ *0 թվերը։*

Ճառագայթի վրա O սկզբնակետից նշենք չորս միավոր երկարությամբ հատված. ստացված հատվածի ծայրը պատկերում է 4 թիվը։

OE միավոր հատվածը բաժանենք 7 հավասար մասի և O կետից նշենք մի հատված, որը հավասար լինի հինգ այդպիսի մասի. հատվածի ծայրը պատկերում է $\frac{5}{7}$ *թիվը։*

Ճառագայթի վրա O սկզբնակետից նշենք OE միավոր հատվածի վեցապատիկ երկարությունն ունեցող հատված և ստացված հատվածի ծայրից նշենք ևս մի հատված, որի երկարությունը կազմում է OE հատվածի երկարության $\frac{3}{4}$*-ը։ Երկրորդ հատվածի ծայրը պատկերում է* $6\frac{3}{4}$ *թիվը։*

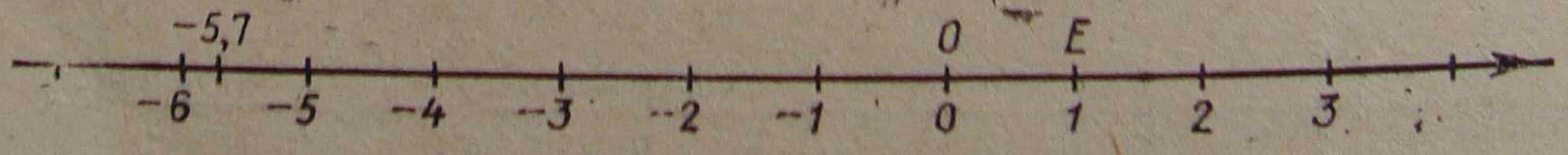
Զրո թվի պատկերը ճառագայթի O սկզբնակետն է։

Այսպիսով, յուրաքանչյուր բնական կամ կոտորակային թիվ կարելի է կոորդինատային ճառագայթի վրա պատկերել որևէ կետով։

Ուղիղ գծի վրա, որը հարմարության համար պատկերենք հորիզոնական դիրքով (Նկ. 12), վերցնենք կամայական O կետ և այն անվանենք սկզբնակետ կամ հաշվման սկիզբ։ Ուղղի վրա ձախից աջ ուղղությունը անվանենք դրական, իսկ հակադիր ուղղությունը (աջից ձախ)՝ բացասական։ O կետից դրական ուղղությամբ (այսինքն O կետից աջ) նշենք OE հատվածը և նրա երկարությունը ընդունենք 1-ի հավասար. դա միավոր հատվածն է, այսինքն՝ մասշտաբի միավորը՝ $|OE|=1$։

Կոորդինատային ուղիղը *դա այն ուղիղն է, որի վրա նշված է ուղղություն, ընտրված է հաշվման սկիզբ և միավոր հատված։*

O կետը կոորդինատային ուղիղը բաժանում է երկու բաց ճառագայթների՝ OE դրական ճառագայթի և բացասական ճառագայթի։ Դրական թվերը կպատկերենք դրական ճառագայթի կետերով, իսկ բացասական թվերը՝ բացասական ճառագայթի կետերով։ Զրո թիվը պատկերվում է կոորդինատային ուղղի O սկզբնակետով։



Նկ. 12

Օրինակ: *Կոորդինատային ուղղի վրա պատկերել —2; 3; —5,7 թվերը։ O կետից ձախ նշենք երկու միավոր երկարությամբ հատված. հատվածի ծայրը պատկերում է —2 թիվը։ Մյուս թվերի պատկերները տրված են 12-րդ նկարում։*

Վարժություններ

102. *Կոորդինատային ուղղի վրա նշել այն կետերը, որոնք համապատասխանում են հետևյալ թվերին.*

ա) 6; 3,5; —7; —2; —5,5; 4; 2; 5,5,

բ) 8; —3; 3; 2,5; —9; 4,5; 7; —6; —1։

103. *Ո՞ր թվերն են պատկերվում կոորդինատային ուղղի այն կետերով, որոնք գտնվում են հաշվման սկզբից.*

ա) 8 միավոր աջ, 6,7 միավոր ձախ, 1,2 միավոր ձախ, 3,2 միավոր աջ,

բ) 1,3 միավոր ձախ, 7,2 միավոր աջ, 3,6 միավոր աջ, 6 միավոր ձախ։

104. *Կոորդինատային ուղղի վրա ընտրեցեք այսպիսի մասշտաբ՝ 1 սմ-ը 2000 մ։ Դրա վրա նշեցեք երկրի մակերևույթի ամենաբարձր կետը և համաշխարհային օվկիանոսի ամենախոր կետը։ Հաշվեցեք ստացված կետերի հեռավորությունը։*

Ցուցում։ Ամենամեծ բարձրությունը ունի Ջոմոլունգմա լեռը (Ասիա)՝ ծովի մակարդակից 8848 մ։ Ամենամեծ խորությունը հայտնաբերվել է Խաղաղ օվկիանոսում. այն հավասար է 11022 մ-ի։

105. *Դիցուք կոորդինատային ուղղի սկիզբը համընկնում է Ցելսիուսի ջերմաստիճանային սանդղակի զրոյի հետ։ Ընտրեցեք այսպիսի մասշտաբ՝ 1 սմ-ը 10°C։ Ուղղի վրա նշեցեք Երկրի վրա գրանցված օդի ամենաբարձր և ամենացածր ջերմաստիճանները։ Գտեք ստացված կետերի հեռավորությունը, այսինքն՝ օդի ջերմաստիճանի մինչև այժմ հայտնի ամենամեծ տատանումը։*

Ցուցում։ Ամենաբարձր ջերմաստիճանը՝ +58°C, նկատվել է Հյուսիսային Աֆրիկայում։ Ամենացածր ջերմաստիճանը՝ —88,3°C, գրանցվել է Անտարկտիդայում 1960 թվին սովետական «Վոստոկ» կայանում։

106. *Հայտնի է, որ մարմինները կարող են գտնվել պինդ, հեղուկ և գազային վիճակներում։ Պինդ վիճակից հեղուկ վիճակին անցնելը կոչվում է հալում, հեղուկից պինդին անցնելը՝ պնդացում, իսկ հեղուկից գազայինին անցնելը՝ եռում։ Հալման ջերմաստիճանը համընկնում է պնդացման ջերմաստիճանին։*

Կոորդինատային ուղղի վրա ընտրեցեք այսպիսի մասշտաբ՝ 1 սմ-ը 100°C։ Նշեցեք աղյուսակում բերված նյութերի հալման և պնդացման կետերը։

107. Կոորդինատային ուղղի վրա նշեցեք աղյուսակում բերված նյութերի եռման կետերը (մասշտաբ՝ 1 սմ-ը 200°C)։

№	Նյութը	Հալման կամ պնդացման ջերմաստիճանը	Եռման ջերմաստիճանը նորմալ մթնոլորտային ճնշման դեպքում
1	Ջրածին	—259°	—253°
2	Թթվածին	—219°	—183°
3	Սպիրտ	—117°	78°
4	Ջուր (սառույց)	0°	100°
5	Սնդիկ	—39°	357°
6	Կապար	327°	1750°
7	Պղինձ	1083°	2580°
8	Երկաթ	1535°	3050°

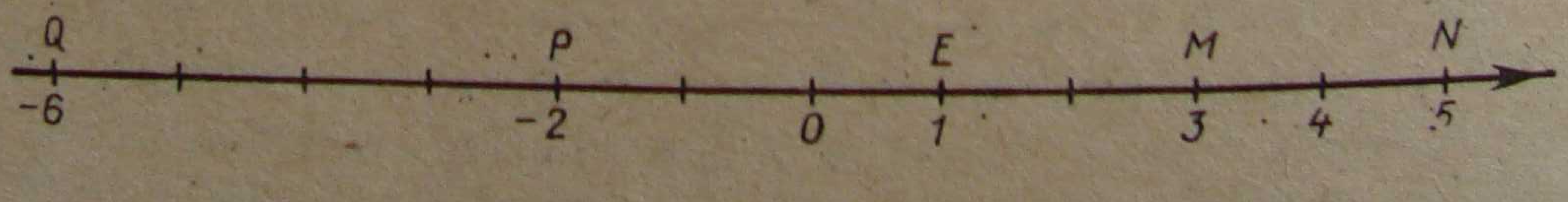
§ 20. ԹՎԵՐԻ ԲԱՂԴԱՏՈՒՄԸ։ ԹՎԻ ՄՈԴՈՒԼ

Բաղդատենք երկու թվեր և համադրենք կոորդինատային ուղղի վրա դրանց պատկերները (Նկ. 12)։ 2 թիվը փոքր է 3-ից. 2 թվի պատկերը գտնվում է 3 թվի պատկերից ձախ։

Պայմանավորվենք երկու թվերից փոքր համարել այն, որի պատկերը կոորդինատային ուղղի վրա գտնվում է ավելի ձախ, քան մյուս թվի պատկերը։ *Այսպես, —5,7 թիվը կհամարենք —2 թվից փոքր և $-5,7 < -2$ անհավասարությունն էլ՝ ճիշտ (Նկ. 12)։ Բացասական թիվը փոքր է զրոյից, դրական թիվը մեծ է զրոյից, ցանկացած բացասական թիվ փոքր է ցանկացած դրական թվից։ Ուստի ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները (Նկ. 13)։*

$$5 > 3, \ -6 < -2, \ -6 < 0, \ 4 > 0, \ -2 < 1։$$

Թվի մոդուլ կոչվում է այն հատվածի երկարությունը, որը կոորդինատային ուղղի սկզբնակետը միացնում է այդ թիվը պատկերող կետի հետ։



Նկ. 13

Զրոյի մոդուլը հավասար է զրոյի։ Զրոյից տարբեր ցանկացած թվի մոդուլը դրական թիվ է, քանի որ հատվածի երկարությունը չի կարող բացասական լինել։ Թվի մոդուլը նշանակվում է երկու ուղղաձիգ գծիկներով։

Օրինակ. $|0|=0$, $|4|=4$, $|-6|=6$, $|-2{,}3|=2{,}3$։

Երկու դրական թվերից մեծ է այն, որի մոդուլը ավելի մեծ է։ Երկու բացասական թվերից մեծ է այն, որի մոդուլը փոքր է։ Պետք է հստակ պատկերացնել թվերի բաղդատման և դրանց մոդուլների բաղդատման տարբերությունը։ Բերենք օրինակներ։

$19 > 13$ և $|19| > |13|$, $\qquad -2 < 7$ և $|-2| < |7|$,

$-5 < -1$, բայց $|-5| > |-1|$, $3 > -9$, բայց $|3| < |-9|$։

Երկու թվեր կոչվում են **հակադիր**, եթե նրանք պատկերվում են սկզբնակետից հավասարահեռ և նրա տարբեր կողմերում գտնվող կետերով։ Այդպիսին են, օրինակ, -7 և 7, 8 և -8 թվերը։

Հակադիր թվերն ունեն միևնույն մոդուլները։

Վարժություններ

108. Գրեցեք տրված թվերին հակադիր թվերը.

ա) 14,3; —19,2; —0,75; 23,01; 12,5; —23,8,

բ) 2,3; —7,8; —19; 8,3; —162; —7,1։

109. Կոորդինատային ուղղի վրա կետերով պատկերեցեք այն թվերը, որոնց մոդուլները հավասար են.

ա) 4; 5; 0,8; 3,2; 2,5,

բ) 7,2; 8; 2,3; 0,5; 4։

110. Ինչի՞ են հավասար հետևյալ թվերի մոդուլները.

ա) —32,2; 100; 6,35; —0,73; —9,21,

բ) 70,1; —162; —61,3; —0,12; 37,5։

Հետևյալ թվերի միջև դրեք $<$ կամ $>$ նշանն այնպես, որ ստացվի ճիշտ անհավասարություն.

111. 76 և —21; —13 և —29; 16 և —105; —7,3 և —7,9։

112. $|-7{,}3|$ և $|-7{,}9|$, $|101|$ և $|-123|$, $|-13|$ և $|-29|$։

113. Հետևյալ թվերը գրեցեք աճման կարգով.

ա) —6,3; —5,9; —106; 17,3; —6,1; 17,4; —107; 23,

բ) —2,8; —3,4; —2,5; —205; 8,6; —206; 19։

§ 21. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

Բոլոր բնական թվերի N բազմության, բնականներին հակադիր բոլոր թվերի բազմության և մեկ տարրից՝ զրոյից բաղկացած բազմության միավորումը կոչվում է ամբողջ թվերի բազմություն և նշանակվում Z տառով.

$$Z=\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\},$$

1, 2, 3, ... թվերը բնական են, կամ ամբողջ դրական, իսկ դրանց հակադիր —1, —2, —3, ... թվերը՝ ամբողջ բացասական։

Z բազմության և բոլոր դրական և բացասական կոտորակային թվերի բազմության միավորումը կոչվում է ռացիոնալ թվերի բազմություն և նշանակվում է Q տառով։

Ռացիոնալ թվերի օրինակներ. $2; -6; \frac{7}{3}; -4,5; 0; -\frac{2}{5}; 12$։

Մենք արդեն կարողանում ենք բաղդատել ռացիոնալ թվերը։ Այժմ սովորենք թվաբանական գործողություններ կատարել դրանց հետ։

Դիցուք a-ն և b-ն փոփոխականներ են, որոնց արժեքները կարող են լինել ցանկացած ռացիոնալ թվեր։ $a+b$ արտահայտությունը կոչվում է գումար, իսկ a և b փոփոխականները՝ գումարելիներ։

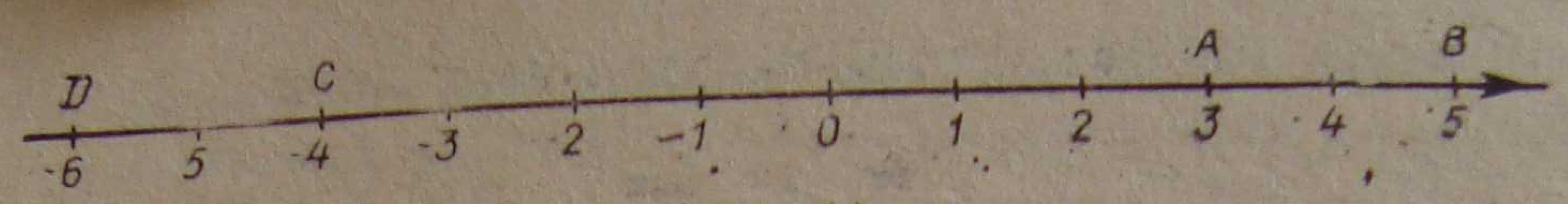
Մանրամասն դիտարկենք ռացիոնալ թվերի գումարման գործողությունը։

Գծենք կոորդինատային ուղիղ և մտովի պատկերացնենք, որ փոքրիկ գնդիկը կարող է այդ գծի երկարությամբ գլորվել աջ և ձախ՝ սկսած հաշվման սկզբնակետից։ Եթե գնդիկը անցել է որոշ հեռավորություն, օրինակ՝ 5 սմ, և շարժվել է դեպի աջ, ապա պայմանավորվենք ասել, որ ճանապարհի աճը դրական է և հավասար +5 սմ-ի, իսկ եթե շարժվել է դեպի ձախ, ապա ճանապարհի աճը բացասական է և հավասար —5 սմ-ի։

Դիցուք գնդիկը կատարում է երկու հաջորդական տեղափոխություններ, որոնք բնութագրվում են ճանապարհի երկու աճերով։ Այդ երկու տեղափոխությունները փոխարինենք մեկ վերջնական տեղափոխությամբ և պարզենք, թե ճանապարհի ինչպիսի աճով պետք է բնութագրել գնդիկի վերջնական տեղափոխությունը։

1-ին դեպք։ Գնդիկի երկու տեղափոխություններն էլ կատարվում են նույն ուղղությամբ։

ա) Երկու տեղափոխություններն էլ կատարվում են դեպի աջ, այսինքն՝ երկու աճերն էլ դրական են։ Դիցուք գնդիկը տեղափոխվում է O կետից 3 սմ դեպի աջ գտնվող A կետը և այնտեղից էլ 2 սմ դեպի աջ գտնվող B կետը (նկ. 14)։ Դա նշանակում է, որ աճերը հավասար են +3 սմ-ի և +2 սմ-ի։ Բայց գնդիկը B կետում կարող է գտնվել



Նկ. 14

5 սմ դեպի աջ կատարվող մեկ տեղափոխությամբ։ Այս վերջնական տեղափոխությանը համապատասխանում է ճանապարհի $+5$ սմ աճ, այսինքն՝ $(+3)+(+2)=5$ կամ, ավելի կարճ՝ $3+2=5$։

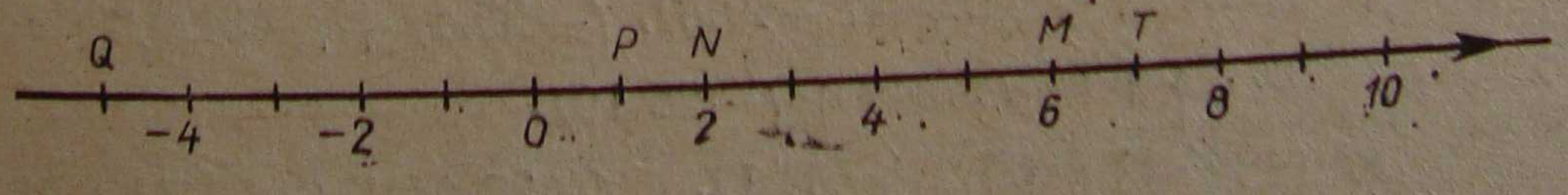
բ) Երկու տեղափոխություններն էլ կատարվում են դեպի ձախ, այսինքն՝ երկու աճերն էլ բացասական են։ Դիցուք գնդիկը տեղափոխվում է O կետից 4 սմ դեպի ձախ գտնվող C կետը, իսկ այնտեղից էլ 2 սմ դեպի ձախ գտնվող D կետը (Նկ. 14)։ Դա նշանակում է, որ տեղափոխությունները հավասար են -4 սմ-ի և -2 սմ-ի։ Բայց գնդիկը D կետում կարող է հայտնվել 6 սմ դեպի ձախ կատարվող մեկ տեղափոխությամբ։ Այս վերջին տեղափոխությանը համապատասխանում է ճանապարհի -6 սմ աճ, այսինքն՝ $|-4|+|-2|=-6$։

Կանոն 1. Միևնույն նշաններով երկու ռացիոնալ թվեր գումարելու համար պետք է գումարել այդ թվերի մոդուլները և մոդուլների գումարի առջև դնել գումարելիների նշանը:

2-րդ դեպք։ Գնդիկի տեղափոխությունները կատարվում են հակադիր ուղղություններով։

ա) Ճանապարհի դրական աճի մոդուլը մեծ է բացասական աճի մոդուլից։ Դիցուք գնդիկը տեղափոխվել է O կետից 6 սմ դեպի աջ գտնվող M կետը և M կետից 4 սմ դեպի ձախ գտնվող N կետը (Նկ. 15)։ Այդ դեպքում տեղափոխությունները հավասար են $+6$ սմ-ի և -4 սմ-ի։ Բայց գնդիկը N կետում կարող է հայտնվել 2 սմ դեպի աջ կատարվող մեկ տեղափոխությամբ։ Այս վերջնական տեղափոխությանը համապատասխանում է $+2$ սմ աճ, այսինքն՝ $|+6|+|-4|=+2$։

բ) Ճանապարհի դրական աճի մոդուլը փոքր է բացասական աճի մոդուլից։ Դիցուք գնդիկը տեղափոխվել է O կետից 1 սմ դեպի աջ գտնվող P կետը և P կետից 6 սմ դեպի ձախ գտնվող Q կետը (Նկ. 15)։ Այդ դեպքում աճերը հավասար են $+1$ սմ-ի և -6 սմ-ի։ Բայց գնդիկը Q կետում կարող է գտնվել 5 սմ դեպի ձախ կատարվող մեկ տեղափոխությամբ։ Այդ վերջնական տեղափոխությանը համապատասխանում է -5 սմ աճ, այսինքն, $|+1|+|-6|=-5$։



Նկ. 15

դ) Աճերի մոդուլները հավասար են (աճերն ունեն տարբեր նշաններ)։ Դիցուք գնդիկը տեղափոխվել է O կետից 7 սմ դեպի աջ գըտնըվող T կետը և T կետից 7 սմ դեպի ձախ գտնվող O կետը (Նկ. 15)։ Աճերը հավասար են +7 սմ-ի և —7 սմ-ի։ Գնդիկը վերադարձավ իր շարժման սկզբնակետը, այնպես որ ճանապարհի աճը հավասար է զըրոյի, այսինքն՝ $|+7|+|-7|=0$։

Կանոն 2. Տարբեր նշաններով և անհավասար մոդուլներով երկու ռացիոնալ թվեր գումարելու համար պետք է մեծ մոդուլից հանել փոքր մոդուլը և մոդուլների տարբերության առջև դնել այն գումարելիի նշանը, որի մոդուլն ավելի մեծ է։

Կանոն 3. Երկու հակադիր թվերի *(այսինքն՝ տարբեր նշաններով և հավասար մոդուլներով թվերի)* գումարը հավասար է զրոյի։

Վարժություններ

114. *Օրվա առաջին կեսին օդի ջերմաստիճանը փոխվել է* m^0*-ով, իսկ երկրորդ կեսին՝* n^0*-ով։ Մեկ օրում քանի՞ աստիճանով է փոխվել օդի ջերմաստիճանը, եթե.*

ա) $m=+8^0$, $n=3^0$, *դ)* $m=-4^0$, $n=-6^0$,

բ) $m=+9^0$, $n=-3^0$, *ե)* $m=+6^0$, $n=-6^0$։

գ) $m=+5^0$, $n=-9^0$,

115. *Աշխատանքային օրվա առաջին կեսին պահեստում դետալների թիվը փոխվել է* x *հատով, իսկ երկրորդ կեսին՝* y *հատով։ Պահեստում դետալների թիվը քանի՞ հատով է փոխվել մեկ աշխատանքային օրում, եթե.*

ա) $x=+85$, $y=+64$, *դ)* $x=-35$, $y=-47$,

բ) $x=+62$, $y=-58$, *ե)* $x=+29$, $y=-29$։

գ) $x=-96$, $y=+32$,

Հաշվեցեք.

116. *ա)* $32+(-48)$, $(-43)+12$, $26+(-17)$, $(-32)+45$,

բ) $25+(-39)$, $(-47)+23$, $42+(-32)$, $(-27)+34$։

117. *ա)* $(-23{,}2)+34{,}9+(-40{,}5)$, $(-25{,}4)+(-31{,}9)+63{,}2$,

$37{,}23+(-76{,}51)+(-25{,}19)$,

բ) $(-34{,}1)+65{,}2+(54{,}1)$, $(-32{,}4)+(-24{,}7)+72{,}3$,

$53{,}73+(-62{,}09)+(-42{,}16)$։

§ 22. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ՀԱՆՈՒՄԸ

Եթե a*-ն և* b*-ն երկու թվային փոփոխականներ են, ապա* a — b *արտահայտությունը կոչվում է տարբերություն, իսկ* a *և* b *փոփոխականները համապատասխանաբար՝ նվազելի և հանելի։*

Երկու ռացիոնալ թվերի տարբերություն կոչվում է այն թիվը, որը հանելիին գումարելիս ստացվում է նվազելին։

Տարբերությունը նշանակելով d *տառով, կարող ենք գրել.*

$$a - b = d, \text{ եթե } d + b = a։$$

Օրինակներով ցույց տանք, որ a *և* b **թվերի տարբերությունը հավասար է նվազելիի և հանելիին հակադիր թվի գումարին.**

$$a - b = a + (-b)։$$

1) Դիցուք $a = 3$, $b = 8$։ *Հաշվենք* $3 - 8$ *տարբերությունը։* *Կազմենք 3 նվազելիի և հանելիին հակադիր* -8 *թվի գումարը՝* $3 + |-8|$։ *Ըստ ռացիոնալ թվերի գումարման կանոնի, այդ գումարը հավասար է* -5*-ի։ Համոզվենք, որ դա հենց որոնելի տարբերությունն է։ Իրոք,* $|-5| + 8 = 3$։ *Այսպիսով,* $3 - 8 = -5$։

2) Դիցուք $a = 3$, $b = -8$։ *Հաշվենք* $3 - |-8|$ *տարբերությունը։* *3 նվազելիին ավելացնենք 8, կստանանք 11։ Դա էլ հենց որոնելի տարբերությունն է, քանի որ* $11 + |-8| = 3$։ *Այսպիսով,* $3 - |-8| = 11$։

3) $a = -3$, $b = 8$։ *Ունենք.* $(-3) - 8 = (-3) + (-8) = -11$։

Ստուգում։ $(-11) + 8 = -3$։

4) $a = -3$; $b = -8$։ *Ունենք.* $(-3) - (-8) = (-3) + (+8) = -3 + 8 = 5$։

Ստուգում։ $5 + |-8| = -3$։

Վարժություններ

118. *Գտեք* $a + b$ *գումարի արժեքը և լրացրեք աղյուսակը.*

a	12,3	−7,8	−2,9	12,3	5,7
b	6,5	10	−1,6	−6,5	−14,2
a + b					

119. *Հաշվեցեք* $a - b$ *տարբերության արժեքը և լրացրեք աղյուսակը.*

a	2,8	6,3	−2,4	3,6	−9,7
b	1,5	−9,4	−7,3	−1,2	4,6
a − b					

Կատարեցեք նշված գործողությունները.

120. *ա)* $4 + (-2) + (-6)$, *բ)* $-6 + 8 + (-2) - (-11)$։

121. *ա)* $\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) + \left(-2\frac{7}{12}\right)$, *բ)* $-0{,}3 - 2 - (0{,}75 - 0{,}9)$։

122. *ա)* $-6 + \left(-1{,}5 + 2\frac{2}{3}\right) - (-3{,}9)$,

բ) $-\frac{5}{7} + \frac{2}{3} + (-1{,}5) + \left(-1\frac{5}{14}\right)$։

123. *ա)* $2{,}15 + (-8{,}515) - (1{,}78 - 9{,}235)$,

բ) $5{,}6 - (-2{,}355) + (6{,}215 - 17{,}57)$։

Լուծեցեք հավասարումը.

124. *ա)* $83{,}5 + x = 23{,}8$, *գ)* $93{,}1 - x = 178{,}4$,

բ) $x - 86{,}5 = 20{,}7$, *դ)* $17{,}2 - x = -62{,}1$։

125. *ա)* $x + 52{,}5 = -13{,}9$, *գ)* $x - 18{,}3 = -79{,}2$,

բ) $31{,}8 - x = 7{,}23$, *դ)* $63{,}4 + x = 64{,}3$։

§ 23. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

Եթե a*-ն և* b*-ն երկու թվային փոփոխականներ են, ապա* ab *արտահայտությունը կոչվում է արտադրյալ, իսկ* a *և* b *փոփոխականները՝ արտադրիչներ։*

Խնդիր։ *Առավոտյան ժամը 8-ից մինչև ցերեկվա ժամը 4-ը օդի* T *ջերմաստիճանը ժամը մեկ փոխվում էր* $h^{\circ}C$*-ով։ Ցերեկվա ժամը 12-ին* $1^{\circ}C$ *էր։ Որքա՞ն կլինի ջերմաչափի ցուցմունքը ժամանակի այն պահին, որը կեսօրից տարբերվում է* t *ժ-ով։*

Դիտարկենք խնդրի լուծման չորս դեպք, ընդունելով $|h| = \frac{1}{2}$, $|t| = 4$։

1) Ջերմաստիճանը ժամը մեկ բարձրանում էր $\frac{1^\circ}{2}$C-ով, և պետք է որոշել ջերմաստիճանը կեսօրից 4 ժ հետո, այսինքն՝ $h=\frac{1}{2}$, $t=4$։

4 ժ-ում ջերմաստիճանը բարձրացել է 2^0C-ով, և ցերեկվա ժամը 4-ին ջերմաչափը ցույց է տալիս $T=1+\frac{1}{2}\cdot 4=3^0$C։

2) Ջերմաստիճանը ժամը մեկ բարձրանում է $\frac{1^\circ}{2}$C-ով, և պետք է որոշել, թե որքան է եղել ջերմաստիճանը կեսօրից 4 ժ առաջ, այսինքն, $h=\frac{1}{2}$, $t=-4$։

Կեսօրից 4 ժ առաջ ջերմաստիճանը կեսօրվա համեմատ ցածր է եղել 2°C-ով, ուստի առավոտվա ժամը 8-ին ջերմաչափը ցույց էր տալիս $T=1-\frac{1}{2}\cdot 4=-1^0$C։ Եթե պայմանավորվենք համարել, որ $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-4)=-2$, ապա խնդրի լուծումը կարելի է գրել նաև այսպես.

$$T=1+\frac{1}{2}\cdot(-4)=1-2=-1^\circ C։$$

3) Ջերմաստիճանը ժամը մեկ իջնում էր $\frac{1^\circ}{2}$C-ով, և պետք է որոշել ջերմաստիճանը կեսօրից 4 ժ հետո, այսինքն, $h=-\frac{1}{2}$, $t=4$։

4 ժ-ում ջերմաստիճանը իջել է 2°C-ով, և ցերեկվա ժամը 4-ին ջերմաչափը ցույց էր տալիս $T=1-\frac{1}{2}\cdot 4=1-2=-1^0$C։ Եթե պայմանավորվենք համարել, որ $\left|-\frac{1}{2}\right|\cdot 4=-2$, ապա խնդրի լուծումը կարելի է գրել այս տեսքով. $T=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4=1-2=-1^0$C։

4) Ջերմաստիճանը ժամը մեկ իջնում էր $\frac{1^\circ}{2}$C-ով, և պետք է որոշել, թե որքան էր ջերմաստիճանը կեսօրից 4 ժ առաջ, այսինքն, $h=-\frac{1}{2}$, $t=-4$։

Կեսօրից 4 ժ առաջ ջերմաստիճանը կեսօրվա համեմատ բարձր է եղել 2°C-ով, ուստի առավոտյա ժամը 8-ին ջերմաչափը ցույց էր տալիս $T = 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 1 + 2 = 3°C$։ *Եթե պայմանավորվենք համարել, որ* $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-4) = 2$, *ապա խնդրի լուծումը կարելի է գրել այսպես.* $T = 1 + \left(-\frac{1}{2} \cdot (-4)\right) = 1 + 2 = 3°C$։

Պայմանավորվենք համարել, որ ht *արտադրյալը հավասար է* $|h|$ *և* $|t|$ *մոդուլների արտադրյալին, վերցրած մինուս նշանով, եթե* h *և* t *արտադրիչներն ունեն հակադիր նշաններ, և վերցրած պլյուս նշանով, եթե* h *և* t *արտադրիչներն ունեն միևնույն նշանները։ Այդ պայմանի դեպքում խնդրի լուծումը հնարավոր է գրել բոլոր չորս դեպքերն ընդգրկող մեկ բանաձևով՝* $T = 1 + ht$։

Այս խնդրի լուծումը մեզ հուշում է ռացիոնալ թվերի բազմապատկման հետևյալ երկու կանոններն ընդունելու նպատակահարմարությունը։

1. Տարբեր նշաններ ունեցող երկու թվերի արտադրյալը հավասար է այդ թվերի մոդուլների արտադրյալին, վերցրած մինուս նշանով:

2. Նույն նշանն ունեցող երկու թվերի արտադրյալը հավասար է այդ թվերի մոդուլների արտադրյալին:

Օրինակներ: $(-5) \cdot 3 = -15$, $4 \cdot (-2) = -8$, $(-6) \cdot (-3) = 18$։

Մի քանի արտադրիչների արտադրյալի նշանը հեշտությամբ որոշվում է բացասական արտադրիչների թվով. եթե այն զույգ է, ապա արտադրյալը դրական է, իսկ եթե կենտ է, ապա արտադրյալը բացասական է։

Օրինակներ: $2 \cdot (-4) \cdot (3) \cdot (-2) \cdot (5) = 240$,

$$2 \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-5) = -240։$$

Անցնենք ռացիոնալ թիվը բնական ցուցիչով աստիճան բարձրացնելու գործողության ուսումնասիրությանը։

Եթե a*-ն և* n*-ը երկու թվային փոփոխականներ են, ընդ որում* a*-ն ռացիոնալ թիվ է, իսկ* n*-ը՝ բնական* ($a \in Q$, $n \in N$), *ապա* a^n *արտահայտությունը կոչվում է* **աստիճան**, a *փոփոխականը՝* **աստիճանի հիմք**, *իսկ* n *փոփոխականը՝* **աստիճանի ցուցիչ, աստիճանացույց** *(տես § 8)։*

Դրական թիվը աստիճան բարձրացնելիս ստացվում է դրական թիվ։ Օրինակ, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$։

Քննարկենք բացասական թիվը աստիճան բարձրացնելու օրինակներ.

$$(-2)^5=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-32,$$

$$(-2)^4=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=16։$$

Այսպիսով, եթե աստիճանի հիմքը բացասական թիվ է, ապա զույգ ցուցիչով աստիճանը դրական թիվ է, իսկ կենտ ցուցիչով աստիճանը՝ բացասական։

Վարժություններ

Առանց հաշվումներ կատարելու որոշեցեք թվային արտահայտության նշանը.

126. ա) $(-2,3)\cdot 6,2\cdot 5,1\cdot(-2,4)\cdot(-3,1)$,

բ) $(-4,1)\cdot(-6,1)\cdot 2,1\cdot(-8,3)\cdot(-6,5)$։

127. $(-5)^7$, $(-4,3)^8$, $4,7^{11}$, $(-6,3)^{20}$, $(-1)^5$, $3,6^4$, $(-1)^{28}$, $(-0,3)^9$։

Հաշվեցեք.

128. ա) $23\cdot(-15)$, բ) $(-12,3)\cdot(-6,7)$, գ) $(-2,9)\cdot(0,27)$,

դ) $(-0,03)\cdot 18$, ե) $3,2\cdot(-1,7)$։

129. ա) $(-4,4)\cdot(-0,37)$, բ) $(-2,5)\cdot 202$, գ) $3,6\cdot(-230)$,

դ) $(-0,012)\cdot(-93)$, ե) $(-0,81)\cdot 2,6$։

130. ա) $\left(-\frac{8}{27}\right)\cdot 0,03\cdot\frac{3}{4}$, բ) $\left(-\frac{14}{15}\right)\cdot\left(-\frac{9}{11}\right)\cdot 4\frac{5}{7}$,

131. ա) $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)\cdot(-0,9)$, բ) $\left(-\frac{16}{25}\right)\cdot\left(-8\frac{1}{8}\right)\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)$։

132. $(-1,5)^2$, $(-1)^{23}$, $(-8)^3$, $(6,3)^2$, $\left(7\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(-2\frac{1}{3}\right)^3$, $(-1)^{20}$, $\left(-1\frac{1}{2}\right)^4$,

133. $(2,3)^2$, $(-1,6)^3$, $(-1)^{47}$, $(-10)^3$, $(-1)^{32}$, $(-5)^4$, $\left(-5\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(-3\frac{2}{3}\right)^2$,

§ 24. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

Եթե a-ն և b-ն թվային փոփոխականներ են, ապա $\frac{a}{b}$ արտա-

ճայտությունը կոչվում է քանորդ, իսկ a և b փոփոխականները՝ համապատասխանաբար բաժանելի և բաժանարար։

a թիվը զրոյից տարբեր b թվի վրա բաժանման քանորդ կոչվում է այն q թիվը, որ c բաժանարարով բազմապատկելիս ստացվում է a բաժանելին.

$$\frac{a}{b}=q, \text{ եթե } q \cdot b=a,\ b \neq 0\text{։}$$

Երկու ռացիոնալ թվեր կոչվում են փոխճակադարձ, եթե դրանց արտադրյալը հավասար է 1-ի (տես § 12)։ Այդպիսին են, օրինակ, $\frac{2}{5}$ *և* $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{7}$ *և* $-\frac{7}{3}$, -6 *և* $-\frac{1}{6}$ *թվերը։*

Օրինակներով ցույց տանք, որ a և b երկու ռացիոնալ թվերի քանորդը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարին հակադարձ թվի արտադրյալին. $\frac{a}{b}=a \cdot \frac{1}{b}$։

1) Դիցուք $a=28$, $b=-\frac{4}{5}$*։ Հաշվենք* $28:\left(-\frac{4}{5}\right)$ *քանորդը։*

Կազմենք 28 բաժանելիի և բաժանարարին հակադարձ $-\frac{5}{4}$ *թվի արտադրյալը՝* $28\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)$*։ Ըստ ռացիոնալ թվերի բազմապատկման կանոնի, արտադրյալը հավասար է −35-ի։ Ստուգենք, որ դա հենց որոնելի քանորդն է։ Իրոք* $|-35|\cdot\left|-\frac{4}{5}\right|=28$*։ Այսպիսով,* $28:\left(-\frac{4}{5}\right)=-35$։

2) Դիցուք $a=-28$, $b=\frac{4}{5}$*։ Հաշվենք* $(-28):\frac{4}{5}$ *քանորդը։*

-28 *բաժանելին բազմապատկենք* $\frac{5}{4}$*-ով, կստանանք* -35*։ Դա էլ հենց որոնելի քանորդն է, որովհետև* $(-35)\cdot\frac{4}{5}=-28$*։ Այսպիսով,* $(-28):\frac{4}{5}=-35$։

3) Դիցուք $a=-28$, $b=-\frac{4}{5}$*։ Ունենք.* $(-28):\left(-\frac{4}{5}\right)=(-28)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=35$*։ Ստուգենք.* $35\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-28$։

Կանոն 1. Տարբեր նշաններով երկու թվերի քանորդը հավասար է այդ թվերի մոդուլների քանորդին, վերցրած մինուս նշանով,

Կանոն 2. Միևնույն նշաններով երկու թվերի քանորդը հավասար է այդ թվերի մոդուլների քանորդին:

Վարժություններ

Կատարեցեք գործողությունները.

134. *ա)* $57{,}5 : (-0{,}5)$, *գ)* $(-1{,}8) : 0{,}32$,

բ) $(-49{,}59) : (-17{,}4)$, *դ)* $(-33{,}88) : (-0{,}121)$,

135. *ա)* $(-13{,}2) : 0{,}24$, *գ)* $(-367{,}2) : (-10{,}2)$,

բ) $5{,}508 : (-61{,}2)$, *դ)* $(-17{,}5) : (-0{,}7)$,

136. *ա)* $(-24{,}8) : (-3{,}1)$, *գ)* $\left(-15\frac{1}{8}\right) : 2\frac{1}{5}$,

բ) $0 : \left(-2\frac{2}{7}\right)$, *դ)* $\left(-6\frac{1}{4}\right) : 6\frac{2}{3}$,

137. *ա)* $61\frac{1}{2} : \left(-10\frac{1}{4}\right)$, *գ)* $0 : \left(-10\frac{1}{3}\right)$,

բ) $\left(-23\frac{1}{3}\right) : \left(-2\frac{4}{7}\right)$, *դ)* $7\frac{1}{11} : \left(-19\frac{1}{2}\right)$,

Գտեք բազմապատկման կամ բաժանման անհայտ բաղադրիչը (լուծեցեք հավասարումը).

138. *ա)* $(-2{,}6) : x = -1\frac{11}{15}$, *գ)* $8\frac{6}{7} \cdot x = -3\frac{3}{14}$,

բ) $x : \left(-\frac{96}{101}\right) = -2\frac{5}{48}$, *դ)* $\left(-11\frac{1}{3}\right) \cdot x = 4{,}25$,

139. *ա)* $\left(-2\frac{1}{4}\right) \cdot x = 1\frac{7}{12}$, *գ)* $x : \left(-4\frac{1}{9}\right) = -14{,}5$,

բ) $(-15{,}78) : x = 2{,}4$, *դ)* $5\frac{1}{3} \cdot x = -25{,}6$,

Հաշվեցեք.

140. *ա)* $(-0{,}2) \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}25 \cdot (-0{,}1) \cdot 4$,

բ) $0{,}25 \cdot (-0{,}3) \cdot 80 \cdot 0{,}1 \cdot (-1{,}2)$,

141. ա) $((-2{,}5):(-0{,}75)):\left(3{,}25\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)\right)$,

բ) $\left((-1{,}2):1\frac{1}{9}\right):((-5{,}5):(-3))$։

142. Լրացրեք աղյուսակը.

a	5,6	−76	−0,02	6,4
b	0,5	0,25	−12,5	−0,05
ab				
$\frac{a}{b}$				

Լուծեցեք հավասարումը (գտեք նրա արմատների բազմությունը).

143. ա) $(2x+3{,}2)\cdot 0{,}5=\frac{3}{5}$, բ) $\left(4\frac{1}{3}-3x\right):1\frac{2}{9}=6$։

144. ա) $5x+\left(\frac{3}{4}-3{,}45\right)=2{,}3$, բ) $\left(\frac{1}{3}-2{,}4\right)-6x=1{,}6$։

145. ա) $\frac{2}{3}x-\left(7\frac{1}{5}-9{,}4\right)=2{,}2$, բ) $\left(2\frac{3}{4}-6{,}35\right)+\frac{4}{9}x=3{,}6$։

146. ա) $\frac{101}{200}x:(3{,}012+2{,}038)=-0{,}4$, բ) $(4{,}21-6{,}36)\cdot\frac{3}{2}\cdot x=2\frac{3}{20}$։

§ 25. ՀԱՏՎԱԾԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 19-ում մենք մտցրինք կոորդինատային ուղղի հասկացությունը և ցույց տվեցինք, թե ինչպես պետք է ցանկացած ռացիոնալ թիվ պատկերել այդ ուղղի կետի միջոցով (տես նկ. 12 և 13)։

Եթե կոորդինատային ուղղի վրա A կետը a թվի պատկերն է, ապա a թիվը կոչվում է A կետի կոորդինատ։

13-րդ նկարում, օրինակ, P կետը պատկերում է −2 թիվը, իսկ N կետը՝ 5 թիվը։ −2 թիվը P կետի կոորդինատն է, իսկ 5 թիվը՝ N կետի կոորդինատը։ Պայմանավորվել են կետի կոորդինատները գրել կլոր փակագծերում, կետը նշանակող տառից աջ, օրինակ, P(−2), N(5)։

141. *ա)* $((-2{,}5):(-0{,}75)):\left(3{,}25\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)\right)$,

բ) $\left((-1{,}2):1\frac{1}{9}\right):((-5{,}5):(-3))$,

142. *Լրացրեք աղյուսակը.*

a	5,6	−76	−0,02	6,4
b	0,5	0,25	−12,5	−0,05
ab				
$\frac{a}{b}$				

Լուծեցեք հավասարումը (գտեք նրա արմատների բազմությունը).

143. *ա)* $(2x+3{,}2)\cdot 0{,}5=\frac{3}{5}$, *բ)* $\left(4\frac{1}{3}-3x\right):1\frac{2}{9}=6$։

144. *ա)* $5x+\left(\frac{3}{4}-3{,}45\right)=2{,}3$, *բ)* $\left(\frac{1}{3}-2{,}4\right)-6x=1{,}6$։

145. *ա)* $\frac{2}{3}x-\left(7\frac{1}{5}-9{,}4\right)=2{,}2$, *բ)* $\left(2\frac{3}{4}-6{,}35\right)+\frac{4}{9}x=3{,}6$։

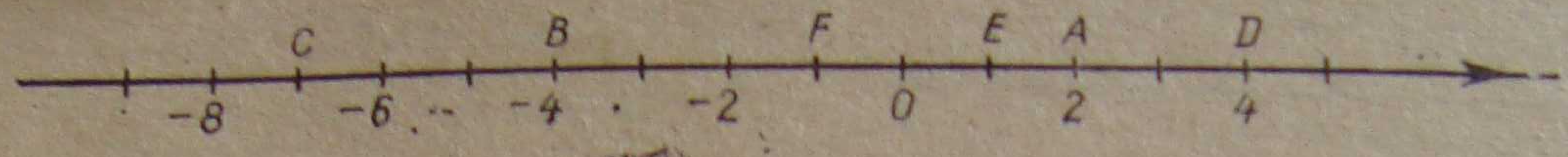
146. *ա)* $\frac{101}{200}x:(3{,}012+2{,}038)=-0{,}4$, *բ)* $(4{,}21-6{,}36)\cdot\frac{3}{2}\cdot x=$
$=2\frac{3}{20}$։

§ 25. ՀԱՏՎԱԾԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 19-ում մենք մտցրինք կոորդինատային ուղղի հասկացությունը և ցույց տվեցինք, թե ինչպես պետք է ցանկացած ռացիոնալ թիվ պատկերել այդ ուղղի կետի տեսքով (տես նկ. 12 և 13)։

Եթե կոորդինատային ուղղի վրա A *կետը* a *թվի պատկերն է, ապա* a *թիվը կոչվում է* A *կետի* **կոորդինատ**:

13-րդ նկարում, օրինակ, P *կետը պատկերում է −2 թիվը, իսկ* N *կետը՝ 5 թիվը։ −2 թիվը* P *կետի կոորդինատն է, իսկ 5 թիվը՝* N *կետի կոորդինատը։ Պայմանավորվել են կետի կոորդինատները գրել կլոր փակագծերում, կետը նշանակող տառից աջ, օրինակ,* P(−2), N(5)։



Նկ. 16

Որպես օրինակ, կոորդինատային ուղղի վրա կառուցենք A, B, C, D, F կետերը, որոնց կոորդինատները հավասար են համապատասխանաբար 2, —4, —7, 4, —1, այսինքն՝ կառուցենք A(2), B(—4), C(—7), D(4), F(—1) կետերը։ Կառուցումը տրված է 16-րդ նկարում։

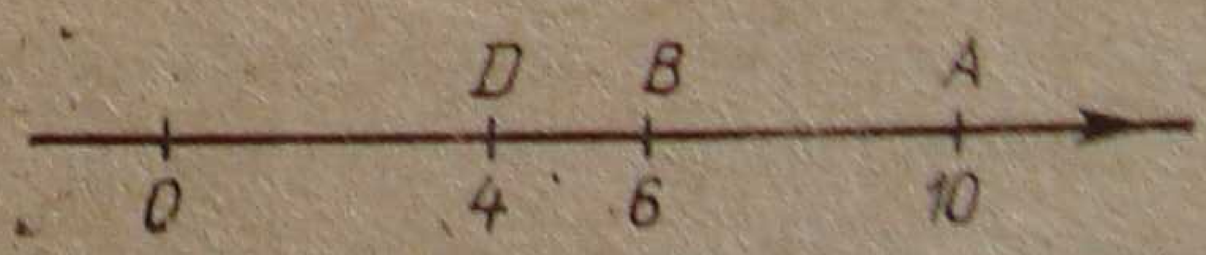
Դիցուք x թիվը M կետի կոորդինատն է։ Եթե M կետը պատկանում է դրական ճառագայթին, ապա x կոորդինատը դրական թիվ է, որը հավասար է M կետի հեռավորությանը կոորդինատների սկզբնակետից՝ x = |OM|։ Իսկ եթե M կետը պատկանում է բացասական ճառագայթին, ապա x կոորդինատը բացասական թիվ է. այն հավասար է կոորդինատների սկզբնակետից M կետի հեռավորությանը, վերցրած մինուս նշանով՝ x = —|OM|։ O սկզբնակետի կոորդինատը հավասար է զրոյի։

Դիցուք կոորդինատային ուղղի վրա տրված են a և b կոորդինատներով A և B կետերը։ Պահանջվում է հաշվել այդ կետերը միացնող AB հատվածի d երկարությունը՝ d = |AB|։ Երկարությունն արտահայտվում է կոորդինատային ուղղի միավոր հատվածներով։

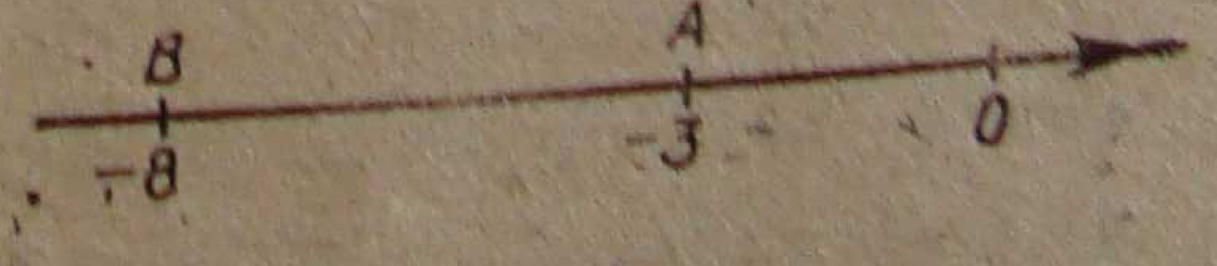
Դիտարկենք երեք հնարավոր դեպքերը, որից հետո անենք եզրակացություն։

1-ին դեպք։ Երկու A և B կետերն էլ պատկանում են դրական ճառագայթին, այնպես որ երկու կոորդինատներն էլ դրական թվեր են։ Դիցուք a = 10, b = 6 (Նկ. 17)։ Պարզ է, որ d = 10 — 6 = 4։ Եթե 6-ից հանենք 10, ապա կստացվի բացասական թիվ՝ 6 — 10 = —4, բայց այդ տարբերության մոդուլը նույնպես ճիշտ պատասխան է. d = |6 — 10| = |—4| = 4։

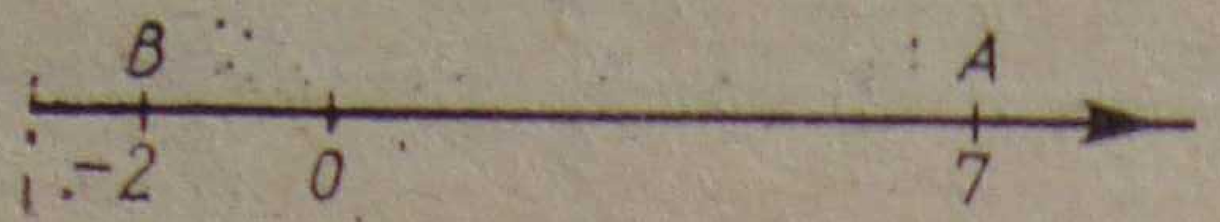
2-րդ դեպք։ Երկու A և B կետերն էլ պատկանում են բացասական ճառագայթին, այնպես որ երկու կոորդինատներն էլ բացասական թվեր են։ Դիցուք a = —3, b = —8 (Նկ. 18)։ Մեծ կոորդինատից |—3| հանելով փոքրը |—8|, կստանանք՝ d = (—3) — (—8) = —3 + 8 = 5։ Եթե փոքր կոորդինատից հանենք մեծը, իսկ այնուհետև վերցնենք տար-



Նկ. 17



Նկ. 18



Նկ. 19

բերության մոդուլը, ապա կստացվի նույն պատասխանը. $d=|(-8)-(-3)|=|-8+3|=|-5|=5$։

3-րդ դեպք։ A և B կետերը գտնվում են կոորդինատների սկզբնակետի տարբեր կողմերում, այնպես որ դրանց կոորդինատներն ունեն հակադիր նշաններ։ Դիցուք $a=7$, $b=-2$ (նկ. 19)։ Մեծ կոորդինատից հանելով փոքրը, կստանանք՝ $d=7-(-2)=7+2=9$։ Եթե բացասական կոորդինատից հանենք դրականը և այնուհետև վերցնենք տարբերության մոդուլը, ապա դարձյալ կստանանք ճիշտ լուծումը. $d=|-2-7|=|-9|=9$։

Այսպիսով, բոլոր երեք դեպքերում խնդրի լուծման ընթացքը նույնն է։ Կազմվում է տրված կետերի կոորդինատների տարբերությունը։ Եթե մեծ կոորդինատից հանվում է փոքրը, ապա տարբերությունը դրական թիվ է. այդ տարբերության մոդուլը հավասար է իրեն՝ տարբերությանը, որը և որոշում է հատվածի որոնելի երկարությունը։ Իսկ եթե փոքր կոորդինատից է հանվում մեծը, ապա որոնելի երկարությունը ստանալու համար անհրաժեշտ է վերցնել տարբերության մոդուլը, քանի որ հատվածի երկարությունը չի կարող բացասական լինել։

Կոորդինատային ուղղի վրա գտնվող հատվածի երկարությունը հավասար է հատվածի ծայրակետերի կոորդինատների տարբերության մոդուլին.

$$d=|a-b|=|b-a|։$$

Խնդիր 1։ *Տրված են A(a) կետը և նրա d հեռավորությունը B(x) կետից։ Հաշվել B կետի կոորդինատը և պատկերել կոորդինատային ուղղի վրա։*

1) $a=3$, $d=8$,

3) $a=-5$, $d=7$։

Որոնելի B կետը կարող է գտնվել A կետի ինչպես աջ, այնպես էլ ձախ կողմում։ Ուստի խնդիրն ունի երկու լուծում։

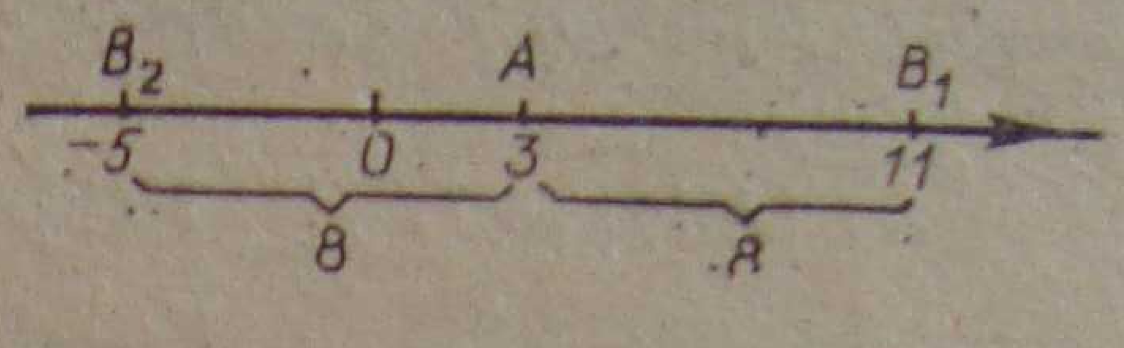
1) $a=3$, $d=8$ (նկ. 20)։ Եթե $x>3$, ապա $x-3=8$, $x_1=11$։ Եթե $x<3$, ապա $3-x=8$, $x_2=3-8=-5$

Պատասխան. $B_1(11)$, $B_2(-5)$։

2) $a=-5$, $d=7$ (նկ. 21)։ Եթե $x>-5$, ապա $x-(-5)=x+5=7$, $x_1=2$։ Եթե $x<-5$, ապա $-5-x=7$, $x_2=-5-7=-12$։

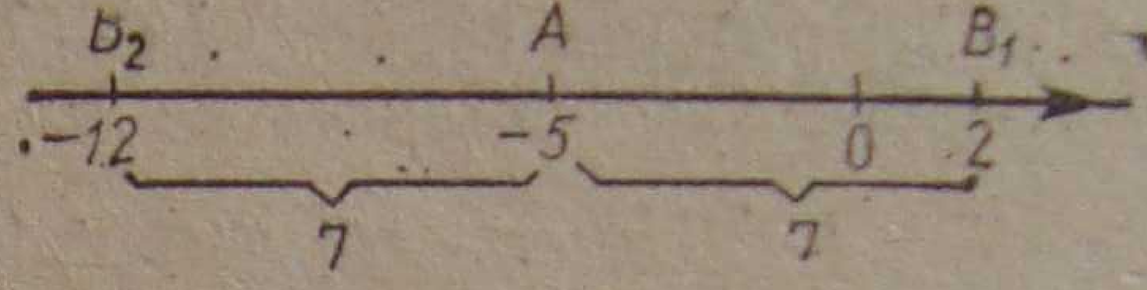
Պատասխան. $B_1(2)$, $B_2(-12)$։

M և N երկու կետերը սիմետրիկ են MN ուղղին պատկանող A կետի նկատմամբ, եթե նրանք հավասարահեռ են A կետից և գտնվում են նրա տարբեր կողմերում։



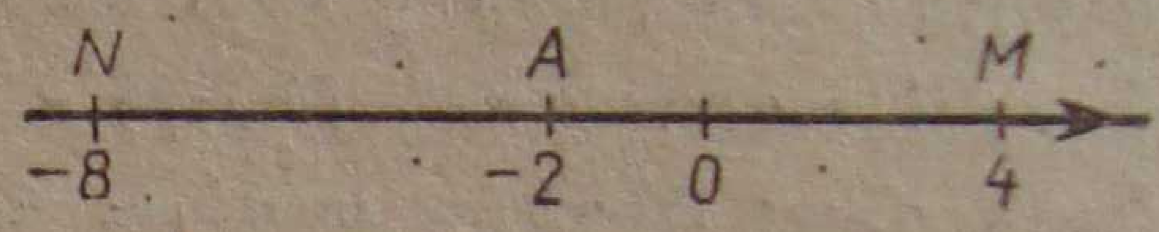
Նկ. 20

Եթե կոորդինատային ուղղին պատկանող երկու կետեր սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, ապա նրանց կոորդինատները հակադիր թվեր են։



Նկ. 21

Խնդիր 2։ Տրված է, որ M(m) կետը սիմետրիկ է N(x) կետին A(a) կետի նկատմամբ։ Հաշվել N կետի x կոորդինատը և պատկերել կոորդինատային ուղղի վրա։ 1) $a=-2$, $m=4$, 2) $a=-4$, $m=-14$։

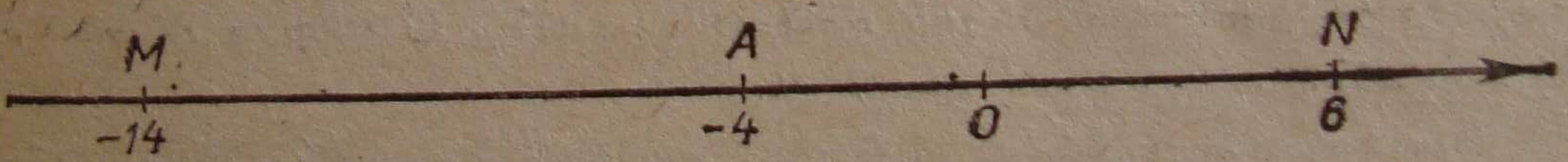


Նկ. 22

Խնդիրն ունի միայն մեկ լուծում։

1) $a=-2$, $m=4$ (Նկ. 22)։ Քանի որ $m>a$, ուստի M կետը գտնվում է A կետից աջ։ AM հատվածի երկարությունը հավասար է՝ $d=4-(-2)=6$։ Ուստի N կետը գտնվում է A կետից ձախ և նրանից 6 միավոր հեռավորության վրա (կամ M կետից ձախ և նրանից 12 միավոր հեռավորության վրա)։ Այնպես որ $-2-x=6$, $x=-8$ (կամ $4-x=12$, $x=-8$)։

Պատասխան. N(−8)։



Նկ. 23

2) $a=-4$, $m=-14$ (Նկ. 23)։ Քանի որ $m<a$, ուստի M-ը գտնվում է A-ից ձախ։ Ունենք. $d=(-4)-(-14)=-4+14=10$։ N կետը գտնվում է A-ից աջ՝ 10 միավոր հեռավորության վրա կամ M-ից աջ՝ 20 միավոր հեռավորության վրա, այնպես որ $x-(-4)=x+4=10$, $x=6$ (կամ $x-(-14)=x+14=20$, $x=6$)։

Պատասխան. N(6)։

Վարժություններ

147. Գտնել 6 հատվածներից յուրաքանչյուրի երկարությունը, եթե տրված են նրանց ծայրակետերի կոորդինատները. P(−6), Q(2), R(6), S(−8)։

148. Հայտնի է երկու թվերից մեկի կոորդինատը և նրանց հեռավորությունը։ Գտեք մյուս կետի կոորդինատը։ Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը։

ա) $|MN| = 7$, $N(8)$, Գտեք $M(m)$-ը,

բ) $|GF| = 8$, $F(-10)$, Գտեք $G(g)$-ն,

գ) $|PQ| = 11$, $Q(5)$, Գտեք $P(p)$-ն,

դ) $|KL| = 14$, $L(-7)$, Գտեք $K(k)$-ն։

§ 26. ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

Եթե հայտնի է կոորդինատային ուղղին պատկանող որևէ կետի կոորդինատը (տես § 25), ապա կարելի է նշել նրա դիրքը ուղղի վրա։ Ինչպե՞ս կարելի է նշել կետի դիրքը հարթության վրա։ Խնդիրը լուծելու համար մտցնենք կոորդինատային հարթության հասկացությունը։

Տանենք երկու փոխուղղահայաց ուղիղներ։ Հարմարության համար մեկը գծենք հորիզոնական, իսկ մյուսը՝ ուղղաձիգ։ Դրանց հատման կետը նշանակենք O տառով։ Ուղիղներից յուրաքանչյուրի վրա ընտրենք դրական ուղղություն. հորիզոնական ուղղի վրա՝ ձախից աջ, իսկ ուղղաձիգի վրա՝ ներքևից վերև։ Դրական ուղղությունները նկարի վրա նշենք սլաքներով (նկ. 24)։

Յուրաքանչյուր ուղղի վրա O կետը ընտրենք որպես հաշվումների սկզբնակետ, նրանից սկսած դրական ուղղություններով տեղադրենք հավասար հատվածներ, որոնց երկարությունը համարենք 1։ Միավոր հատվածը հորիզոնական ուղղի վրա տեղադրենք O կետից դեպի աջ, իսկ ուղղաձիգ ուղղի վրա՝ դեպի վեր։

Այս երկու ուղիղները՝ ընտրված դրական ուղղություններով, հաշվումների սկզբնակետով և միավոր հատվածով, կազմում են կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ։ Հորիզոնական կոորդինատային ուղիղը անվանում են աբսցիսների առանցք և նշանակում Ox, իսկ ուղղաձիգը՝ օրդինատների առանցք և նշանակում Oy։ Երկու առանցքները անվանում են կոորդինատների առանցքներ, իսկ նրանց հատման կետը՝ կոորդինատների սկզբնակետ։

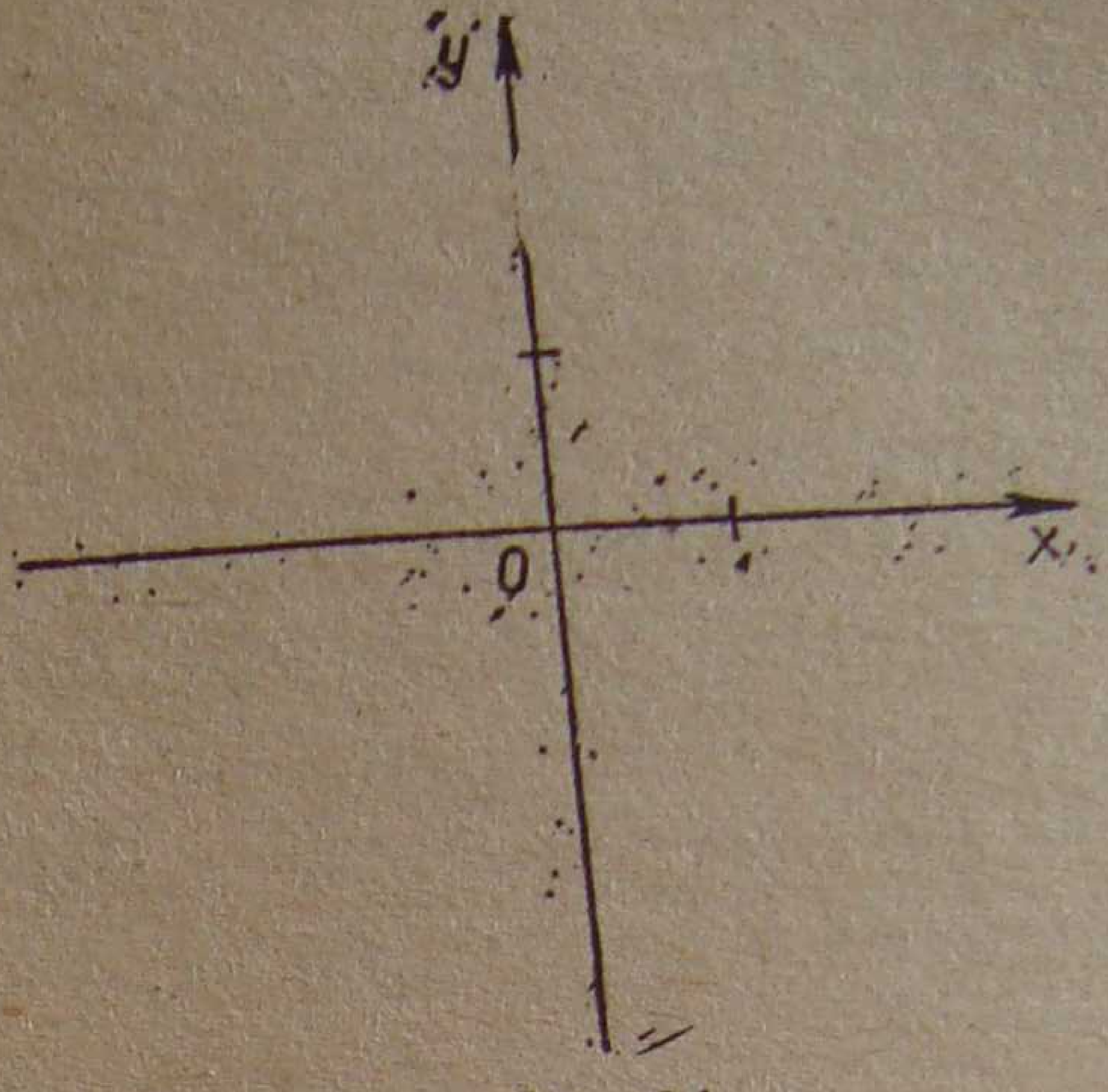
Այն հարթությունը, որի վրա նշված է Ox և Oy առանցքներով ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, կոչվում է կոորդինատային հարթություն և նշանակվում է Oxy։

Կոորդինատների առանցքները կոորդինատային հարթությունը բաժանում են չորս քառորդների։ Առաջին քառորդը սահմանափակված է Ox և Oy դրական ճառագայթներով։ Հաջորդ քառորդները համա-

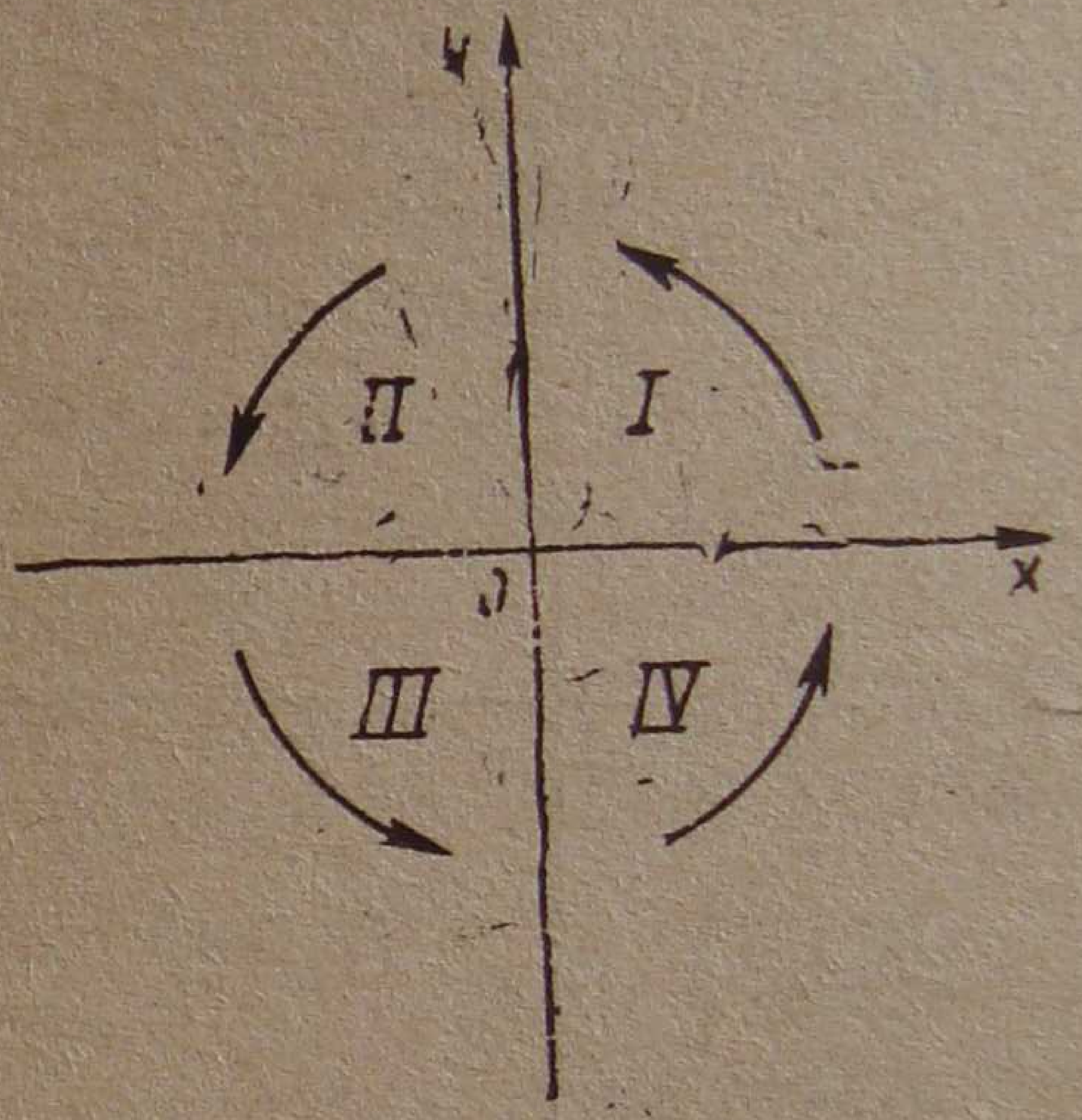
պատասխանաբար համարակալվում են ժամացույցի սլաքի ընթացքին հակառակ (Նկ. 25)։

Որպեսզի պարզենք, թե ինչպես է որոշվում որևէ կետի դիրքը հարթության վրա, մանրամասն դիտարկենք զանազան հնարավոր դեպքեր։ Դիցուք M, N, P, Q կետերը գտնվում են համապատասխանաբար I, II, III, IV քառորդներում (Նկ. 26)։

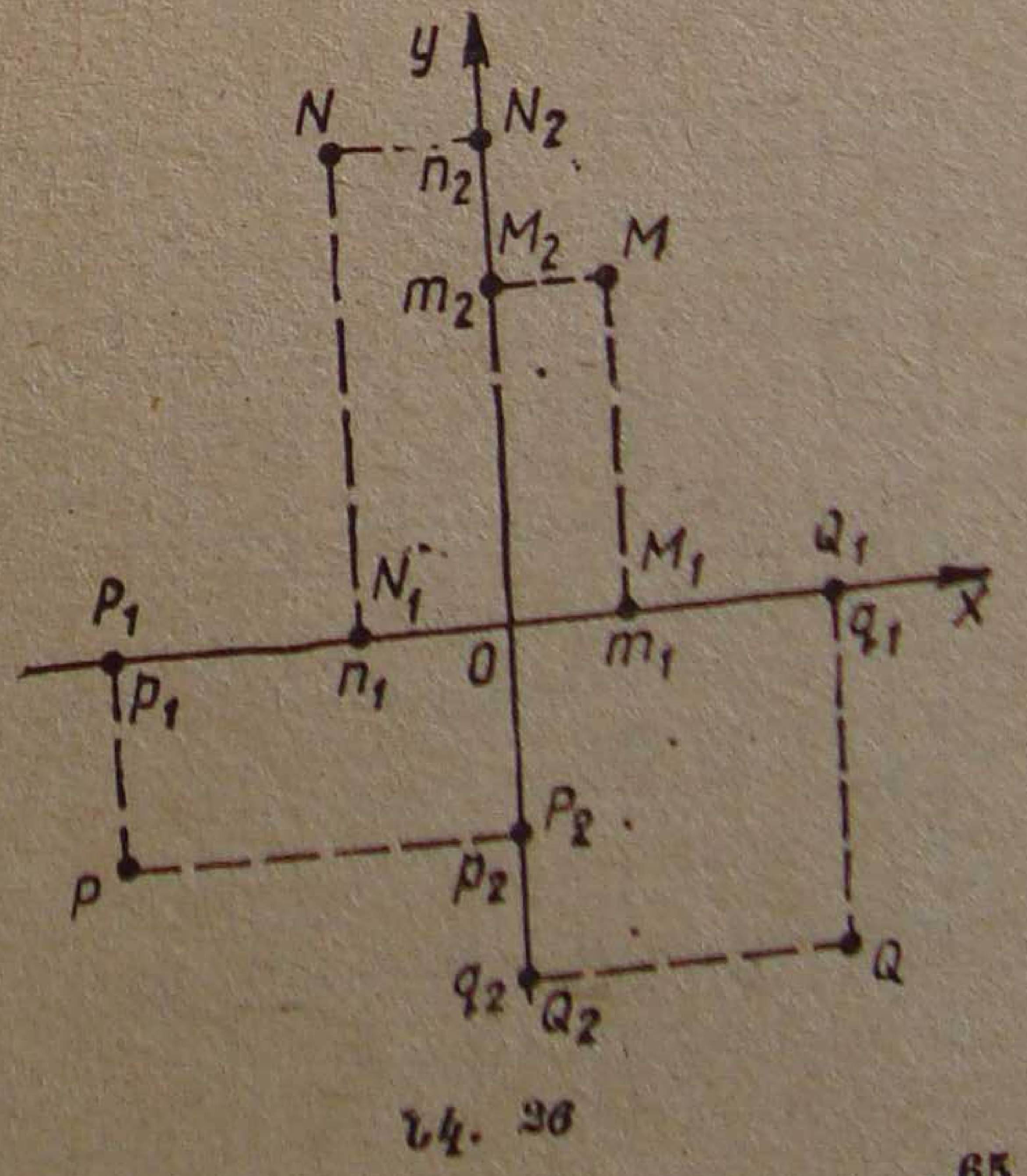
1) M կետից երկու ուղղահայացներ իջեցնենք (օրինակ, անկյունակի միջոցով) կոորդինատների առանցքների վրա։ Դիցուք M_1 և M_2 կետերը դրանց հատման կետերն են Ox և Oy առանցքների հետ։ M_1 կետը պատկանում է աբսցիսների Ox առանցքին և նրան համապատասխանում է որոշակի m_1 կոորդինատ, որը կանվանենք M կետի (և M_1 կետի) աբսցիս։ 26-րդ նկարից երևում է, որ $m_1 = |OM_1|$, $m_1 > O$։ M_2 կետը պատկանում է օրդինատների Oy առանցքին և նրան ևս համապատասխանում է միանգամայն որոշակի m_2 կոորդինատ, որը կանվանենք M կետի (և M_2 կետի) օրդինատ։ Նկարից երևում է, որ $m_2 = |OM_2|$, $m_2 > O$։ Այսպիսով, I քառորդում գտնվող յուրաքանչյուր M կետի համապատասխանում է մի թվազույգ. առաջին թիվը՝ m_1-ը M կետի աբսցիսն է, իսկ երկրորդը՝ m_2-ը, M կետի օրդինատը։ m_1 և m_2 թվերը կոչվում են M կետի կոորդինատներ։ Պայմանավորվենք այդ թվերը գրել փակագծերի մեջ, տրված կետի նշանակումից աջ՝ $M(m_1, m_2)$։ Առաջին տեղում գրվում է M կետի աբսցիսը, իսկ երկրորդ տեղում՝ օրդինատը։ Եթե կետը գտնվում



Նկ. 24



Նկ. 25

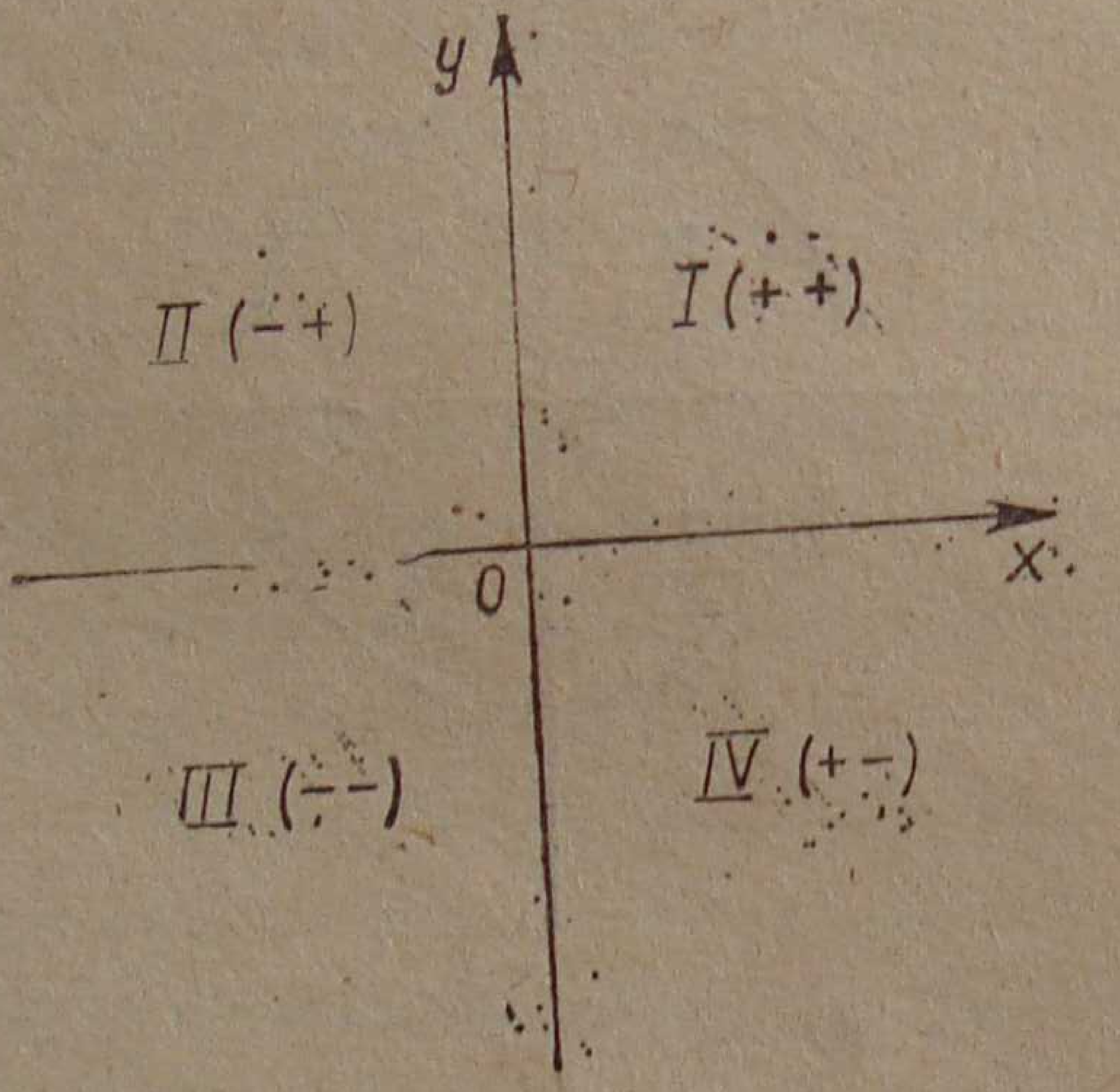


Նկ. 26

է առաջին քառորդում, ապա նրա երկու կոորդինատներն էլ դրական են։

2) Դիցուք N կետը գտնվում է II քառորդում։ N կետից երկու ուղղահայացներ իջեցնենք կոորդինատների Ox և Oy առանցքների վրա և վերջիններիս հետ դրանց հատման կետերի կոորդինատները նշանակենք N_1 և N_2։ Դիցուք n_1-ը N_1 կետի կոորդինատն է, իսկ n_2-ը՝ N_2 կետի կոորդինատը։ 26-րդ նկարում երևում է, որ $n_1 < O$, $n_2 > O$, $n_1 = -|ON_1|$, $n_2 = |ON_2|$։ n_1 թիվը կոչվում է նաև N կետի աբսցիս, իսկ n_2-ը՝ N կետի օրդինատ։ n_1 և n_2 թվերը N կետի կոորդինատներն են, դա գրվում է այսպես. $N(n_1, n_2)$։ Եթե կետը գտնվում է II քառորդում, ապա նրա աբսցիսը բացասական թիվ է, իսկ օրդինատը՝ դրական։

3) Դիցուք P կետը գտնվում է III քառորդում։ Դատելով ինչպես նախորդ դեպքերում, մենք 26-րդ նկարից անում ենք հետևյալ եզրակացությունը։ Քանի որ $P_1 < O$, $P_1 = -|OP_1|$, $P_2 < O$, $P_2 = -|OP_2|$, ապա III քառորդում գտնվող կետի կոորդինատները բացասական թվեր են։

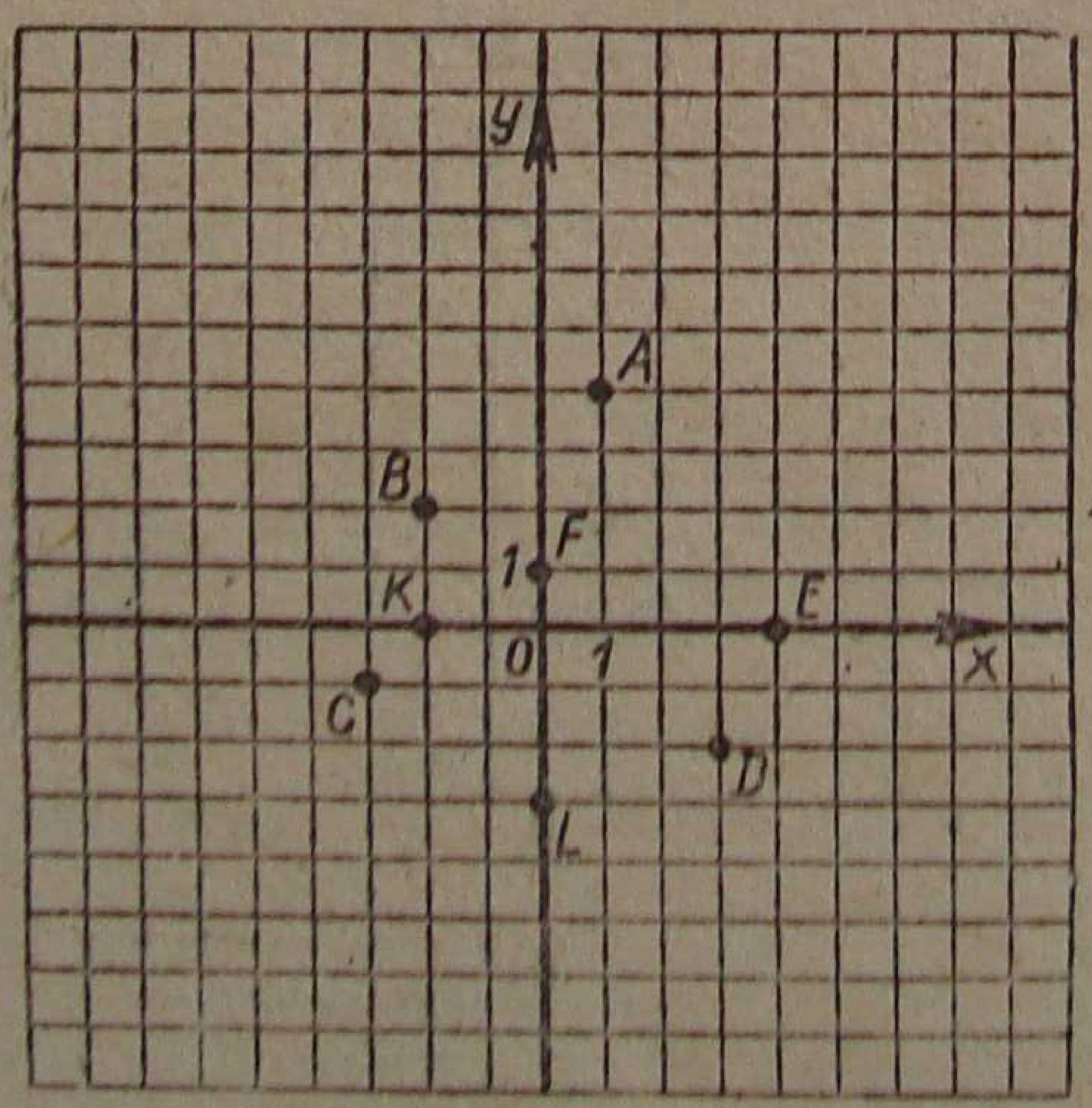


Նկ. 27

4) Դիցուք, վերջապես, Q կետը գտնվում է IV քառորդում։ Նկարից կարելի է եզրակացնել հետևյալը. քանի որ $q_1 > O$, $q_1 = |OQ_1|$, $q_2 < O$, $q_2 = -|OQ_2|$, ապա IV քառորդում գտնվող կետն ունի դրական աբսցիս և բացասական օրդինատ։

Նշանների կանոնը ներկայացված է 27-րդ նկարում։

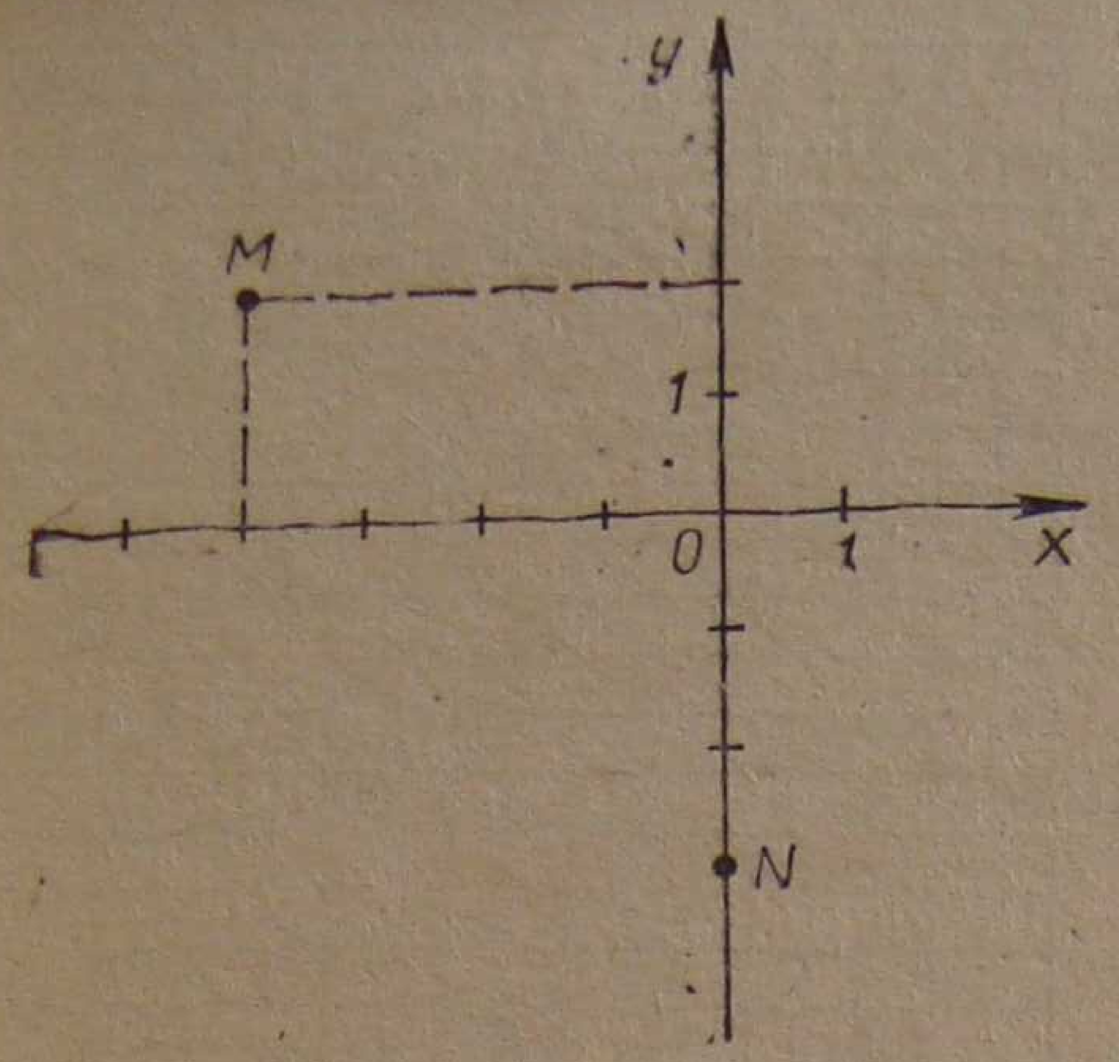
Օրինակ 1: Oxy կոորդինատային հարթության վրա նշված են A, B, C, D կետերը։ Պահանջվում է կարդալ և գրել տրված կետերի կոորդինատները (Նկ. 28)։



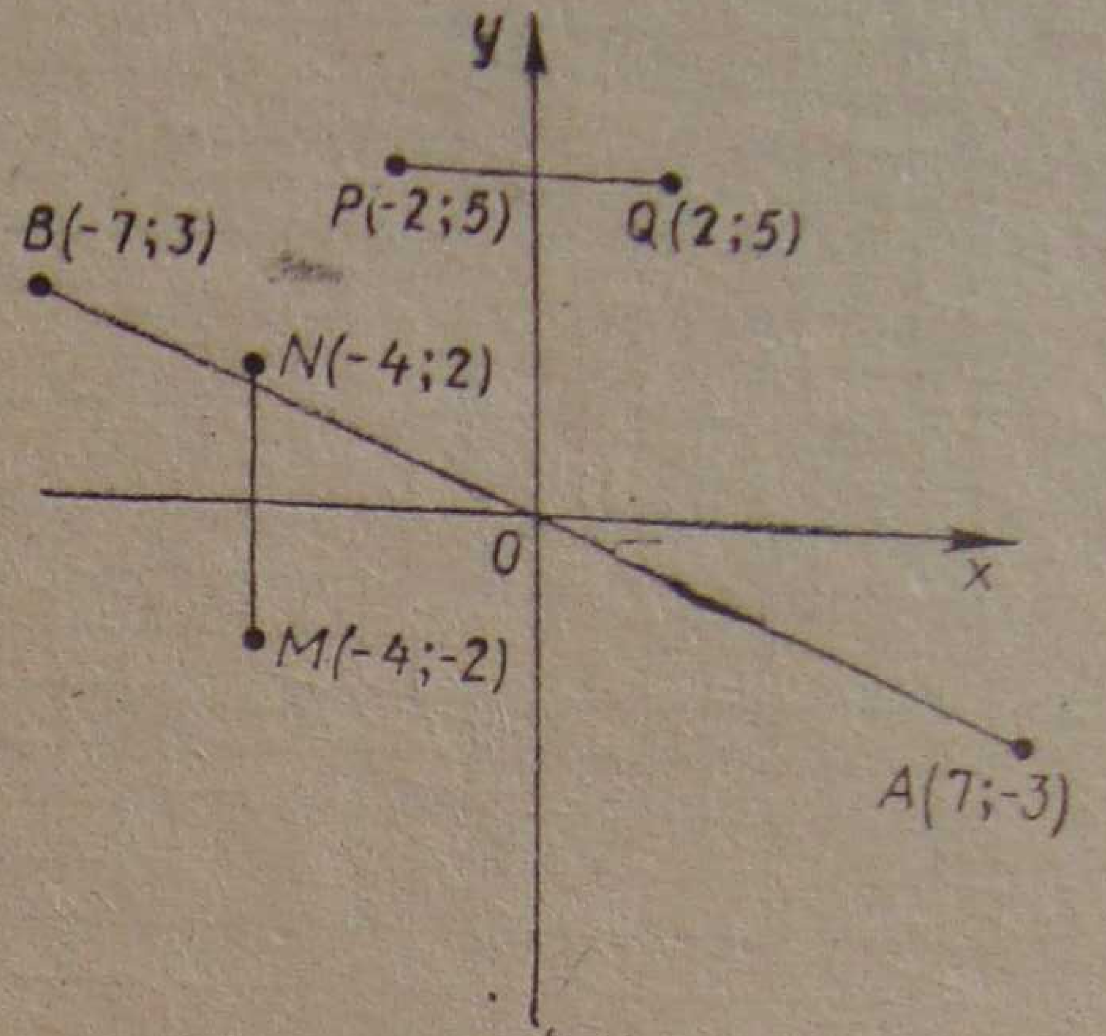
Նկ. 28

Պատասխան. A(1; 4), B(−2; 2), C(−3; −1), D(3; −2)։

Եթե Oxy կոորդինատային հարթության կետը գտնվում է Ox առանցքից վերև, ապա նրա օրդինատը դրական է, իսկ եթե Ox առանցքից ներքև, ապա բացասա-



Նկ. 29



Նկ. 30

կան։ Եթե կետը պատկանում է Ox առանցքին, ապա նրա օրդինատը հավասար է զրոյի։

Հանգունորեն, եթե Oxy կոորդինատային հարթության կետը գտնվում է Oy առանցքից աջ, ապա նրա աբսցիսը դրական է, իսկ եթե Oy առանցքից ձախ, ապա՝ բացասական։ Եթե կետը պատկանում է Oy առանցքին, ապա նրա աբսցիսը հավասար է զրոյի։

Եթե կետը միաժամանակ պատկանում է կոորդինատների երկու առանցքներին (իսկ այդ կետը կոորդինատների սկզբնակետն է), ապա նրա երկու կոորդինատներն էլ հավասար են զրոյի։

Օրինակ 2։ Oxy հարթության վրա նշված են E, F, K, L, O կետերը։ Պահանջվում է կարդալ և գրել դրանց կոորդինատները (նկ. 28)։

Պատասխան. E(4; 0), F(0;1), K(—2; 0), L(0; —3), O(0; 0)։

Օրինակ 3։ Ըստ տրված կոորդինատների, կառուցել M և N կետերը. M(—4; 2), N(0; —3)։

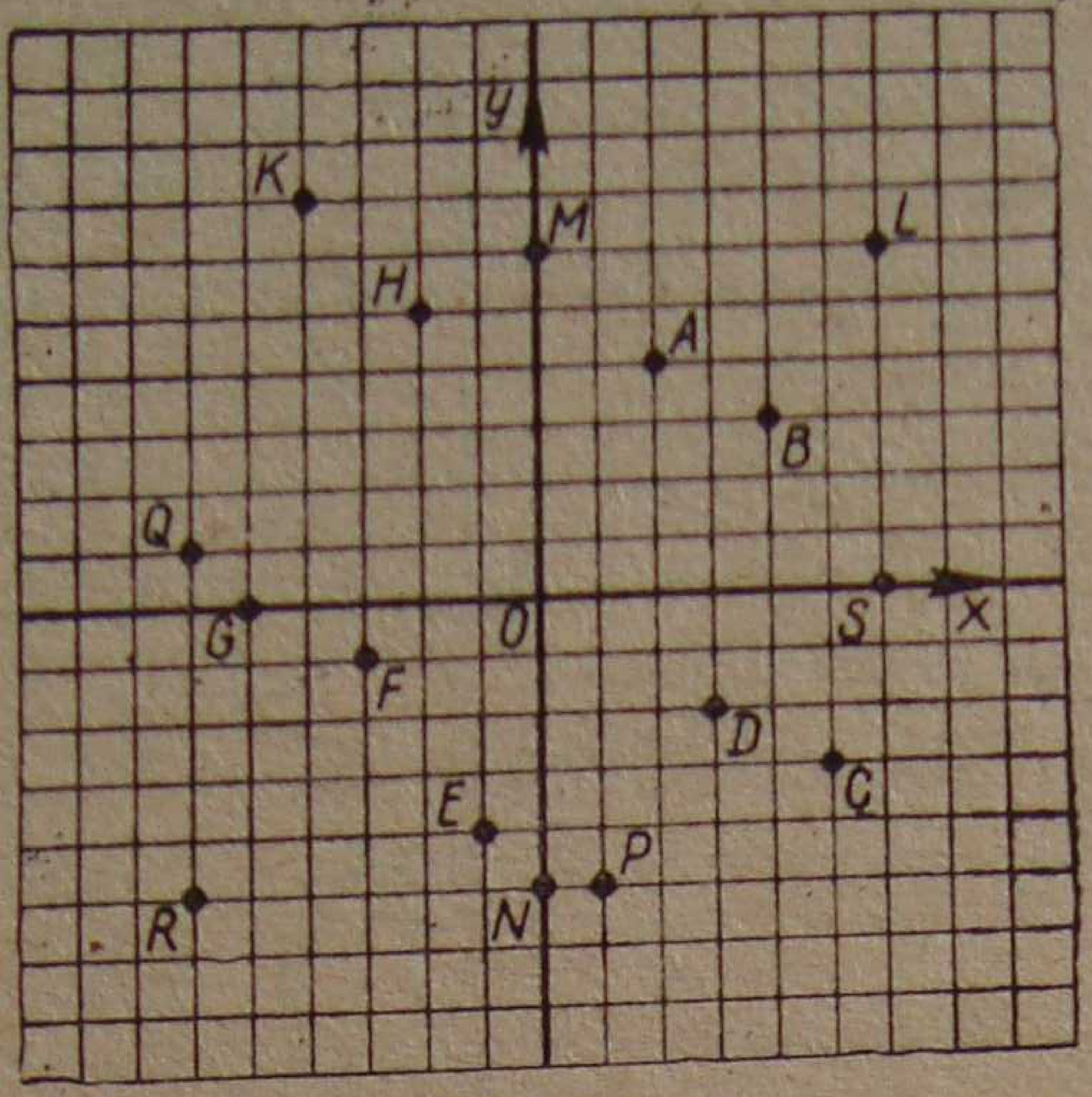
Լուծում։ Նախ և առաջ պարզենք, թե որ քառորդում պետք է գտնվի M կետը։ Քանի որ աբսցիսը բացասական է, իսկ օրդինատը՝ դրական, ուստի M կետը գտնվում է երկրորդ քառորդում։ (Այս դատողությունները հաճախ հնարավորություն են տալիս խուսափել կոպիտ սխալներից)։ O կետից 4 միավոր ձախ գնանք և 2 միավոր վեր բարձրանանք։ M կետը կառուցված է։

Անցնենք N կետի կառուցմանը։ Քանի որ նրա աբսցիսը հավասար է զրոյի, ուստի N կետը պատկանում է Oy առանցքին։ Այսպիսով, O կետից 3 միավոր ներքև իջնենք։ N կետը կառուցված է (նկ. 29)։

Օրինակ 4։ Կառուցել B կետը, որը A(7, —3) կետին սիմետրիկ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ (տես § 25)։

Լուծումը բերված է 30-րդ նկարում։

Պատասխան. B(—7; 3)։



Նկ. 31

Նկ. 32

Երկու կետերը կոչվում են տրված ուղղի նկատմամբ սիմետրիկ, եթե նրանք գտնվում են այդ ուղղի միևնույն ուղղահայացի վրա և հավասարահեռ են այդ ուղղից։

Օրինակ 5: *Կառուցել* N *կետը, որը սիմետրիկ է* M(−4; −2) *կետին* Ox *առանցքի նկատմամբ, և* Q *կետը, որը սիմետրիկ է* P(−2; 5) *կետին* Oy *առանցքի նկատմամբ։*

Լուծումը բերված է 30-րդ նկարում։

Պատասխան. N(−4; 2), Q(2; 5)։

Վարժություններ

Կառուցեք կետերի կոորդինատները (նկ. 31).

149. *ա)* A, K, F, C, M, S, L, R,

բ) B, Q, E, D, G, N, H, P,

Կառուցեք կետերը ըստ տրված կոորդինատների.

150. B(4; 3), D(3; −2), F(−3; −1), G(−5; 0), H(−2; 5), L(6; 6), P(1; −5)։

151. A(2; 4), C(5; −3), E(−1; −4), K(−4; 7), M(0; 6) O(0; 0), Q(−6; 1)։

Կառուցեք այն կետերը, որոնք սիմետրիկ են (նկ. 32).

152. B, C, D, E, G, K, N *կետերին՝ աբսցիսների առանցքի նկատմամբ։*

153. A, F, G, H, L, M *կետերին՝ օրդինատների առանցքի նկատմամբ։*

154. C, K, F, Q կետերին՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։

155. Եռանկյան գագաթներն ունեն հետևյալ կոորդինատները. $P(-5; -2)$, $N(-1; -2)$, $M(-1; -7)$։ Կառուցեք այնպիսի եռանկյուն, որը տրվածին սիմետրիկ լինի. ա) աբսցիսների առանցքի նկատմամբ, բ) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։

156. Եռանկյան գագաթներն ունեն հետևյալ կոորդինատները. $A(7; -2)$, $B(7; -5)$, $C(2; -5)$։ Կառուցեք այնպիսի եռանկյուն, որը տրվածին սիմետրիկ լինի. ա) օրդինատների առանցքի նկատմամբ, բ) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։

§ 27. ԹՎԱՅԻՆ ՄԻՋԱԿԱՅՔԵՐ: ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Մենք գիտենք, որ մեկ փոփոխականով հավասարման արմատ (կամ լուծում) կոչվում է փոփոխականի այնպիսի արժեքը, որը հավասարումը դարձնում է ճիշտ հավասարություն (տես § 4)։

Լուծել մեկ փոփոխականով հավասարումը, նշանակում է գտնել նրա արմատների բազմությունը։

Քանի որ $|3|=3$ *և* $|-3|=3$, *ուստի* $|x|=3$ *հավասարումն ունի երկու արմատ՝ −3 և 3, կամ արմատների բազմությունը պարունակում է երկու տարր՝* $\{-3; 3\}$։ *Իսկ* $|x|=0$ *հավասարումն ունի մեկ արմատ՝ զրո, այսինքն՝ արմատների բազմությունն է* $\{0\}$։

Քանի որ ցանկացած թվի մոդուլը ոչ բացասական թիվ է (§ 20), ուստի $|x|=-2$ *հավասարումը արմատներ չունի, այսինքն նրա արմատների բազմությունն է* $\varnothing$։

$x-|x|=0$ *հավասարումն ունի անվերջ բազմությամբ արմատներ՝ զրոն և ցանկացած դրական թիվն այդ հավասարման արմատն է։ Ոչ մի բացասական թիվ չի բավարարում տվյալ հավասարմանը (այսինքն՝ նրա համար արմատ չէ)։ Օրինակ,* $-5-|-5|=-5-5=$ $=-10\neq 0$։

Մենք նաև գիտենք, որ մեկ փոփոխականով անհավասարության լուծում կոչվում է փոփոխականի այնպիսի արժեքը, որը տրված անհավասարությունը դարձնում է ճիշտ թվային անհավասարություն (տես § 4)։

Լուծել անհավասարությունը, նշանակում է գտնել նրա լուծումների բազմությունը:

Գտնենք $-4<x\leqslant 2$ *անհավասարության ամբողջ լուծումները։ Նրա բոլոր լուծումների բազմությունը այսպիսին է՝* $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$։

$x+|x|>0$ անհավասարությանը բավարարում է ցանկացած դրական թիվ։ $x+1>x$ անհավասարության համար լուծում է ամեն մի թիվ։

Մեկ փոփոխականով անհավասարության լուծումների բազմությունը կարելի է պատկերել կոորդինատային ուղղի վրա։

Սկզբում դիտարկենք $a \leqslant x \leqslant b$, $a<x<b$, $a \leqslant x<b$, $a<x \leqslant b$ տեսքի կրկնակի անհավասարությունները։

1) Տրված է $-3 \leqslant x \leqslant 2$ կրկնակի անհավասարությունը։ Կոորդինատային ուղղի վրա նշենք -3 և 2 կոորդինատներով կետերը։ Անհավասարությանը բավարարում են նշված կետերի կոորդինատները և կոորդինատային ուղղի բոլոր այն կետերի կոորդինատները, որոնք գտնվում են դրանց միջև։ Տրված անհավասարության լուծումների բազմությունը նշանակվում է $[-3; 2]$ և կոչվում է փակ միջակայք (հատված) -3-ից 2։ 33-րդ ա նկարում միջակայքի ծայրակետերը նշված են սև շրջանիկներով։

2) $-3<x<2$ անհավասարության լուծումների բազմությունը նշանակվում է $]-3; 2[$ և կոչվում բաց միջակայք (ինտերվալ) -3-ից 2։ 33-րդ բ նկարում միջակայքի երկու ծայրերն էլ նշված են սպիտակ շրջանիկներով։] և [նշանները «շրջված» ուղղանկյուն փակագծերի նշաններն են։

3) $-3 \leqslant x<2$ անհավասարության լուծումների բազմությունը նշանակվում է $[-3; 2[$։ Դա -3-ից 2 կիսաբաց միջակայք է։ 33-րդ գ նկարում միջակայքի ձախ ծայրը նշված է սև շրջանիկով, իսկ աջը՝ սպիտակով։

4) $-3<x \leqslant 2$ անհավասարության լուծումների բազմությունը նշանակվում է $]-3; 2]$։ Դա նույնպես -3-ից 2 կիսաբաց միջակայք է։ 33-րդ դ նկարում ձախ ծայրը նշված է սպիտակ շրջանիկով, իսկ աջը՝ սևով։

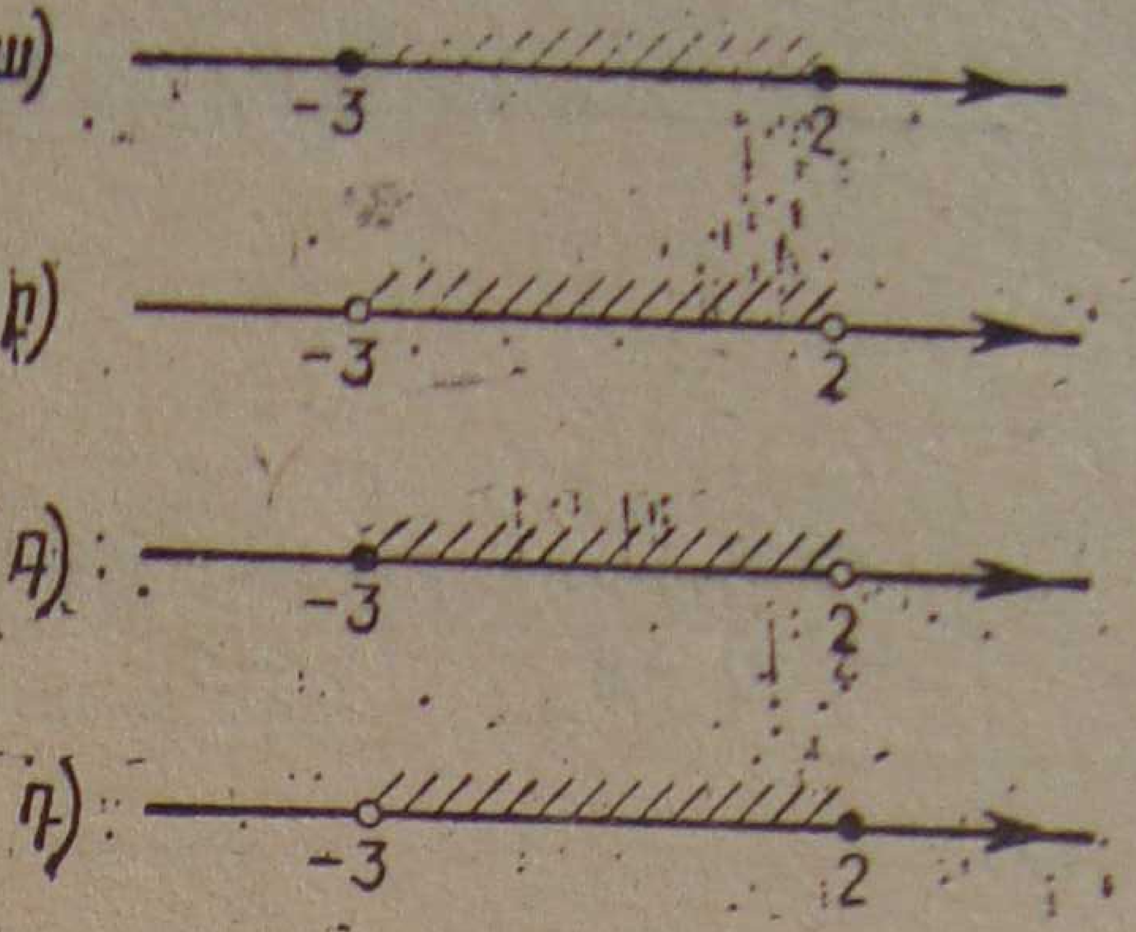
Բերված թվային միջակայքերը վերջավոր միջակայքերի օրինակներ են։ Այժմ դիտարկենք անվերջ միջակայքերը։

1) Տրված է $x>1$ անհավասարությունը։ Այդ անհավասարությանը բավարարում է 1-ից մեծ ցանկացած թիվ։ Կոորդինատային ուղղի վրա նշենք 1 կոորդինատով կետը։ Տրված անհավասարությանը բավարարում են նշված կետից դեպի աջ գտնվող բոլոր կետերի կոորդինատները։ Որպեսզի ընդգծենք, որ կետերը դեպի աջ կարող են գտնվել ցանկացած չափով հեռու և, հետևաբար, նրանց կոորդինատները կարող են լինել ցանկացած չափով մեծ թվեր, մտցնենք $+\infty$ նշանը (պլյուս անվերջություն)։ $x>1$ անհավասարության լուծումների բազմությունը նշանակվում է $]1; +\infty[$, (Նկ. 34, ա)։ Դա 1-ից $+\infty$ բաց թվային ճառագայթն է, որը չի ընդգրկում 1-ը։

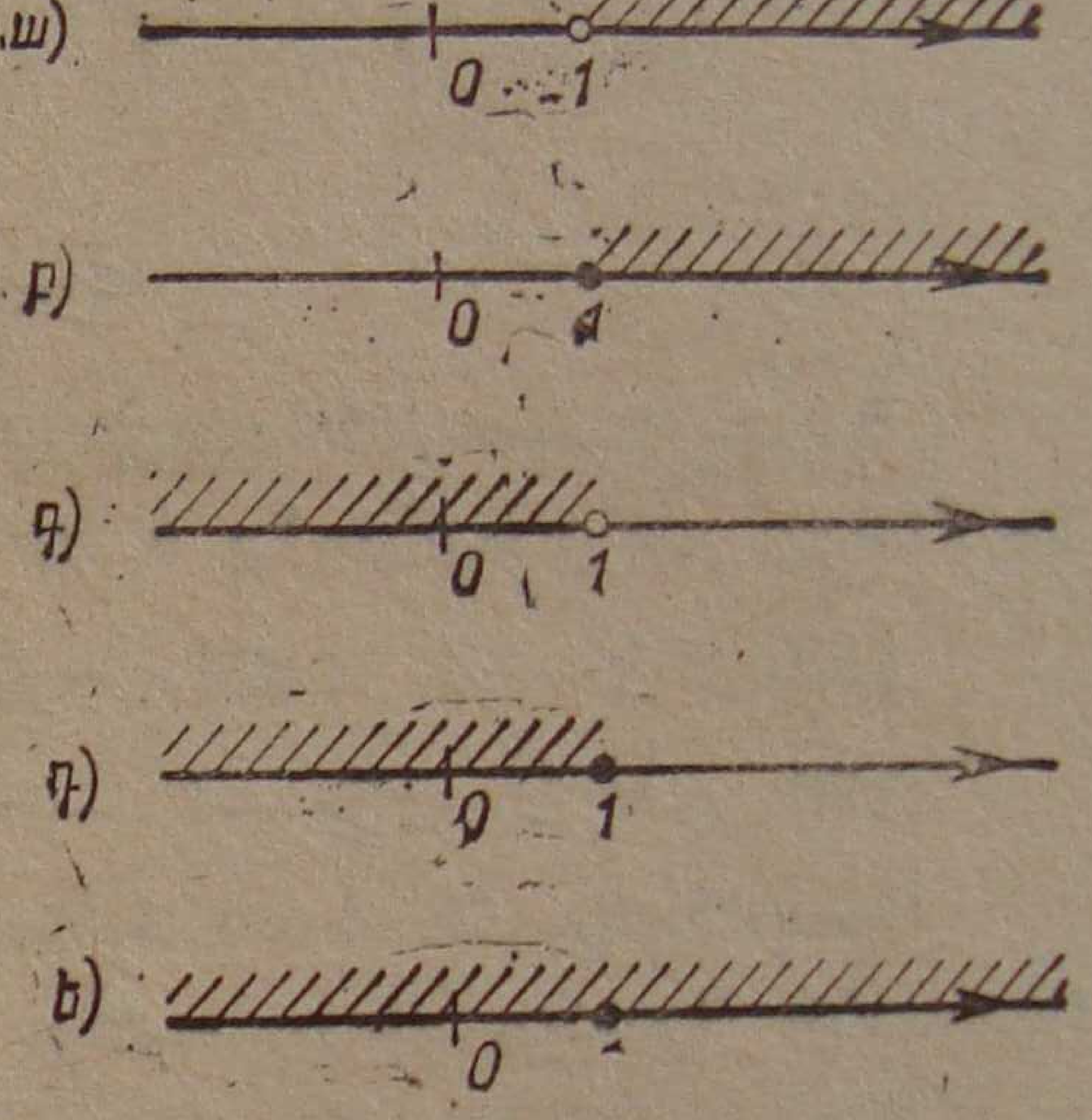
2) $x \geqslant 1$։ Այս անհավասարության լուծումների բազմությունը նշանակվում է $[1; +\infty[$ (Նկ. 34, բ)։ Դա 1-ից $+\infty$ թվային ճառագայթն է, որն ընդգրկում է 1-ը։

3) $x < 1$։ Անհավասարությունը բավարարում են կոորդինատային ուղղի բոլոր այն կետերի կոորդինատները, որոնք գտնվում են 1 կոորդինատով կետից ձախ։ Որպեսզի ընդգծենք, որ կետերը դեպի ձախ կարող են գտնվել ցանկացած չափով հեռու և, հետևաբար, դրանց կոորդինատները կարող են լինել ըստ մոդուլի ցանկացած չափով մեծ բացասական թվեր, մուծենք $-\infty$ նշանը (մինուս անվերջություն)։ $x < 1$ անհավասարության լուծումների բազմությունը նշանակվում է $]-\infty; 1[$ (Նկ. 34, գ)։ Դա $-\infty$-ից 1 բաց թվային ճառագայթն է։

4) $x \leqslant 1$։ Այս անհավասարության լուծումների բազմությունը նշանակվում է $]-\infty; 1]$ (Նկ. 34, դ)։ Դա $-\infty$-ից 1 թվային ճառագայթն է։



Նկ. 33



Նկ. 34

Բոլոր թվերի բազմությունը կոչվում է թվային ուղիղ և նշանակվում $]-\infty; +\infty[$ (Նկ. 34. ե) (համեմատեցեք կոորդինատային ուղղի հասկացության հետ, § 19)։

Օրինակներ: Գտնել հետևյալ թվային միջակայքերի միավորումն ու հատումը.

1) $A =]-6; 2[$, $B =]-8; -1[$ (Նկ. 35)։

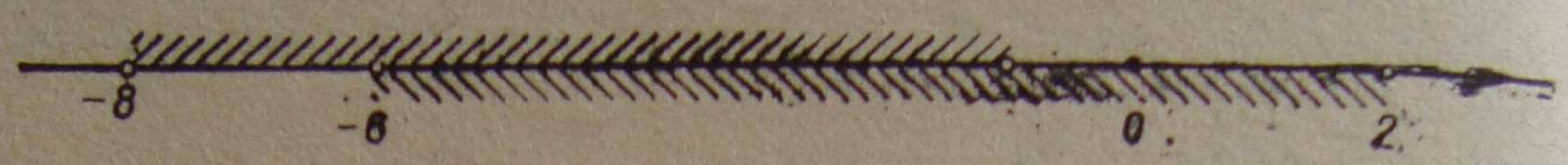
Լուծում. $A \cup B =]-8; 2[$, $A \cap B =]-6; -1[$։

2) $A =]-10; -9]$, $B =]-9; 2[$, $C =]-5; 4[$ (Նկ. 36)։

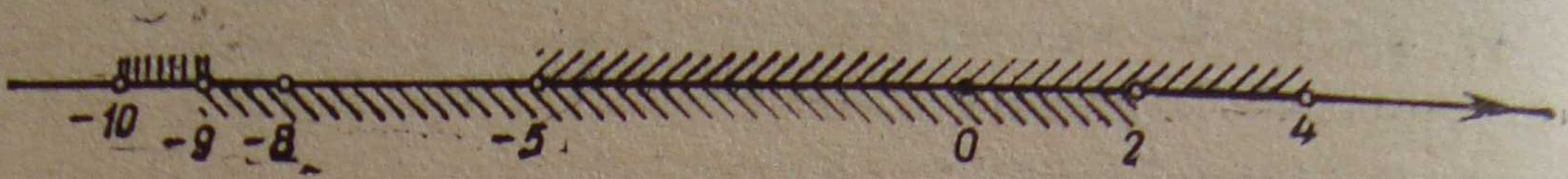
Լուծում. $A \cup B \cup C =]-10; 4[$, $A \cap B \cap C = \varnothing$։

3) $A =]-7; 3[$, $B =]-4; 6[$, $C =]-2; 5[$ (Նկ. 37)։

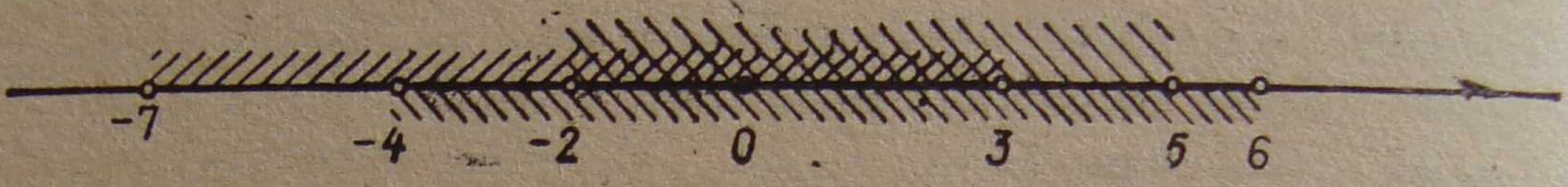
Լուծում. $A \cup B \cup C =]-7; 6[$, $A \cap B \cap C =]-2; 3[$։



Նկ. 85



Նկ. 86



Նկ. 87

Վարժություններ

Կոորդինատային ուղղի վրա ցույց տվեք անհավասարությունների լուծումների բազմությունը և գրեցեք այն.

157. $x > -3$, $x \leq 4$, $-5 \leq x < 2$, $-6 < x < -2$։

158. $x < 2$, $x \geq -4$, $-8 < x \leq -2$, $-4 \leq x \leq 1$։

Կազմեցեք հետևյալ երկու թվային միջակայքերի միավորումն ու հատումը։ Դրանք ցույց տվեք կոորդինատային ուղղի վրա.

159. ա)]—6; 4],]—4; 5],

բ)]—5; 3], [—3; 2[,

գ)]—4; —2], [2; 5[։

160. ա) [—7; 3[, [—5; 4[,

բ)]—6; 2],]—4; 1],

գ) [—5; —3[,]1; 4]։

Օգտագործելով պատկանելության նշանը, գրեցեք, թե Q բազմության հետևյալ 10 տարրերից որոնք են պատկանում N բազմությանը և որոնք՝ Z բազմությանը.

$$N \subset Z \subset Q$$ (Նկ. 88)։

161. ա) 5; —3; 6; $\frac{2}{3}$; 0; $-\frac{4}{7}$; 4; 6; 1; —3,2; 12,

բ) 4; —2; $\frac{4}{9}$; 11; 10; $-\frac{5}{12}$; 8,9; —6,1; —1,4։

162. ա) $7; -\frac{3}{5}; 3,4; 20; 0,1; -6,4; \frac{10}{17}; 8; -1; 15,$

բ) $6; -5; \frac{6}{13}; 9; 21; -\frac{5}{8}; -2,3; 2; 2,8; 4,9$։

Օգտագործելով ընդգրկման նշանը, գրեցեք, թե հետևյալ չորս բազմություններից որոնք են N բազմության ենթաբազմությունները և որոնք՝ Z բազմության ենթաբազմությունները։

163. $A=\{2; 0; 12; 3; 1\}$, $B=\{3,2; -1; 4; 8\}$,

$C=\{4; 8; 14; 1; 5\}$, $D=\left\{3; 0; \frac{2}{3}; -4; 2,3\right\}$։

164. $A=\{5; 9; 0; 3; 17\}$, $B=\{7; 1; 5; 18; 3\}$,

$C=\left\{2; \frac{5}{8}; 0; -3; 5,8\right\}$ $D=\{4; -2; 3; 9; 1\}$։

Ինքնուրույն աշխատանք №3

1. Կատարեցեք գործողությունները.

$$\frac{(-4,6)\cdot(-0,7)-0,376:(-0,4)}{(-0,15):\frac{1}{3}-4\cdot(-0,11)}$$։

2. Կոորդինատային ուղղի վրա պատկերեցեք և գրեցեք հետևյալ անհավասարության լուծումների բազմությունը.

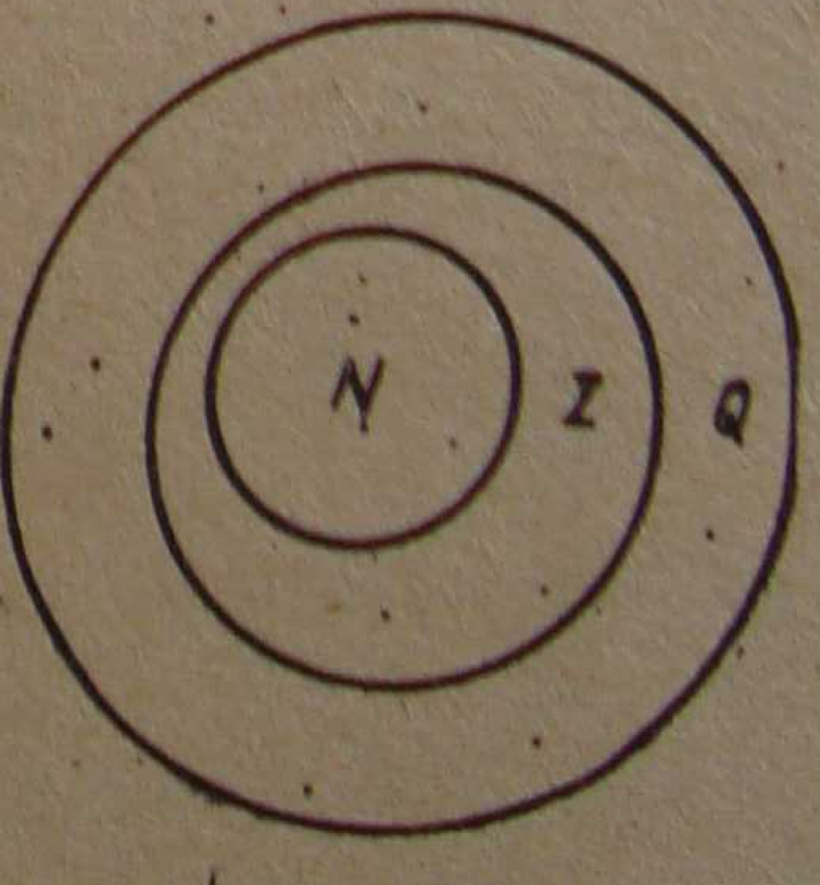
ա) $-6 < x \leq 1$, բ) $-2 \leq x < 5$։

3. Գտեք

$]-7,2]$ և $[-3,4[$

թվային միջակայքերի միավորումն ու հատումը։

4. Տրված են եռանկյան գագաթի կոորդինատները. $A(-2; -1)$, $B(0; 5)$, $C(6; 3)$։ *Կառուցեք այնպիսի եռանկյուն, որը տրվածին սիմետրիկ լինի օրդինատների առանցքի նկատմամբ և գրեցեք նրա գագաթների կոորդինատները։*



Նկ. 38

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ի՞նչն է կոչվում կոորդինատային ուղիղ։ Նկարեցեք կոորդինատային ուղիղ և նրա վրա պատկերեցեք երկու դրական և երկու բացասական թիվ։

2. Ինչպե՞ս են բաղդատվում երկու թվերը կախված կոորդինատային ուղղի վրա իրենց պատկերների դասավորությունից։

3. Ի՞նչն է կոչվում թվի մոդուլ։ Ինչպիսի՞ թվերն են կոչվում հակադիր։

4. Ո՞ր բազմությունն է կոչվում ամբողջ թվերի բազմություն և ինչպե՞ս է այն նշանակվում։ Բերեք ամբողջ թվերի օրինակներ։

5. Ո՞ր բազմությունն է կոչվում ռացիոնալ թվերի բազմություն և ինչպե՞ս է այն նշանակվում։ Բերեք ռացիոնալ թվերի օրինակներ։

6. Ձևակերպեցեք միևնույն և տարբեր նշաններով երկու ռացիոնալ թվերի գումարման կանոնները։

7. Ձևակերպեցեք, թե ինչպես է կատարվում ռացիոնալ թվերի հանումը։

8. Ձևակերպեցեք միևնույն և տարբեր նշաններով երկու ռացիոնալ թվերի բազմապատկման կանոնները։

9. Ի՞նչ նշան ունի բացասական թվի բնական ցուցիչով աստիճանը։

10. Ձևակերպեցեք ռացիոնալ թվերի բաժանման կանոնները։

11. Ի՞նչ է կոորդինատների համակարգը հարթության վրա։ Ինչպե՞ս են կոչվում կոորդինատների առանցքները։

12. Ի՞նչ նշաններ ունեն կոորդինատային հարթության տարբեր քառորդներում գտնվող կետերի կոորդինատները։

13. Ինչի՞ են հավասար աբսցիսների առանցքին պատկանող կետերի օրդինատները և օրդինատների առանցքին պատկանող աբսցիսները։

14. M և N կետերը սիմետրիկ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ։ M կետի կոորդինատներն են (a; b)։ Ինչպիսի՞ կոորդինատներ ունի N կետը։ Բերեք օրինակ։

15. P և Q կետերը սիմետրիկ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ։ P կետի կոորդինատներն են (c; d)։ Ինչպիսի՞ կոորդինատներ ունի Q կետը։ Բերեք օրինակ։

16. K և L կետերը սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։ K կետի կոորդինատներն են (x; y)։ Ինչպիսի՞ կոորդինատներ ունի L կետը։ Բերեք օրինակ։

Գլուխ III

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 28. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ

Թվերից և փոփոխականներից գործողությունների նշանների և փակագծերի օգնությամբ կարելի է կազմել զանազան արտահայտություններ:

Փոփոխականներ չպարունակող արտահայտությունը թվային արտահայտություն *է (տես § 3)։ Եթե ընդունված կարգով կատարենք թվային արտահայտությունում եղած բոլոր գործողությունները, ապա կստանանք թիվ, որը կոչվում է* թվային արտահայտության արժեք: *Թվային արտահայտությունն ունի միմիայն մեկ արժեք, եթե իհարկե, չի պարունակում զրոյի վրա բաժանում։*

Փոփոխականներ պարունակող արտահայտությունը (տես § 4) ընդունում է որոշակի արժեք, հենց որ նրա կազմի մեջ մտնող յուրաքանչյուր փոփոխականը ընդունում է որոշ արժեք։ Եթե փոփոխվում են փոփոխականների արժեքները, ապա սովորաբար փոփոխվում են նաև արտահայտության արժեքները։

Օրինակներ:

Գտնել արտահայտությունների արժեքները փոփոխականների տրված արժեքների դեպքում.

ա) $\frac{3a+2b}{b+4}$, *երբ* $a=0,2$, $b=-0,1$,

բ) $a(a^2-6a+11)$, *երբ* $a=1$, $a=2$, $a=3$, $a=-1$։

Լուծում.

ա) Երբ $a=0,2$, $b=-0,1$, *հանգում ենք* $\frac{0,6-0,2}{3,9}$ *թվային արտահայտությանը, որի արժեքն է* $\frac{4}{39}$։ *Դա էլ հենց տրված արտահայտության արժեքն է* a *և* b *փոփոխականների տրված արժեքների դեպքում։*

բ) Երբ $a=1$, $a=2$ և $a=3$, արտահայտության արժեքը հավասար է 6-ի։ $a=-1$ դեպքում այն հավասար է —18-ի։

Այսպիսով, փոփոխականների տրված արժեքների դեպքում արտահայտության արժեքը գտնելու համար բավական է տրված արտահայտությունում փոփոխականների փոխարեն տեղադրել նրանց արժեքները և բոլոր թվերի հետ կատարել նշված գործողությունները։

Սակայն, եթե արտահայտությունն ունի կոտորակի տեսք, ապա կարող է պատահել, որ փոփոխականի որոշ արժեքների դեպքում կոտորակի հայտարարը դառնա զրո։ Փոփոխականների այն արժեքների դեպքում, որոնք կոտորակի հայտարարը զրո են դարձնում, արտահայտությունը արժեքներ չունի (արտահայտությունն իմաստ չունի)։

$\frac{2a+5}{2a-5}$ արտահայտությունը $a=2,5$ դեպքում իմաստ չունի. a-ի փոխարեն 2,5 թիվը տեղադրելիս հայտարարում ստացվում է զրո, բայց զրոյի բաժանել չի կարելի։

$\frac{5xy-3}{2x-3y}$ արտահայտությունն իմաստ չունի, երբ $x=3$ և $y=2$, ինչպես նաև, երբ $x=6$ և $y=4$ կամ երբ $x=9$ և $y=6$։

Խնդիրներ լուծելիս ստացվում են փոփոխականներ պարունակող զանազան արտահայտություններ։

Խնդիր 1: Երկու քաղաքներից, որոնց հեռավորությունը s կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ մեկնեցին երկու ավտոմեքենաներ։ Քանի՞ ժամ հետո նրանք կհանդիպեն, եթե առաջինի արագությունը v_1 կմ/ժ է, իսկ երկրորդինը՝ v_2 կմ/ժ։

Պատասխանել խնդրի հարցին, եթե. ա) $s=300$, $v_1=40$, $v_2=60$, բ) $s=420$, $v_1=63$, $v_2=57$։

Խնդիրը լուծելու համար պետք է քաղաքների հեռավորությունը բաժանել 1ժ-ում ավտոմեքենաների անցած հեռավորությունների գումարի վրա։ Նշանակում է լուծումը կարելի է գրել հետևյալ արտահայտության տեսքով.

$$\frac{s}{v_1+v_2}\text{։}$$

Դա էլ հենց խնդրի պատասխանն է։

Այնուհետև որոնելի ժամանակը (ժ-երով) նշանակենք t-ով և գրենք հետևյալ հավասարությունը.

$$t=\frac{s}{v_1+v_2}\text{,}$$

Այս հավասարությունը կոչվում է մեր խնդրի լուծման բանաձև։ s, v_1, v_2 և t տառերով նշանակված են 4 տարբեր փոփոխականներ։ Պայմանում բերված 300 և 420 թվերը s փոփոխականի արժեքներն են, 40 և 63 թվերը՝ v_1 փոփոխականի արժեքներն են, 60 և 57 թվերը՝ v_2 փոփոխականի արժեքները։

Հաշվենք t փոփոխականի արժեքները մյուս փոփոխականների տրված արժեքների դեպքում։ Վերջիններս տեղադրենք ստացված բանաձևի աջ մասում.

ա) $t=\frac{300}{40+60}$, $t=3$, *բ)* $t=\frac{420}{63+57}$, $t=3,5$։

3 և 3,5 թվերը t փոփոխականի որոնելի արժեքներն են։

Խնդիր 2։ Գնացքը t_1 ժ գնաց v_1 կմ/ժ արագությամբ և t_2 ժ՝ v_2 կմ/ժ արագությամբ։ Գնացքը ի՞նչ միջին արագությամբ անցավ ամբողջ ճանապարհը։

Պատասխանել խնդրի հարցին, եթե. ա) $t_1=3$, $v_1=80$, $t_2=2$, $v_2=90$, բ) $t_1=3$, $v_1=70$, $t_2=2$, $v_2=80$։

Ճանապարհի առաջին մասը $v_1 \cdot t_1$ կմ է, իսկ երկրորդ մասը՝ $v_2 \cdot t_2$ կմ։ Ամբողջ ճանապարհը կազմում է $(v_1 \cdot t_1+v_2 \cdot t_2)$ կմ։ Այդ ճանապարհը գնացքն անցել է (t_1+t_2) ժ-ում։

Կազմենք խնդրի լուծման բանաձևը։ Գնացքի միջին արագությունը նշանակենք v կմ/ժ-ով, այդ դեպքում.

$$v=\frac{v_1t_1+v_2t_2}{t_1+t_2}\text{։}$$

Փոփոխականների փոխարեն տեղադրելով խնդրի պայմանում տրված իրենց արժեքները և կատարելով հաշվումները, մենք կստանանք առաջադրված հարցի պատասխանը. ա) $v=84$, բ) $v=74$։

Վարժություններ

Գտեք հետևյալ արտահայտությունների արժեքները դրանց մեջ մտնող փոփոխականների տրված արժեքների դեպքում.

165. *ա)* $(a+2) \cdot a-5$, *երբ* $a=4$,

բ) $(a-2) \cdot a+5$, *երբ* $a=6$։

166. *ա)* $((b-4)b-95)b+7$, *երբ* $b=-8$,

բ) $2(26-b(b+5))+b$, *երբ* $b=8$։

167. *ա)* $\frac{11}{1+\frac{1}{1+a}}$, *երբ* $a=\frac{3}{4}$,

բ) $10x-100y+5$, *երբ* $x=0,2$, $y=-0,3$։

168. *ա)* $\frac{ab(2b+7)}{2(ab-8)}$, *երբ* $a=8$, $b=-2$, *բ)* $\frac{5x-2}{2x-5}$, *երբ* $x=2,5$։

169. *ա)* $\frac{9(3a+5b)}{ab(2a-5)}$, *երբ* $a=-2$, $b=6$,

բ) $\frac{5y+1,3}{2y+1,5}$, *երբ* $y=-0,75$։

170. *ա) Ուղղանկյան մակերեսը հավասար է* S*-ի, իսկ կողմերից մեկը՝* a*-ի։ Կազմեցեք ուղղանկյան* P *պարագիծը հաշվելու բանաձևը և գտեք նրա արժեքը* $S=1701$ *մ²* *և* $a=27$ *մ դեպքում։*

բ) Ուղղանկյան կողմերից մեկը հավասար է a*-ի, իսկ երկրորդ կողմը* c*-ով մեծ է առաջինից։ Կազմեցեք ուղղանկյան պարագիծը և մակերեսը հաշվելու բանաձևը։* P *պարագիծը և* S *մակերեսը հաշվեցեք* $a=23$ *սմ և* $c=7$ *սմ դեպքում։*

§ 29. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԱԶՄՈՒՄՆ ՈՒ ԸՆԹԵՐՑՈՒՄԸ

Օրինակներով ցույց տանք, թե ինչպես է կազմվում փոփոխականներ պարունակող արտահայտությունը և ինչպես կարելի է այն կարդալ։ Հանրահաշվի լեզուն տառերի լեզուն է։ Հանրահաշիվը հաջողությամբ ուսումնասիրելու համար պետք է սովորել թվերի հետ կատարվող՝ բառերով ձևակերպված գործողությունների հաջորդականությունը թարգմանել տառերի հակիրճ լեզվով և, ընդհակառակը, կարողանալ բառերով ձևակերպել տրված տառային գրառումը։

Բերենք արտահայտություններ կազմելու օրինակներ։

1) Կազմել a *թվի ու* m *և* n *թվերի արտադրյալի գումարը։ Այստեղ պետք է գրել երկու գումարելիների գումար, որոնցից մեկը* a*-ն է, իսկ մյուսը՝* m *և* n *թվերի արտադրյալը։ Որոնելի արտահայտությունը այսպիսին է՝* $a+mn$։

2) Գրել m *և* n *թվերի գումարի և* a *թվի արտադրյալը։*

Տվյալ դեպքում պետք է կազմել երկու արտադրիչների արտադրյալը, որոնցից առաջինը m*-ի և* n*-ի գումարն է, իսկ երկրորդը՝* a*-ն։ Որոնելի արտահայտությունն ունի այսպիսի տեսք՝* $(m+n)a$։

3) Կազմել c *թիվը* a *թվի եռապատիկի և* b *թվի քառակուսու տարբերության վրա բաժանման քանորդը։*

Բաժանելին c թիվն է, բաժանարարը՝ $3a—b^2$ տարբերությունը։ Քանորդն ունի այսպիսի տեսք՝ $\frac{c}{3a—b^2}$։

4) a թվի քառակուսու և b թվի արտադրյալի խորանարդը գրըվում է $(a^2b)^3$ տեսքով։

5) Կազմել այն երկու թվերի քանորդը, որոնց գումարը հավասար է 25-ի։ Եթե առաջին թիվը (բաժանելին) նշանակենք a-ով, ապա երկրորդ թիվը (բաժանարարը) կարելի է գրել 25—a տարբերության տեսքով։ Որոնելի քանորդն ունի $\frac{a}{25—a}$ տեսքը։

Անցնենք հակադարձ խնդրին, այսինքն՝ տրված արտահայտության բառային նկարագրության կազմելուն։

1) $\frac{2a+b}{b—3c}$-ն a թվի կրկնապատիկի և b թվի գումարը b թվի և c թվի եռապատիկի տարբերության վրա բաժանման քանորդն է։

2) $3ab^2—2c^3$-ը a թվի և b թվի քառակուսու եռապատիկ արտադրյալի և c թվի խորանարդի կրկնապատիկի տարբերությունն է։

3) $(2a^3)^2—(3c^2)^3$-ը երկու աստիճանների տարբերությունն է՝ a թվի խորանարդի կրկնապատիկի քառակուսու և c թվի քառակուսու եռապատիկի խորանարդի տարբերությունը։

Վարժություններ

Կարդացեք և բառերով գրեցեք հետևյալ արտահայտությունները.

171. ա) $\frac{5(a+b)}{2c}$, բ) $\frac{5a}{2(b-c)}$։

172. ա) $\frac{m—3}{(k+2)n}$, բ) $\frac{(m—3\ k}{n+2}$։

173. ա) $\frac{x^3+y^3}{x—y}$, բ) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$։

174. ա) $\frac{a—b}{a^2+b^2}$, բ) $\frac{x+y}{x^3—y^3}$։

Գրեցեք հետևյալ արտահայտությունները։

175. ա) k և m թվերի տարբերությունը m և 8 թվերի գումարի վրա բաժանման քանորդը։

բ) 7 և a թվերի տարբերության և b թվի ու c թվի եռապատիկ գումարի արտադրյալը։

176. ա) a և b թվերի տարբերության և c և 6 թվերի գումարի արտադրյալը։

բ) a թվի կրկնապատիկի և b թվի գումարը c և 2 թվերի տարբերության վրա բաժանման քանորդը։

177. m օրվա ընթացքում բանվորը օրական պատրաստում է a դետալ։ Բարելավելով աշխատանքի կազմակերպումը, նա սկսեց օրական պատրաստել b դետալ։ Ընդամենը քանի՞ դետալ պատրաստեց բանվորը, եթե ամբողջ առաջադրանքը կատարելու համար նրանից պահանջվեց n օր։ Խնդրի լուծման համար կազմեցեք արտահայտություն և գտեք պատրաստված դետալների ընդհանուր թիվը հետևյալ տվյալների դեպքում. ա) a=73, b=80, m=20, n=35, բ) a=100, b=120, m=12, n=27։

178. Երկու նավահանգիստների հեռավորությունը s կմ է։ Մոտորանավակը որքա՞ն ժամանակում կարող է այդ հեռավորությունը գնալ և ետ գալ, եթե նրա արագությունը կանգնած ջրում հավասար է u կմ/ժ-ի, իսկ գետի հոսանքի արագությունը՝ v կմ/ժ-ի։

Որոնելի ժամանակը նշանակեցեք t ժ-ով, կազմեցեք խնդրի լուծման բանաձևը և հաշվեցեք արդյունքը հետևյալ տվյալների դեպքում.

ա) s=28, u=12, v=2,

բ) s=18, u=16, v=4։

Ինքնուրույն աշխատանք №4

1. Գտեք $a(a+1)-2$ արտահայտության արժեքները, երբ $a=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$։

2. Կազմեցեք a և b թվերի գումարի խորանարդի և նույն այդ թվերի քառակուսիների գումարի քանորդը և հաշվեցեք նրա արժեքը $a=-4$, $b=2$ դեպքում։

3. Պարզեցեք, ճշմարի՞տ է, թե կեղծ $2x+7y>5y-x$ պնդումը, երբ $x=2,4$, $y=3,6$։

4. Լուծեցեք հավասարումը.

ա) $46,5-x=-12,1$, բ) $x+105,3=21,8$։

§ 30. ՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆ

Վերցնենք միևնույն փոփոխականը պարունակող երկու արտահայտություններ, օրինակ, a^3+2a^2 և a^3-2a^2+4, և համեմատենք դը-

րանց արժեքները փոփոխականի որոշ արժեքների դեպքում։ Կազմենք աղյուսակ.

a	−2	−1	0	1	2
a^3-2a^2+4	−12	1	4	3	4
a^3+2a^2	0	1	0	3	16

Արտահայտությունների այն արժեքները, որոնք ստացվում են փոփոխականի միևնույն արժեքների դեպքում, կոչվում են այդ արտահայտությունների **համապատասխան արժեքներ**։

Փոփոխականի որոշ արժեքների դեպքում ($a=-1$ և $a=1$ դեպքում) տրված արտահայտությունների համապատասխան արժեքները հավասար են, իսկ որոշ արժեքների դեպքում ($a=-2$, $a=0$, $a=2$)՝ հավասար չեն։

Վերցնենք այսպիսի երկու արտահայտություններ՝ a^2 և $|-a|^2$. Պարզ է, որ a-ի բոլոր արժեքների դեպքում դրանց համապատասխան արժեքները հավասար են, օրինակ, $a=3$ դեպքում ստանում ենք $3^2=9$ և $(-3)^2=9$։ Հանգունորեն, $|a|$ և $|-a|$ մեծությունները ընդունում են միանման արժեքներ a-ի ցանկացած արժեքների դեպքում։ Օրինակ, $a=-2$ դեպքում ստանում ենք $|-2|=2$ և $|-(-2)|=|2|=2$։

Սահմանում։ **Միևնույն փոփոխականը պարունակող երկու արտահայտություններ կոչվում են նույնաբար հավասար, եթե նրանց բոլոր համապատասխան արժեքները հավասար են։**

Հավասարության նշանով միացնելով երկու նույնաբար հավասար արտահայտություններ, կստանանք հավասարություն, որը կոչվում է նույնություն։ Այսպիսով, **նույնությունը դա երկու նույնաբար հավասար արտահայտությունների հավասարությունն է**։ Ահա նույնությունների երկու օրինակ. $a^2=(-a)^2$ և $|a|=|-a|$։

Հետևյալ

$$\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2} \text{ և } \frac{a^3}{a^2}=\frac{a^2}{a}$$

երկու հավասարություններից յուրաքանչյուրը նույնպես նույնություն է, քանի որ դրանց բոլոր համապատասխան արժեքները հավասար են ($a=0$ դեպքում համապատասխան արժեքներ չկան)։

Ճիշտ թվային հավասարությունը ևս նույնություն է։

Դիտարկենք երկու արտահայտություններ, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է երկու փոփոխական, օրինակ, $6a+3b-2$ և $2a+$

$+5b-4$։ $a=5$ և $b=2$ արժեքների դեպքում արտահայտությունները ընդունում են համապատասխանաբար 34 և 16 արժեքներ, իսկ $a=2$ և $b=5$ արժեքների դեպքում՝ միևնույն 25 արժեքը։ Այս օրինակում փոփոխականների արժեքների մի զույգի դեպքում ($a=5$, $b=2$) տրված արտահայտությունների համապատասխան արժեքները տարբեր են, իսկ մեկ այլ զույգի ($a=2$, $b=5$) դեպքում՝ նույնն են։

$a^2+|-b|$ և $(-a)^2+|b|$ արտահայտությունները a և b փոփոխականների արժեքների բոլոր զույգերի դեպքում ընդունում են նույն արժեքները։ Այս երկու արտահայտությունները ևս նույնաբար հավասար են, իսկ $a^2+|-b|=(-a)^2+|b|$ հավասարությունը նույնություն է։

Վարժություններ

179. *Բաղդատեցեք արտահայտությունների համապատասխան արժեքները.*

ա) $2(a+7)$ և $2a+7$, *երբ* $a=-7$, $a=3$,

բ) $8-3x$ և $x+16$, *երբ* $x=-2$, $x=4$։

180. *Լրացրեք աղյուսակը և նշեցեք արտահայտությունների համապատասխան արժեքները.*

x	-2	-1	0	1	2	3
x^2+4x						
$5x+2$						

181. *Ընտրեցեք փոփոխականի այնպիսի արժեքներ, որոնց դեպքում արտահայտությունների համապատասխան արժեքները հավասար են.*

ա) $2x^2+5x$ և $x(5+2x)$, *բ)* $9+5a$ և $3a+9$։

182. *Հետևյալ հավասարություններից արտագրեցեք նրանք, որոնք նույնություններ են.*

ա) $a-b=b-a$, *բ)* $(a-b)^2=(b-a)^2$, *գ)* $(a-b)^3=(b-a)^3$,

դ) $|a|=a$, *ե)* $|a^2+9|=a^2+9$, *զ)* $|a^2-4|=a^2-4$։

§ 31. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՕՐԵՆՔՆԵՐԸ

Մաթեմատիկայում մշտապես հարկ է լինում գտնել զանազան արտահայտությունների արժեքներ։ Ուստի անհրաժեշտ է հաստատապես գիտենալ թվաբանական գործողությունների ոչ միայն կանոնները և կատարման կարգը, այլև այդ գործողությունների օրենքները և հատկությունները. դրանք շատ դեպքերում հնարավորություն են ընձեռում հաշվումները ռացիոնալացնել, պարզեցնել և հեշտացնել։ Թվաբանական գործողությունների օրենքները նույնությունների կարևոր օրինակներ են։

Ռացիոնալ թվերի գումարման երկու օրենք

Բազմաթիվ օրինակներով մենք համոզվել ենք, որ գումարելիների տեղերը փոխելուց երկու թվերի գումարը չի փոխվում.

$$3+5=5+3,\ 6+(-2)=(-2)+6,\ (-4)+(-1)=(-1)+(-4)։$$

Այժմ կազմենք երկու արտահայտություն՝ $a+b$ *և* $b+a$։ *Արտահայտությունների արժեքները* a *և* b *փոփոխականների ցանկացած արժեքների դեպքում նույնն են։ Այսպիսով հանգում ենք*

$$a+b=b+a \qquad (1)$$

նույնությանը։ Այն արտահայտում է գումարման տեղափոխական (կոմուտատիվ) օրենքը. երկու գումարելիների գումարի արժեքը չի փոխվում գումարելիների տեղերը փոխելուց։

Անցնենք երեք գումարելիների գումարին։ Մենք օրինակներով համոզվել ենք, որ երեք գումարելիների գումարը գտնելու համար կարելի է առաջինին ավելացնել երկրորդ և երրորդ գումարելիների գումարը կամ առաջին երկու գումարելիների գումարին ավելացնել երրորդը.

$$(5+8)+2=5+(8+2),$$

$$(6+(-88))+(-12)=6+((-88)+(-12))։$$

Դիտարկենք $(a+b)+c$ *և* $a+(b+c)$ *արտահայտությունները։* a, b *և* c *փոփոխականների ցանկացած արժեքների դեպքում այս արտահայտությունների համապատասխան արժեքները հավասար են։ Այսպիսով, տեղի ունի*

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (2)$$

նույնությունը։ Այն արտահայտում է գումարման զուգորդական (ասոցիատիվ) օրենքը. երեք գումարելիների գումարը չի փոխվում այն բանից, թե առաջին երկու գումարելիների գումարին կավելացնենք երրորդը, թե առաջինին կավելացնենք վերջին երկու գումարելիների գումարը։

Ըստ տեղափոխական օրենքի՝ $a+(b+c)=a+(c+b)$, իսկ ըստ զուգորդական օրենքի՝ $a+(c+b)=(a+c)+b$։ Այսպիսով, հանգում ենք նոր նույնության.

$$a+(b+c)=(a+c)+b.$$

Այժմ կարելի է ասել. երեք գումարելիների գումարը գտնելու համար կարելի է դրանցից ցանկացածին ավելացնել մյուս երկու գումարելիների գումարը.

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b.$$

Ռացիոնալ թվերի բազմապատկման երկու օրենք

Մենք մեր հաշվումների փորձից գիտենք, որ երկու թվերի արտադրյալը չի փոխվում արտադրիչների տեղերը փոխելուց։ Դիտարկենք երկու արտահայտություն՝ ab և ba։ Եթե a և b փոփոխականներին տանք ցանկացած արժեքներ, ապա երկու արտահայտություններն էլ կընդունեն միանման արժեքներ։

Մենք հանգում ենք այսպիսի նույնության.

$$ab=ba. \qquad (3)$$

Այն արտահայտում է բազմապատկման տեղափոխական (կոմուտատիվ) օրենքը. երկու արտադրիչների արտադրյալը չի փոխվում արտադրիչների տեղերը փոխելուց։

Երեք արտադրիչների արտադրյալի համար արդարացի է բազմապատկման զուգորդական (ասոցիատիվ) օրենքը. երեք արտադրիչների արտադրյալի արժեքը չի փոխվում այն բանից, թե առաջին երկու արտադրիչների արտադրյալը կբազմապատկենք երրորդով, թե առաջին արտադրիչը կբազմապատկենք վերջին երկու արտադրիչների արտադրյալով.

$$(ab)c=a(bc). \qquad (4)$$

Քանի որ ըստ տեղափոխական օրենքի՝ $a(bc)=a(cb)$, իսկ ըստ զուգորդական օրենքի՝ $a(cb)=(ac)b$, ապա ստանում ենք նոր նույնություն՝ $a(bc)=(ac)b$։

Այժմ կարելի է ասել. երեք արտադրիչների արտադրյալը գտնելու համար կարելի է դրանցից ցանկացածը բազմապատկել մյուս երկու արտադրիչների արտադրյալով. $(ab)c=a(bc)=b(ac)=abc$։

Ռացիոնալ թվերի գումարման և բազմապատկման գործողությունները կապող օրենքը

Ենթադրենք, թե պետք է գտնել երկու թվերի գումարի և որևէ երրորդ թվի արտադրյալը։ Բազմաթիվ օրինակներով մենք համոզ-

վել ենք, որ արտադրյալը կարելի է գտնել նաև այսպիսի ճանապարհով. յուրաքանչյուր գումարելին բազմապատկել տրված թվով և ստացված երկու արտադրյալները գումարել։ Օրինակ, $5(16+(-2))=$ $=5\cdot16+5(-2)$։

Կազմենք երկու արտահայտություն. $(a+b)c$ արտադրյալը և $ac+$ $+bc$ գումարը։

a, b և c փոփոխականների ցանկացած արժեքների դեպքում երկու արտահայտություններն էլ ընդունում են միանման արժեքներ։ Այսպիսով, մենք հանգում ենք հետևյալ նույնությանը.

$$(a+b)c=ac+bc\text{։} \qquad (5)$$

Այն արտահայտում է թվերի գումարման նկատմամբ բազմապատկման բաշխման (դիստրիբուտիվ) օրենքը. երկու թվերի գումարի և որևէ երրորդ թվի արտադրյալը հավասար է յուրաքանչյուր գումարելիի և տրված երրորդ թվի արտադրյալների գումարին։

Հաշվումների ժամանակ (5) նույնության հետ մեկտեղ կիրառվում են նաև հետևյալ նույնությունները.

$$(a-b)c=ac-bc,$$

$$(a+b):c=a:c+b:c\,(c\neq0),$$

$$(a-b):c=a:c-b:c\,(c\neq0)\text{։}$$

Սրանք հանման նկատմամբ բազմապատկման բաշխման, ինչպես նաև գումարման և հանման նկատմամբ բաժանման բաշխական օրենքներն են։

Ռացիոնալ թվերի հետ կատարվող թվաբանական գործողությունների հիմնական օրենքների դիտարկումը ավարտենք զրոյի և մեկի հատկությունների թվարկումով.

1) $a+0=a$, *2)* $a-0=a$, *3)* $a+(-a)=0$,

4) $a\cdot1=a$, *5)* $\frac{a}{1}=a$, *6)* $a\cdot\frac{1}{a}=1$, եթե $a\neq0$,

7) $a\cdot0=0$, *8)* $\frac{0}{a}=0$, եթե $a\neq0$։

$\frac{a}{0}$ արտահայտությունը $a\neq0$ դեպքում, օրինակ, $\frac{1}{0}$, ինչպես նաև $\frac{0}{0}$ արտահայտությունը իմաստ չունեն։

$\frac{1}{0}$ արտահայտությունը իմաստ չունի, որովհետև չկա այնպիսի քանորդ, այսինքն՝ գոյություն չունի այնպիսի թիվ, որը զրոյով բազմապատկելիս ստացվի 1։

$\frac{0}{0}$ արտահայտությունը իմաստ չունի այլ պատճառով. քանի որ որպես քանորդ կարելի է վերցնել ամեն մի պատահական թիվ, ուստի 0-ն 0-ի բաժանելը չի հանգեցնում որևէ որոշակի պատասխանի։

Ահա թե ինչու զրոյից տարբեր թիվը չի կարելի զրոյի բաժանել, զրոն էլ չի կարելի զրոյի բաժանել։ Ընդհանրապես զրոյի բաժանել չի կարելի։

Օրինակներ։

1) Հաշվել $3\frac{2}{7}+10{,}68+4\frac{1}{14}-2{,}18$ գումարը։

Լուծում. $\left(3\frac{2}{7}+4\frac{1}{14}\right)+(10{,}68-2{,}18)=7\frac{5}{14}+8{,}5=15\frac{6}{7}$։

2) Հաշվել $0{,}25\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot 40\cdot\frac{14}{3}$ արտադրյալը։

Լուծում. $(0{,}25\cdot 40)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{14}{3}=10\cdot(-2)=-20$։

3) Հաշվել $8{,}14\cdot 9{,}07+1{,}86\cdot 9{,}07$ երկու արտադրյալների գումարը։

Լուծում. $(8{,}14+1{,}86)\cdot 9{,}07=10\cdot 9{,}07=90{,}7$։

Վարժություններ

Հաշվեցեք առավել պարզ եղանակով.

183. ա) $6{,}5-3{,}7+1{,}5-11{,}3$,

բ) $12{,}3-2{,}6+5{,}7+3{,}6-7{,}4$,

գ) $80\cdot 23-50\cdot 33+80\cdot 37-50\cdot 27$։

184. ա) $ab+ac$, երբ $a=-5\frac{7}{13}$, $b=8\frac{4}{13}$, $c=4\frac{9}{13}$,

բ) $ab-ac$, երբ $a=9\frac{2}{11}$, $b=2\frac{4}{11}$, $c=-8\frac{7}{11}$,

§ 32. ՓԱԿԱԳԾԵՐԻ ԲԱՑՈՒՄԸ ԵՎ ՓԱԿԱԳԾԵՐԻ ՄԵՋ ԱՌՆԵԼԸ

Գրենք ռացիոնալ թվերի գումարման զուգորդական օրենքը.

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Նույնության աջ մասում կարելի է փակագծերը բաց թողնել, $(a+b)+c=a+b+c$, *և այդ դեպքում կստանանք՝*

$$a+(b+c)=a+b+c.$$

Այստեղ a-*ն,* b-*ն և* c-*ն որևէ ռացիոնալ թվեր են։ Այս նույնությունում նախ* c-*ն փոխարինելով* $-c$-*ով, իսկ այնուհետև* b-*ն* $-b$-*ով և վերջապես, միաժամանակ փոխարինելով* b-*ն* $-b$-*ով և* c-*ն* $-c$-*ով, հաջորդաբար կստանանք ևս երեք նույնություն.*

$$a+(b-c)=a+b-c,$$

$$a+(-b+c)=a-b+c,$$

$$a+(-b-c)=a-b-c.$$

Կանոն 1. **Եթե փակագծերի առջև դրված է պլյուս նշան, ապա փակագծերը կարելի է բաց թողնել (բացել), պահպանելով փակագծերում գտնվող յուրաքանչյուր գումարելիի նշանը:**

Նախքան առջևում մինուս նշան ունեցող փակագծերի բացման կանոնի արտածմանն անցնելը, մտցնենք հակադիր արտահայտությունների հասկացությունը։

Երկու արտահայտություններ կոչվում են հակադիր, եթե նրանց գումարը հավասար է զրոյի։ Բերենք օրինակներ.

1) $b-c$ *և* $-b+c$, *2)* $b+c$ *և* $-b-c$.

Ստուգելու համար կազմենք այդ արտահայտությունների գումարը և կիրառենք առաջին կանոնը.

1) $b-c+(-b+c)=b-c-b+c=b-b+c-c=0,$

2) $b+c+(-b-c)=b+c-b-c=b-b+c-c=0.$

Ըստ ռացիոնալ թվերի հանման կանոնի (§ 22).

$$a-b=a+(-b).$$

Գրենք երկու արտահայտությունների տարբերությունը և օգտվենք հանման և 1-ին կանոններից.

$$a-(b-c)=a+(-b+c)=a-b+c,$$

$$a-(-b+c)=a+(+b-c)=a+b-c,$$

$$a-(b+c)=a+(-b-c)=a-b-c,$$

$$a-(-b-c)=a+(+b+c)=a+b+c,$$

Կանոն 2. Եթե փակագծերի առջև դրված է մինուս նշան, ապա փակագծերը կարելի է բաց թողնել (բացել), փոխելով փակագծերում գտնվող յուրաքանչյուր գումարելիի նշանը։

Այնպիսի ձևափոխությունը, որի դեպքում մի արտահայտությունը փոխարինվում է իրեն նույնաբար հավասար արտահայտությամբ, կոչվում է նույնական ձևափոխություն։

Փակագծերի բացումը արտահայտությունների նույնական ձևափոխության օրինակ է։ Փակագծերի բացումը սովորաբար հեշտացնում է հաշվումները։ Որպեսզի ավելի ակնբախ լինի, հետևյալ օրինակում ընդգծենք հակադիր թվերը (դրանց գումարը հավասար է զրոյի).

$$(6,8-8,9)-(7,3-8,9)+(6,7+7,3)-(2,5+6,7)=6,8-\underline{8,9}-$$

$$-\underline{\underline{7,3}}+\underline{8,9}+\underline{6,7}+\underline{\underline{7,3}}-2,5-\underline{6,7}=6,8-2,5=4,3,$$

Երբեմն նպատակահարմար է տրված արտահայտության մի քանի գումարելիներ առնել փակագծերի մեջ։ Այսպիսի ձևափոխությունը քիչ առաջ դիտարկված՝ փակագծերի բացման ձևափոխության հակադարձն է։

Օրինակ։ *Դիցուք պահանջվում է* $25-a-b+c$ *արտահայտությունում փակագծերի մեջ առնել այն գումարելիների խումբը, որոնք նշանակված են տառերով։ Այդ անելիս հնարավոր է երկու դեպք։*

1. Փակագծերի առջև դնենք պլյուս նշան. այդ դեպքում փակագծերի մեջ առնված գումարելիների նշանները չեն փոխվում, այսինքն՝

$$25-a-b+c=25+(-a-b+c),$$

2. Փակագծերի առջև դնենք մինուս նշան. այդ դեպքում փակագծերի մեջ առնված գումարելիներից յուրաքանչյուրի նշանը փոխվում է.

$$25-a-b+c=25-(a+b-c),$$

Կատարված ձևափոխությունների ճշտությունը ստուգելու համար բավական է ստացված արտահայտություններում բացել փակագծերը։

Փակագծերի մեջ առնելը, ինչպես և փակագծերի բացումը, արտահայտությունների նույնական ձևափոխության օրինակ է։

Հետևյալ արտահայտություններում բացեք փակագծերը և, եթե հնարավոր է, պարզեցրեք·

185. *ա)* $5a-2b+(2c-8d)$, *գ)* $2x-(3y-4z+6t)$,

բ) $6a+(5b-3c+4d)$, *դ)* $3m+2n-(5p-3q)$։

186. *ա)* $(2a-6,23)-(3b-6,23)$, *բ)* $(12b-7x)-(5y-3b)$։

187. *ա)* $-(-x+8,06)+(8,06-2y)$,

բ) $-(3m-2k)+(-p+5n)$։

188. *ա)* $4a-3b+7c-11$ *արտահայտությունը ներկայացրեք երկու գումարելիների գումարի տեսքով։*

բ) $3x+7y-26a-b$ *արտահայտությունը ներկայացրեք երկու արտահայտությունների տարբերության տեսքով։*

գ) $15a-6b+31c-1$ *արտահայտությունը ներկայացրեք երկու արտահայտությունների տարբերության տեսքով։*

§ 33. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԱՐՏԱԴՐԻՉԸ ՓԱԿԱԳԾԵՐԻՑ ԴՈՒՐՍ ԲԵՐԵԼԸ ԵՎ ԴՐԱՆ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ

Բազմապատկման բաշխական օրենքի համաձայն, ընդհանուր արտադրիչ ունեցող երկու արտադրյալների (օրինակ, ab *և* ac*) գումարը (տարբերությունը) կարելի է ձևափոխել այնպես, որ ստացվի ընդհանուր արտադրիչի և մյուս երկու արտադրիչների գումարի (տարբերության) արտադրյալ.*

$$ab+ac=a(b+c),\quad ad-ac=a(b-c)։$$

Այսպիսի ձևափոխությունը կոչվում է փակագծերից ընդհանուր արտադրիչի դուրս բերում։ *Այս ձևափոխությունը նույնական է։*

Բերենք պարզագույն օրինակներ.

1) $5a+3a=a(5+3)=a\cdot 8=8a$,

2) $6m+m=6m+1\cdot m=m\cdot(6+1)=7m$,

3) $4x-x=4x-1\cdot x=x\cdot(4-1)=3x$,

4) $2ax-6ax+3ax=ax(2-6+3)=ax\cdot(-1)=-ax$,

5) $12ax-6bx+18cx=6x(2a-b+3c)$։

Հակադարձ ձևափոխությունն այն է, որ արտադրյալը ձևափոխում են արտադրիչների գումարի կամ տարբերության

6) $(7+2-4)\cdot a=7a+2a-4a$,

7) $(8-3+2)\cdot xy=8xy-3xy+2xy$,

8) $(2a-3b+4c)\cdot 5x=10ax-15bx+20cx$։

Ընդհանուր արտադրիչը փակագծերից դուրս բերելը բավականաչափ հեշտացնում է հաշվումները.

Օրինակներ:

1) Հաշվել՝ $32{,}5\cdot 5{,}8+32{,}5\cdot 4{,}2$։

Ունենք՝ $32{,}5\cdot 5{,}8+32{,}5\cdot 4{,}2=32{,}5(5{,}8+4{,}2)=32{,}5\cdot 10=325$։

2) Հաշվել՝ $3{,}47^2+6{,}53\cdot 3{,}47$։

Ունենք՝ $3{,}47\cdot 3{,}47+6{,}53\cdot 3{,}47=3{,}47(3{,}47+6{,}53)=3.47\cdot 10=34{,}7$։

3) Հաշվել՝ $3{,}37\cdot 5{,}4+3{,}37\cdot 1{,}23+6{,}63^2$։

Ունենք՝ $3{,}37\cdot(5{,}4+1{,}23)+6{,}63^2=3{,}37\cdot 6{,}63+6{,}63^2=6{,}63\cdot(3{,}37+6{,}63)=6{,}63\cdot 10=66{,}3$։

Վարժություններ

Հաշվեցեք.

189. *ա)* $324\cdot 0{,}521+324\cdot 0{,}479$,

բ) $0{,}623\cdot 5{,}37+4{,}63\cdot 0{,}623$։

190. *ա)* $0{,}861\cdot 0{,}251+0{,}861\cdot 0{,}749$,

բ) $39{,}4\cdot 2{,}86+7{,}14\cdot 39{,}4$։

191. *ա)* $96{,}3^2+3{,}7\cdot 96{,}3$, *բ)* $8{,}25\cdot 6{,}25+6{,}25^2$։

192. *ա)* $54{,}9\cdot 45{,}1+45{,}1^2$, *բ)* $5{,}73\cdot 5{,}53+5{,}53^2$։

Ընդհանուր արտադրիչը փակագծերից դուրս բերեք.

193. *ա)* $36ab+24ac+48ad$, *բ)* $15ax+20ay-25az$։

194. *ա)* $24ay+32by-16cy$, *բ)* $12mn-16mp+24mq$։

195. *ա)* $15ab-35abx-10aby$, *բ)* $18mk-12nk+24k$։

196. *ա)* $6xz+2x-4xy$, *բ)* $14ab+21ac-7a$։

Արտադրյալը ձևափոխեցեք գումարի.

197. *ա)* $-3a(x-5y)$, *բ)* $2a(3x-2y+7)$։

198. *ա)* $-3x(2-4b)$, *բ)* $3y(2m+4n-5)$։

§ 34. ՆՄԱՆ ԳՈՒՄԱՐԵԼԻՆԵՐԻ ՄԻԱՑՈՒՄ

Դիտարկենք $6xy-3xy+xy-3xy+2xy$ *գումարը։*

Յուրաքանչյուր գումարելին x, y *փոփոխականների և որոշ թվային արտադրիչի արտադրյալ է։ Երկու գումարելիներ այդ գումարում միանման են* $(-3xy)$, *մնացածները մեկը մյուսից տարբերվում են միայն թվային արտադրիչով։*

Միևնույն գումարելիները կամ միայն թվային արտադրիչով տարբերվող գումարելիները կոչվում են նման։ *Տվյալ օրինակում բոլոր հինգ գումարելիներն էլ նման են։ Եթե* xy *ընդհանուր արտադրիչը դուրս բերենք փակագծերից, իսկ այնուհետև գումարենք բոլոր թվային արտադրիչները, ապա սկզբնական գումարը կպարզեցվի.*

$$6xy-3xy+xy-3xy+2xy=3xy.$$

Տրված գումարի այդպիսի ձևափոխությունը կոչվում է նման գումարելիների միացում։

Համանման օրինակներ արդեն դիտարկվել են նախորդ պարագրաֆում, բայց նման գումարելիների հասկացությունն այնտեղ չի մտցվել։

Բերենք այնպիսի գումարի օրինակ, որը պարունակում է երկու խումբ գումարելիներ և պարզեցնենք այդ գումարը.

$$5ax+12ax+3bx-6ax-ax+bx+8bx=(5ax+12ax-6ax-ax)+$$
$$+(3bx+bx+8bx)=10ax+12bx=2x(5a+6b).$$

Դիցուք պահանջվում է գտնել հետևյալ արտահայտության արժեքը.

$$2a(3b-5c)-2b(2c+3a)+5c(2a+b),$$ *երբ* $a=-3,2$, $b=12,5$, $c=-0,4$։

Նախ պարզեցնենք տվյալ արտահայտությունը. բացենք փակագծերը և միացնենք նման անդամները.

$$2a(3b-5c)-2b(2c+3a)+5c(2a+b)=(6ab-10ac)-(4bc+6ab)+$$
$$+(10ac+5bc)=6ab-10ac-4bc-6ab+10ac+5bc=bc.$$

Ստացված արտահայտության մեջ տեղադրենք փոփոխականների $12,5\cdot(-0,4)=-5$։ *տրված արժեքները և ստանանք պատասխանը.* *սկզբնական Ինչպես տեսանք,* $a=-3,2$ *արժեքը ավելորդ ստացվեց.* *փոփոխա- արտահայտության արժեքները կախված են միայն* b *և* c *կանների արժեքներից և բոլորովին կախված չեն* a *փոփոխականի արժեքից։*

Լուծենք $3(4x+5)-4(6-5x)-18x=33$ *հավասարումը։*

Ձևափոխենք հավասարման ձախ մասը.

$$12x+15-24+20x-18x=33։$$

Միացնենք նման գումարելիները. $14x-9=33$, $14x=42$, $x=3$։ Դա տրված հավասարման արմատն է։

Խնդիր։ Երկու թվերի գումարը հավասար է 100-ի, իսկ տարբերությունը՝ 2-ի։ Գտնել այդ թվերը։

Լուծում 1. Երկու թվերից մեծը նշանակենք x-ով, փոքր թիվը կարելի է նշանակել $100-x$-ով։ Քանի որ տարբերությունը հավասար է 2-ի, ուստի կարելի է կազմել x փոփոխականով հավասարում՝ $x-(100-x)=2$։

Լուծենք հավասարումը. $x-100+x=2$, $2x-100=2$, $2x=102$, $x=51$։ Այսպիսով, մեծ թիվը հավասար է 51-ի, իսկ փոքրը՝ $100-51=49$։

Եթե փոքր թիվը նշանակենք x-ով, իսկ մեծը՝ $100-x$-ով, ապա պետք է կազմել ուրիշ հավասարում. $(100-x)-x=2$, $100-2x=2$, $2x=98$, $x=49$, $100-x=51$։

Լուծում 2. Մեծ թիվը նշանակենք x-ով, իսկ փոքրը՝ $x-2$-ով։ Քանի որ դրանց գումարը հավասար է 100-ի, ուստի հավասարումը կլինի. $x+x-2=100$, $x=51$, $x-2=49$։ Եթե փոքր թիվը նշանակենք x-ով, իսկ մեծը՝ $x+2$-ով, ապա պետք է կազմել այլ հավասարում. $x+x+2=100$, $x=49$, $x+2=51$։

Եթե հայտնի է երկու թվերի գումարը և տարբերությունը, ապա մեծ թիվը հավասար է տրված գումարի և տարբերության կիսագումարին, իսկ փոքր թիվը՝ դրանց կիսատարբերությանը։

Վարժություններ

Միացրեք նման գումարելիները.

199. ա) $6a-3a+2a-5a+14a$, բ) $4x+5x-x+3x-x$,

200. ա) $8y+14y-9y-2y+10y$, բ) $4b+13b-5b-2b-10b$։

201. ա) $5ac-3bc+ac-2bc+4bc-3ac$,

բ) $4ax-6by+3by-2ax-2ax+4by$,

202. ա) $3ay-7bx-3bx+5ay+10bx-2ay$,

բ) $2ab+3ac-3ab+7ac-5ab-6ac$,

Բացեք փակագծերը և միացրեք նման գումարելիները.

203. ա) $(5x-4y)+(3y+4x)-(2x+7y)$,

բ) $(5a+3b)+(7b-4a)-(a-8b)$։

204. ա) $a(2b-c)+b(a+c)-c(a-b)$,

բ) $x(y+z)-y(x-z)+z(x-y)$։

Լուծեցեք հավասարումը.

205. ա) $2(4x-3)+3(7-2x)=13$,

բ) $4(2x+5)-5(6-x)=16$։

Լուծեցեք հավասարումը և բացատրեցեք.

206. ա) $3(5-2x)-2(7-3x)=1$,

բ) $2(4-3x)+3(2x-1)=6$։

Լուծեցեք խնդիրները.

207. Մի թիվ մյուսից մեծ է 5 անգամ և 0,428-ով։ Գտեք այդ թվերը։

208. Գտեք թվերը, եթե մեկը մյուսից մեծ է 7 անգամ, իսկ դրանց գումարը հավասար է 84-ի։

209. Գտեք այն թվերը, որոնցից մեկը կազմում է մյուսի $\frac{5}{9}$-ը և 102,4-ով փոքր է նրանից։

210. Երկու թվերի գումարը հավասար է 243,5-ի, իսկ տարբերությունը՝ 170,5-ի։ Գտեք այդ թվերը։

211. Տուրիստը երկու օրում անցավ 27,9 կմ, ընդ որում նա երկրորդ օրն անցավ 2,7 կմ քիչ, քան առաջին օրը։ Քանի՞ կիլոմետր անցավ տուրիստը յուրաքանչյուր օրում։

212. Երկու հեծանվորդներ միաժամանակ միմյանց ընդառաջ մեկնեցին երկու քաղաքներից, որոնց հեռավորությունը 75 կմ է։ Առաջինի արագությունը 13 կմ/ժ է, իսկ երկրորդինը՝ 12 կմ/ժ։ Մեկնելուց քանի՞ ժամ հետո նրանք կհանդիպեն։

213. Եռանկյան անկյունների մեծությունների գումարը հավասար է 180°-ի։ Գտեք այդ անկյունները, եթե դրանցից մեկի մեծությունը 6°-ով փոքր է երկրորդի մեծությունից և 15°-ով մեծ է երրորդի մեծությունից։

214. Մի կոճի վրա կար 178 մ հաղորդալար, իսկ երկրորդի վրա՝ 49 մ։ Որքան հաղորդալար պետք է կտրել առաջին կոճից, որպեսզի այնտեղ մնա երեք անգամ շատ, քան երկրորդի վրա։

215. Օրական երթուղու կեսը տուրիստը հեծանիվով անցավ 15 կմ/ժ արագությամբ, իսկ երկրորդ կեսը՝ 8 կմ/ժ արագությամբ։ Գտեք մեկ օրում տուրիստի անցած ճանապարհը, եթե նրա ընթացքը տևեց 6 ժ 54 ր։

216. Խառատը յուրաքանչյուր ժամում նորմայից ավելի պատրաստելով 6 դետալ, առաջադրանքը կատարեց 7 ժ-ում։ Խառատը ըստ նորմայի քանի՞ դետալ պետք է պատրաստեր 1 ժ-ում, եթե առաջադրանքը կազմում է 336 դետալ։

Ինքնուրույն աշխատանք №5

1. Խնդիր։ Եռանկյան կողմերից մեկի երկարությունը 5 սմ-ով մեծ է երկրորդ կողմի երկարությունից և 7 սմ-ով փոքր՝ երրորդի երկարությունից։ Գտեք եռանկյան կողմերի երկարությունները, եթե նրա պարագիծը հավասար է 131 սմ-ի։

2. Պարզեցրեք և գտեք արտահայտության արժեքը.

ա) $(2x-5y)-(4y-3x)+(5x+4y)-(7y+2x)$, երբ $x=-1$, $y=2$,

բ) $2a(3c+4b)-2b(5a-12c)+3c(5a-8b)$, երբ $a=3$, $b=-2$, $c=4$։

3. Լուծեցեք հավասարումը.

ա) $2(3x-5)-(7-2x)=-25$,

բ) $3(2x+5)-4(3x+2)=19$։

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ինչպե՞ս պետք է գտնել փոփոխական պարունակող արտահայտության արժեքը փոփոխականի տրված արժեքի դեպքում։ Բերեք այնպիսի արտահայտության օրինակ, որը փոփոխականի որոշ արժեքի դեպքում արժեք (իմաստ) չունենա։

2. Տրված են միևնույն փոփոխականը պարունակող երկու արտահայտություններ։ Այդ արտահայտությունների ո՞ր արժեքներն են կոչվում համապատասխան։ Ինչպիսի՞ երկու արտահայտություններ են կոչվում հավասար։

3. Ի՞նչ է նույնությունը։ Բերեք օրինակներ։

4. Ձևակերպեցեք երկու թվերի գումարման (բազմապատկման) տեղափոխական օրենքը և այն գրեցեք նույնության տեսքով։

5. Ձևակերպեցեք երեք թվերի գումարման (բազմապատկման) զուգորդական օրենքը և այն գրեցեք նույնության տեսքով։

6. Ձևակերպեցեք գումարման նկատմամբ բազմապատկման բաշխական օրենքը և այն գրեցեք նույնության տեսքով։

7. Չորս նույնության տեսքով գրեցեք գումարման և հանման նկատմամբ բազմապատկման և բաժանման բաշխական օրենքները։

8. Թվեցեք զրոյի և մեկի հիմնական հատկությունները նրանց հետ թվաբանական գործողություններ կատարելիս։

9. Ձևակերպեցեք առջևում պլյուս կամ մինուս նշան ունեցող փակագծերի բացման կանոնները։ Բերեք օրինակ։

10. Ինչու՞մն են կայանում ընդհանուր արտադրիչը փակագծերից դուրս բերման և նման գումարելիների միացման ձևափոխությունները։ Բերեք օրինակ։

ՈՒՂԻՂ ԵՎ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

§ 35. ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Բաղդատենք երկու թվեր, օրինակ, 9-ը և 2-ը։ Պարզ է, որ 9-ը 2-ից մեծ է 7 միավորով և որ 9-ը 2-ից մեծ է $4\frac{1}{2}$ անգամ։ $\frac{9}{2}$ կոտորակը նաև ինըի հարաբերությունն է 2-ին։ 9-ը և 2-ը հարաբերության անդամներն են. 9-ը նախորդ անդամն է, 2-ը՝ հաջորդ անդամը։ Երկու թվերի հարաբերությունը նույնն է, ինչ նրանց քանորդը (տես §16),

Անցնենք մեծությունների բաղդատմանը։

Բերենք մեծությունների մի քանի օրինակներ, դրանցից յուրաքանչյուրը նշանակելով ինչ-որ տառով, և նշենք այն միավորների անվանումները, որոնցով այդ մեծությունները կարող են չափվել։ Ահա դրանք՝ m-մարմնի զանգվածը (կգ-երով), V-մարմնի ծավալը (սմ³-երով), s-մարմնի անցած ճանապարհը (մ-երով), t-ժամանակի մի որևէ պահից մինչև մյուսը (ժ-երով)։

Ցանկացած երկու համասեռ մեծությունները (երկու զանգվածներ, երկու ճանապարհներ, երկու ծավալներ) կարելի է համեմատել միմյանց հետ։

Օրինակ 1։ Դիցուք ունենք ջրի երկու ծավալներ. մի անոթում $V_1=49$ սմ³ ջուր, իսկ մյուսում՝ $V_2=20$ սմ³։ Մեզ հետաքրքրում է միայն այնպիսի բաղդատումը, որը նշում է, թե մի մեծությունը քանի՞ անգամ է մեծ մյուսից կամ մի մեծության որ մասն է կազմում մյուսը։ Ընդունենք այսպիսի դարձվածներ՝ V_1 ծավալը հարաբերում է V_2 ծավալին այնպես, ինչպես 49-ը 20-ին։

Դա գրվում է այսպես.

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{49\,սմ^3}{20\,սմ^3}=2{,}45.$$

Կարելի է ասել նաև, որ ծավալների հարաբերությունը հավասար է 2,45-ի, կամ՝

$$V_1=2{,}45V_2.$$

Օրինակ 2։ Բաղդատել հետևյալ երկու մակերեսները՝ $S_1=900$ մ² և $S_2=6$ ար։

Ունենք.

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{900 մ^2}{6 ար}=\frac{9 ար}{6 ար}=1,5,$$

կամ

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{900 մ^2}{600 մ^2}=1,5։$$

Այսպիսով, տրված մակերեսների հարաբերությունը հավասար է 1,5-ի, կամ

$$S_1=1,5S_2։$$

Այս օրինակներից երևում է, որ միևնույն միավորներով չափվող երկու համասեռ մեծությունների հարաբերությունը թիվ է. միևնույն չափականությունները (այսինքն անվանումները) կրճատվում են։

Այժմ ցույց տանք, որ երկու տարասեռ (ոչ համասեռ) մեծությունների հարաբերությունը արդեն ոչ թե թիվ է, այլ ինչ-որ երրորդ մեծություն։

Օրինակ 3։ Առաջին անգամ 12ռ-ով գնել են 5մ գործվածք, իսկ երկրորդ անգամ՝ 9 ռ-ով 4մ գործվածք։ Առաջի՞ն, թե՞ երկրորդ անգամ են գնել ավելի թանկ գործվածք։ «Ավելի թանկ» բառերի տակ թաքնված է մի նոր մեծություն՝ գինը։ Տվյալ օրինակում գինը 1մ գործվածքի արժեքն է, իսկ ավելի ճշգրիտ, գնվածի արժեքի հարաբերությունը գործվածքի մետրերի թվին։ Ուստի առաջին անգամ գործվածքի գինը եղել է մետրը $\frac{12}{5}$ ռ, իսկ երկրորդ անգամ՝ մետրը $\frac{9}{4}$ ռ։

Քանի որ $\frac{12}{5}=2,4$, իսկ $\frac{9}{4}=2,25$, ուստի ավելի թանկ գործվածք գնել են առաջին անգամ. Նրա գինը ավելի բարձր է։

Օրինակ 4։ Երկու լիտր մեքենայի յուղն ունի 1,8 կգ զանգված, իսկ երեք լիտր բենզինը՝ 2,13 կգ զանգված։ Ո՞ր հեղուկն ունի ավելի մեծ խտություն։ Խտությունը դա մեկ լիտր հեղուկի զանգվածն է, իսկ ավելի ճշգրիտ՝ հեղուկի զանգվածի հարաբերությունը իր ծավալին։ Յուղի խտությունը հավասար է՝

$$\frac{1,8 կգ}{2 լ}=0,9\frac{կգ}{լ} \text{ կամ } 0,9\frac{գ}{սմ^3},$$

իսկ բենզինի խտությունը՝

$$\frac{2,13\ կգ}{3\ լ} = 0,71\ \frac{կգ}{լ}\ կամ\ 0,71\ \frac{գ}{սմ^3}\ ։$$

Այնպես որ մեքենայի յուղն ունի ավելի մեծ խտություն, քան բենզինը։

Օրինակ 5: Գնացքը 218 կմ ճանապարհն անցավ 3 ժ-ում, իսկ մարդատար մեքենան 5 կմ-ն անցավ 4 ր-ում։ Գնա՞ցքը, թե՞ մեքենան գնաց ավելի արագ։

Այստեղ պետք է հիշել ուղղագիծ շարժման արագության սահմանումը։ Արագությունը դա միավոր ժամանակում անցած ճանապարհն է, իսկ ավելի ճշգրիտ, անցած ճանապարհի հարաբերությունը ընթացքի տևողությանը։

Գնացքի արագությունը հավասար է $\frac{218\ կմ}{3\ ժ} \approx 72,7 \frac{կմ}{ժ}$, իսկ մեքենայի արագությունը՝ $\frac{5\ կմ}{4\ ր} = \frac{5 \cdot 60}{4}\frac{կմ}{ժ} = 75\frac{կմ}{ժ}$։ Այնպես որ ավտոմեքենան գնացել է գնացքից ավելի արագ. նրա արագությունը ավելի մեծ է։

Այսպիսով, երկու տարասեռ մեծությունների հարաբերությունը իրենից ներկայացնում է մի նոր մեծություն, որն ունի կոնկրետ չափականություն։ Այդպիսին են, օրինակ, ապրանքի գինը, նյութի խտությունը, շարժման արագությունը, բնակչության խտությունը (բնակիչների թիվը 1 կմ² տարածքի վրա), աշխատանքի արտադրողականությունը (1 ժ-ում պատրաստված դետալների թիվը)։

Կոնկրետ չափականություն ունեցող համասեռ մեծությունները ևս կարելի է համեմատել միմյանց հետ, և եթե նրանք չափված են միևնույն միավորներով, ապա նրանց հարաբերությունը նույնպես թիվ է։

Վարժություններ

217. Հայտնի են մոլորակների հեռավորությունները Արեգակից (մլն. կմ-երով). Վեներայի հեռավորությունն է 108, Երկրինը՝ 150, Մարսինը՝ 228։ Հաշվեցեք Վեներայի հեռավորության հարաբերությունը Երկրի հեռավորությանը և Մարսի հեռավորության հարաբերությունը Երկրի հեռավորությանը։

218. Հայտնի են մոլորակների տրամագծերի երկարությունները (ըստ նրանց հասարակածների) (հզ. կմ-երով). Մարսինն է 6,78, Վեներայինը՝ 12,40, Երկրինը՝ 12,76։ Հաշվեցեք Մարսի տրամագծի հարաբերությունը Երկրի տրամագծին և Երկրի տրամագծի հարաբերությունը Վեներայի տրամագծին։

219. Հայտնի են նյութերի խտությունները մոտ 20° ջերմաստիճանում $\left(\frac{գ}{սմ^3}\text{-երով}\right)$. պղնձինն է 8,9, արծաթինը՝ 10,5, ոսկունը՝ 19,3, պլատինինը՝ 21,5։ Հաշվեցեք պղնձի խտության հարաբերությունը արծաթի խտությանը և ոսկու խտության հարաբերությունը պլատինի խտությանը։

220. Հայտնի են ջրի և սնդիկի խտությունները $\left(\frac{գ}{սմ^3}\text{-երով}\right)$ տարբեր ջերմաստիճաններում. 0°C-ում ջրի խտությունն է 0,99, իսկ սնդիկինը՝ 13,60, 60°C-ում՝ համապատասխանաբար 0,98 և 13,45, 100°C-ում՝ համապատասխանաբար 0,96 և 13,35։ Հաշվեցեք սնդիկի խտության հարաբերությունը ջրի խտությանը 0°, 60° և 100° ջերմաստիճաններում։

§ 36. ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆ

Այժմ դառնանք թվերի հարաբերությանը և մուծենք մի կարևոր հասկացություն։

Սահմանում։ **Երկու հարաբերությունների հավասարությունը կոչվում է համեմատություն:**

$$\frac{6}{9}=\frac{8}{12} \text{ կամ } 6:9=8:12։$$

Համեմատությունը կարդացվում է այսպես. 6-ը հարաբերում է 9-ին այնպես, ինչպես 8-ը 12-ին։

Համոզվենք, օրինակ, որ $57:95=69:115$ համեմատությունը ճիշտ է։ Ունենք. $\frac{57}{95}=\frac{3\cdot19}{5\cdot19}=\frac{3}{5}$, $\frac{69}{115}=\frac{3\cdot23}{5\cdot23}=\frac{3}{5}$, $\frac{57}{95}$ և $\frac{69}{115}$ հարաբերություններից յուրաքանչյուրը հավասար է միևնույն $\frac{3}{5}$ թվին, ուստի տրված հավասարությունը ճիշտ է, այսինքն՝ համեմատությունը ճիշտ է։ Ընդհակառակը, $\frac{3}{8}=\frac{6}{17}$ համեմատությունը սխալ է (որը սխալ թվային հավասարություն է)։

Հետագայում հակիրճության համար «համեմատություն» ասելով նկատի կունենանք ճիշտ համեմատություն (բայց եթե առանձին դեպքերում կծագեն անորոշություններ, ապա կավելացնենք «ճիշտ» բառը)։

Դիցուք $\frac{a}{b}$-ն և $\frac{c}{d}$-ն երկու հավասար հարաբերություններ են ($b \neq 0$, $d \neq 0$)։ Դրանք միացնենք հավասարության նշանով, կստանանք հետևյալ համեմատությունը.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\text{։}$$

Այս համեմատությունում a-ն առաջին հարաբերության նախորդ անդամն է, իսկ b-ն՝ հաջորդ անդամը, c-ն երկրորդ հարաբերության նախորդ անդամն է, իսկ d-ն՝ հաջորդ անդամը։ a-ն և d-ն համեմատության ծայրանդամներն են, իսկ b-ն և c-ն՝ միջնանդամները։ Եթե այս երկու հարաբերություններից յուրաքանչյուրը հավասար է միևնույն k թվին, ապա կարելի է գրել $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$։

Համեմատություններն օժտված են հետևյալ հիմնական հատկությամբ։

Թեորեմ։ **Ամեն մի համեմատության (ճիշտ) ծայրանդամների արտադրյալը հավասար է միջնանդամների արտադրյալին:**

Տրված է՝ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$։ Պահանջվում է ապացուցել, որ $ad = bc$։

Ապացույց։ Դիցուք $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$։

$\frac{a}{b} = k$ հավասարությունից հետևում է, որ $a = kb$։ Այս հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով d-ով, կստանանք՝ $ad = kbd$։ Այնուհետև, $\frac{c}{d} = k$ հավասարությունից հետևում է, որ $c = kd$։ Այս հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով b-ով, կստանանք՝ $bc = kbd$։ Այսպիսով, $ad = kbd$ և $bc = kbd$, ուստի $ad = bc$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. եթե մի զույգի a և d թվերի արտադրյալը հավասար է մյուս զույգի b և c թվերի արտադրյալին և բոլոր չորս թվերը տարբեր են զրոյից, ապա այդ թվերից կարելի է կազմել ճիշտ համեմատություն։ Մի զույգի թվերը կկազմեն համեմատության ծայրանդամները, իսկ մյուս զույգի թվերը՝ միջնանդամները։

Դա դիտարկենք օրինակներով։

Օրինակ 1: *57, 115, 69 և 95 թվերից կազմել որևէ համեմատություն։*

Քանի որ $57 \cdot 115 = 3 \cdot 19 \cdot 5 \cdot 23$, $69 \cdot 95 = 3 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 19$, ապա $57 \cdot 115 = 69 \cdot 95$։

Ստացված հավասարության երկու մասերը բաժանենք տարբեր զույգերից վերցրած երկու թվերի արտադրյալի վրա, օրինակ, $115 \cdot 95$-ի վրա։ Կստանանք՝

$$\frac{57 \cdot 115}{115 \cdot 95} = \frac{95 \cdot 69}{115 \cdot 95}, \text{ կամ } \frac{57}{95} = \frac{69}{115};$$

Համեմատությունը կազմված է։

Օրինակ 2: *Կարելի՞ է արդյոք համեմատություն կազմել 91, 133, 143 և 209 թվերից։ Եթե այո, ապա կազմել բոլոր հնարավոր համեմատությունները։*

Լուծում։ $91 = 7 \cdot 13$, $133 = 7 \cdot 19$, $143 = 11 \cdot 13$, $209 = 11 \cdot 19$։ Ուստի $91 \cdot 209 = 133 \cdot 143$, և հետևաբար համեմատություն կազմել հնարավոր է։

91 և 209 թվերը դարձնենք համեմատության ծայրանդամներ, կստանանք չորս համեմատություն.

$$1)\ \frac{91}{133} = \frac{143}{209}, \qquad 3)\ \frac{209}{133} = \frac{143}{91},$$

$$2)\ \frac{91}{143} = \frac{133}{209}, \qquad 4)\ \frac{209}{143} = \frac{133}{91};$$

Այժմ ենթադրենք, թե մենք գիտենք համեմատության միայն երեք անդամները։ Համեմատության չորրորդ՝ անհայտ, անդամը նշանակենք x-ով և ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է այն հաշվել։

Օրինակ 3: Վերցնենք $855 : 72 = 285 : x$ համեմատությունը։ Կիրառելով հիմնական հատկությունը, կստանանք.

$$855 \cdot x = 72 \cdot 285;$$

Քանի որ յուրաքանչյուր արտադրիչը հավասար է արտադրյալին՝ բաժանած մյուս արտադրիչի վրա, ուստի.

$$x = \frac{72 \cdot 285}{855} = 24;$$

Սկզբնական համեմատությունը ընդունում է այսպիսի տեսք.

$$855 : 72 = 285 : 24;$$

Այսպիսով, համեմատության անհայտ ծայրանդամը հաշվելու համար պետք է նրա միջնանդամների արտադրյալը բաժանել հայտնի ծայրանդամի վրա:

Օրինակ 4: *Տրված է հետևյալ համեմատությունը.*

$$0{,}03 : x = 2\frac{2}{3} : 1\frac{7}{9};$$

Համաձայն հիմնական հատկության, կարող ենք գրել՝

$$2\frac{2}{3} \cdot x = 0{,}03 \cdot 1\frac{7}{9},$$

$$x = \frac{0{,}03 \cdot 1\frac{7}{9}}{2\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{100} \cdot \frac{16}{9}\right) : \frac{8}{3} = 0{,}02;$$

Սկզբնական համեմատությունը ընդունում է այսպիսի տեսք.

$$0{,}03 : 0{,}02 = 2\frac{2}{3} : 1\frac{7}{9};$$

Այսպիսով, համեմատության միջնանդամը հաշվելու համար պետք է ծայրանդամների արտադրյալը բաժանել հայտնի միջնանդամի վրա:

Վարժություններ

Հետևյալ թվերից կազմեցեք համեմատություն.

221. *ա)* 3, 7, 33, 77, *բ)* 7, 9, 63, 81:

222. *ա)* 5, 7, 65, 91, *բ)* 5, 9, 45, 81:

Գտեք համեմատության անհայտ անդամը.

223. *ա)* $7 : x = 9 : 225$, *բ)* $100 : 15 = x : 24$;

224. *ա)* $x : 84 = 3 : 36$, *բ)* $2 : 18 = 4 : x$;

225. *ա)* $21 : 6 = a : 2$, *բ)* $12 : a = 15 : 55$;

226. *ա)* $18 : 4{,}8 = 40 : b$, *բ)* $b : 4{,}9 = 12 : 3$;

227. *ա)* $3{,}5 : y = 2\frac{1}{3} : 3\frac{1}{4}$, *բ)* $\frac{7}{9} : 3{,}1 = y : 9{,}3$;

Լուծեցեք համեմատության տեսք ունեցող հետևյալ հավասարումը.

228. *ա)* $3x : 4\frac{1}{6} = 22{,}5 : 13\frac{8}{9}$, *բ)* $1\frac{1}{7} : 1{,}5 = \frac{6}{7} : 2x$;

229. ա) $2\frac{2}{9} : 4x = 3\frac{1}{3} : 1,2$, բ) $4\frac{2}{7} : 22,5 = 53\frac{1}{3} : 7x$։

§ 37. ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՈՒՂԻՂ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիտարկենք մի օրինակ։ Դիցուք 3 մ գործվածքի համար վճարել են 4 ռ. 50 կ.։ Եթե այդ գործվածքներից գնեն երկու անգամ շատ, ապա հարկ կլինի վճարել երկու անգամ շատ դրամ. 6 մ գործվածքն արժե արդեն 9 ռ.։ Եթե վճարել են հինգ անգամ շատ դրամ, ուրեմն այդ գործվածքներից գնել են հինգ անգամ շատ. 22 ռ. 50 կ-ով կարելի է գնել 15 մ գործվածք։

Դիցուք p փոփոխականը նշանակում է գնվելիք նույն տեսակի գործվածքի քանակությունը (մ-երով), իսկ q փոփոխականը՝ գնվածի արժեքը (ռուբլիներով)։ Կազմենք p և q փոփոխականների մի քանի արժեքների աղյուսակ.

p	2	3	6	15
q	3	4,5	9	22,5

2 և 3, 3 և 4, 5, 6 և 9 և այլն արժեքները կանվանենք p և q փոփոխականների համապատասխան արժեքներ (տես §30)։ Բերված աղյուսակում համապատասխան արժեքները գտնվում են միևնույն սյունակում՝ մեկը մյուսի վրա (կամ տակ)։

Աղյուսակից երևում է, որ փոփոխականների համապատասխան արժեքների ցանկացած զույգի համար $\frac{p}{q}$ հարաբերությունն ունի միևնույն արժեքը.

$$\frac{4,5}{3} = \frac{9}{6} = \frac{22,5}{15} = 1,5.$$

Ուստի կարելի է գրել, որ $\frac{p}{q} = 1,5$, կամ $q = 1,5p$։

Այդպիսի երկու փոփոխականները կոչվում են **ուղիղ համեմատական**, իսկ նրանց հարաբերությունը՝ ուղիղ համեմատականության **գործակից**։

Բերված խնդրում նույն տեսակի գործվածքի քանակությունը և նրա արժեքը ուղիղ համեմատական մեծությունների օրինակ են. մեկ մետր

գործվածքի արժեքը ուղիղ համեմատականության գործակիցն է։

Սահմանում։ y փոփոխականը կոչվում է x փոփոխականին **ուղիղ համեմատական (համեմատական)**, եթե $y = kx$, որտեղ k-ն զրոյից տարբեր թիվ է. այդ թիվը կոչվում է **ուղիղ համեմատականության գործակից** (*համեմատականության գործակից*):

$y = kx$, $k \neq 0$ բանաձևից հետևում է, որ $x = \frac{1}{k} y$։ Ուստի, եթե y փոփոխականը x փոփոխականին համեմատական է k գործակցով, ապա x փոփոխականը ևս համեմատական է y փոփոխականին, բայց $\frac{1}{k}$ գործակցով։ Այսպիսով, կարելի է խոսել x և y կամ y և x երկու փոփոխականների համեմատականության մասին։

$y = kx$, $k \neq 0$ բանաձևից հետևում է, որ $\frac{y}{x} = k$ (եթե $x \neq 0$)։

Ուստի երկու համեմատական մեծությունների հարաբերությունը հավասար է զրոյից տարբեր միևնույն թվին։

Համեմատական փոփոխականները օժտված են հետևյալ կարևոր հատկությամբ։

Դիցուք, x_1-ը և y_1-ը, ինչպես և x_2-ը և y_2-ը x և y համեմատական փոփոխականների երկու զույգ համապատասխան արժեքներ են։ Եթե y փոփոխականը համեմատական է x փոփոխականին, ապա $\frac{y}{x}$ հարաբերությունը հաստատուն է համապատասխան արժեքների ցանկացած զույգի համար, որեմն և ճիշտ է հետևյալ համեմատությունը․

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

Փոխելով միջին անդամների տեղերը, կստանանք նոր համեմատություն.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

Դա նշանակում է, որ համեմատական փոփոխականներից մեկի ցանկացած երկու արժեքների հարաբերությունը հավասար է մյուս փոփոխականի համապատասխան արժեքների հարաբերությանը:

Երկու համեմատությունները էլ հաճախ են օգտագործվում խնդիրներ լուծելիս։

Եթե երկու համեմատական մեծություններ ընդունում են դրական արժեքներ, ապա կարելի է ասել, որ մի փոփոխականի արժեքները մի քանի անգամ մեծացնելիս (փոքրացնելիս) մյուս փոփոխականի համապատասխան արժեքները մեծանում են (փոքրանում են) նույնքան անգամ։

Բերենք համեմատական մեծությունների մի քանի օրինակներ։

1) Եթե ձողն այնպիսին է, որ նրա միևնույն երկարությամբ յուրաքանչյուր հատվածում կենտրոնացված է միևնույն զանգվածը, ապա ձողը կոչվում է համասեռ։ Այդպիսի ձողի ցանկացած հատվածի զանգվածի հարաբերությունը այդ հատվածի երկարությանը կոչվում է ձողի խտություն։ Այսպիսով, համասեռ է կոչվում այն ձողը, որի խտությունը հաստատուն է։ Համասեռ ձողի զանգվածը համեմատական է նրա երկարությանը, իսկ խտությունը համեմատականության գործակիցն է։

2) Դիցուք գնդիկը որոշ ուժի ազդեցության տակ ուղղագիծ շարժվում է որևէ առանցքի երկարությամբ։ (Առանցքը մի ուղիղ է, որի վրա ընտրված է ուղղություն)։ Ենթադրենք, թե s ճանապարհը չափվում է սանտիմետրերով, իսկ t ժամանակը՝ վայրկյաններով։

Դիցուք գնդիկի շարժումը տեղի է ունենում առանցքի ուղղությամբ։ $S=3t$ բանաձևը ցույց է տալիս, շարժման արագությունը հաստատուն մեծություն է և հավասար է 3 սմ/վ-ի ($v=3$)։

Դիցուք գնդիկի շարժումը տեղի է ունենում առանցքի ուղղությանը հակառակ։ $S=-2t$ բանաձևը ևս ցույց է տալիս, որ արագությունը հաստատուն է, բայց այն հավասար է -2 սմ/վ-ի ($v=-2$)։

Ուղղագիծ շարժումը կոչվում է հավասարաչափ, եթե նրա արագությունը հաստատուն մեծություն է։ Այսպիսով, ուղղագիծ հավասարաչափ շարժման դեպքում ճանապարհը համեմատական է շարժման ժամանակին, իսկ համեմատականության գործակիցը արագությունն է։

3) Շրջանագծի երկարությունը համեմատական է իր տրամագծի երկարությանը։ Համեմատականության գործակիցն է π («պի») թիվը։ Ճիշտ է $C=\pi D$ բանաձևը, որտեղ $\pi\approx3{,}14$։

Անցնենք մեծությունների համեմատականության վերաբերյալ խնդիրների լուծմանը։

Խնդիր։ Մեքենագրուհին 30 էջը տպեց 5 ժամում։ Նա որքա՞ն ժամանակում կտպի 48 էջը աշխատանքի նույն արտադրողականության դեպքում։

Լուծում։ t-ով նշանակենք ժամանակը (ժ-երով), իսկ m-ով՝ մեքենագիր էջերի թիվը։ Աշխատանքի ծավալը և նրա կատարման համար ծախսված ժամանակը համեմատական մեծություններ են, այսինքն, m-ը և t-ն համեմատական փոփոխականներ են։ Կազմենք փո-

փոփոխականների համապատասխան արժեքների աղյուսակ։ Որոնելի ժամանակը նշանակենք x-ով (ժ-երով).

m	30	48
t	5	x

1-ին եղանակ։ m փոփոխականի որևէ երկու արժեքների հարաբերությունը պետք է հավասար լինի t փոփոխականի երկու համապատասխան արժեքների հարաբերությանը.

$$\frac{48}{30}=\frac{x}{5},\ x=\frac{48\cdot 5}{30}=8։$$

Պատասխան. 8 ժ։

2-րդ եղանակ։ m և t փոփոխականների ցանկացած երկու արժեքների հարաբերությունն ունի միևնույն արժեքը։ Այստեղից հետևում է, որ.

$$\frac{5}{30}=\frac{x}{48},\ x=8։$$

Պատասխան. 8 ժ։

Հետագա խնդիրները սովորողները կարող են լուծել նշված եղանակներից ցանկացածով։ Համապատասխան արժեքների աղյուսակների կազմումը միանգամայն ցանկալի է։

Վարժություններ

230. Լրացրեք աղյուսակը, եթե հայտնի է, որ y փոփոխականը համեմատական է x փոփոխականին և համեմատականության գործակիցը հավասար է 3,2-ի.

x	−4,5	−2,7	1,3	2,5	6,3
y					

231. Լրացրեք աղյուսակը, եթե հայտնի է, որ x և y փոփոխականները համեմատական են.

x	−3,5		4,9		8,4
y		2,4	5,6	−7,2	

232. Գնացքը 3 ժ 20 ր-ում անցավ 200 կմ։ Նույն միջին արագությամբ գնալով գնացքը ի՞նչ հեռավորություն կանցնի 2 ժ 30 ր-ում, 5 ժ 12 ր-ում, 4 ժ 25 ր-ում։

233. 535,5 գ զանգվածով արույրե ձողն ունի 63 սմ^3 ծավալ։ Ի՞նչ ծավալ կունենա արույրե ձողը, եթե նրա զանգվածը հավասար է 459 գ, 884 գ, 646 գ։

234. Օգտագործելով նոր հարմարանք, խառատը 7-ժամյա աշխատանքային օրում կատարեց 2,1 օրական նորման։ Խառատը քանի՞ ժամում կատարեց օրվա առաջադրանքը։

235. Կատարելով 25 պտույտ, պտուտակը առաջ շարժվեց 32,5 մմ։ Պտուտակը քանի՞ պտույտ կատարելով առաջ կշարժվի 49,4 մմ։

236. 16 մ^2 մանրահատակը լաքապատելու համար պահանջվում է 4,8 կգ լաք։ Որքա՞ն լաք կպահանջվի 24 մ երկարություն և 12 մ լայնություն ունեցող շինության հատակը լաքապատելու համար։

237. 60 կգ հաց թխելու համար ծախսվում է 43,5 կգ ալյուր։ Որքա՞ն նույնպիսի ալյուր կպահանջվի 200 կգ նույն տեսակի հաց թխելու համար։

§ 38. ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԲԱԺԱՆՈՒՄ

Նախորդ պարագրաֆում մենք լուծեցինք երկու փոփոխականների համեմատության վերաբերյալ այնպիսի խնդիրներ, որոնցում դիտարկվում էին այդ փոփոխականների երկու զույգ համապատասխան արժեքներ։ Այժմ կլուծենք այնպիսի խնդիրներ, որոնցում կդիտարկվեն երկու համեմատական փոփոխականների համապատասխան արժեքների երկու, երեք և նույնիսկ չորս զույգեր։

Խնդիր 1։ Երեք բանվոր աշխատելով նույն արտադրողականությամբ, որոշ աշխատանքի համար ստացան 15 ռ. 60 կ.։ Առաջին բանվորն աշխատեց 3 ժ, երկրորդը՝ 6 ժ, իսկ երրորդը՝ 4 ժ։ Որքա՞ն դրամ պետք է ստանա յուրաքանչյուր բանվորը։

Լուծում։ 1-ին եղանակ։ Ամբողջ աշխատանքը կատարվել է 13 ժ-ում $(3 + 6 + 4 = 13)$, որի համար վճարվել է 15,6 ռ։ Ուստի մեկ աշխատանքային ժամի գինը կազմում է $\frac{15{,}6}{13}$ ռ., այսինքն՝ 1,2 ռ.։ Հետևաբար առաջին բանվորը կստանա $1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6$ (ռ.), երկրորդը՝ $1{,}2 \cdot 6 = 7{,}2$ (ռ.), իսկ երրորդը՝ $1{,}2 \cdot 4 = 4{,}8$ (ռ.)։

Ստուգում. $3{,}6 + 7{,}2 + 4{,}8 = 15{,}6$ (ռ.)։

2-րդ եղանակ։ x-ով նշանակենք աշխատավարձը, իսկ y-ով՝ աշխատաժամերի թիվը։ y փոփոխականը ընդունում է 3, 6 և 4

արժեքները, իսկ x փոփոխականի համապատասխան արժեքները մեզ հայտնի չեն։ Դրանք նշանակենք x_1, x_2, x_3։ x և y փոփոխականները համեմատական են։ Կազմենք դրանց համապատասխան արժեքների աղյուսակը.

x	x_1	x_2	x_3
y	3	6	4

Համեմատականության գործակիցը նշանակենք k տառով և գրենք հետևյալ հավասարությունները.

$$\frac{x_1}{3}=\frac{x_2}{6}=\frac{x_3}{4}=k.$$

$\frac{x_1}{3}=k$, $\frac{x_2}{6}=k$, $\frac{x_3}{4}=k$ հավասարություններից հաջորդաբար կստանանք. $x_1=3k$, $x_2=6k$, $x_3=4k$։ Անդամ առ անդամ գումարելով բոլոր երեք հավասարությունները, կստանանք. $x_1+x_2+x_3=13k$։ Ըստ պայմանի՝ $x_1+x_2+x_3=15{,}6$։ Հետևաբար, $15{,}6=13k$, որտեղից $k=1{,}2$։

Այժմ գտնենք x փոփոխականի որոնելի արժեքները. $x_1=3k=3{,}6$, $x_2=6k=7{,}2$, $x_3=4k=4{,}8$։

x-ի և y-ի համապատասխան արժեքների աղյուսակը կընդունի հետևյալ տեսքը.

x	3,6	7,2	4,8
y	3	6	4

Պատասխանը նույնն է. 3 ռ. 60 կ., 7 ռ. 20 կ., 4 ռ. 80 կ.։

Խնդիր 2: Երեք բանվոր կատարեցին որոշ աշխատանք։ Առաջինի աշխատանքային օրերի թիվը հարաբերում է երկրորդի աշխատանքային օրերի թվին, ինչպես 3 : 5, իսկ երկրորդի աշխատանքային օրերի թիվը հարաբերում է երրորդի աշխատանքային օրերի թվին, ինչպես 5 : 4։ Քանի՞ օր աշխատեց յուրաքանչյուր բանվորը, եթե նրանք աշխատեցին ընդամենը 36 օր։

Լուծում: Որոնելի աշխատանքային օրերի թիվը նշանակենք x_1, x_2, x_3։ Ըստ պայմանի՝

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{3}{5}, \quad \frac{x_2}{x_3}=\frac{5}{4},$$

Համեմատությունները գրենք այսպիսի տեսքով.

$$\frac{x_1}{3}=\frac{x_3}{5}, \quad \frac{x_2}{5}=\frac{x_3}{4},$$

Այսպիսով՝

$$\frac{x_1}{3}=\frac{x_2}{5}=\frac{x_3}{4},$$

Դիցուք $\frac{x_1}{3}=\frac{x_2}{5}=\frac{x_3}{4}=k$:

Այստեղից կգտնենք՝ $x_1=3k$, $x_2=5k$, $x_3=4k$, $12k=36$, $k=3$:
Այսպիսով, $x_1=9$, $x_2=15$, $x_3=12$:

Պատասխան. 9,15 և 12 օր:

$$\frac{x_1}{a}=\frac{x_2}{b}=\frac{x_3}{c}$$

տեսքի հավասարությունները պայմանավորվենք կարդալ այսպես. x_1, x_2, x_3 *թվերը համեմատական են* a, b *և* c *թվերին: Այժմ կարելի է ասել, որ նախորդ խնդրի լուծումը հանգեցվեց 36 թիվը 3 այնպիսի մասերի բաժանման (տրոհման), որոնք համեմատական են 3, 5 և 4 թվերին:*

Խնդիր 3: *162,5 թիվը բաժանել 3 մասի այնպես, որ առաջին մասը հարաբերի երկրորդին, ինչպես 5 : 6, իսկ երկրորդը՝ երրորդին, ինչպես 8 : 7:*

Լուծում: Որոնելի մասերը նշանակենք x_1, x_2, x_3: *Ըստ պայմանի՝*

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{5}{6}, \quad \frac{x_2}{x_3}=\frac{8}{7}:$$

Համեմատությունները գրենք այսպես. $\frac{x_1}{5}=\frac{x_2}{6}$, $\frac{x_2}{8}=\frac{x_3}{7}$:

Հավասարեցնենք այն հարաբերությունների հաջորդ անդամները, որոնց նախորդ անդամները հավասար են x_2*-ի: 6 և 8 թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է 24-ի:*

Առաջին համեմատության երկու հաջորդ անդամները բազմապատկելով 4-ով, իսկ երկրորդ համեմատությունը՝ 3-ով, կստանանք.

$$\frac{x_1}{20}=\frac{x_2}{24}, \quad \frac{x_2}{24}=\frac{x_3}{21},$$

Այժմ արդեն կարելի է գրել այսպիսի համամասնությունները.

$$\frac{x_1}{20}=\frac{x_2}{24}=\frac{x_3}{21}=k:$$

Մենք հանգեցինք 162,5 թիվը 20, 24 և 21 թվերին համեմատական մասերի բաժանելու խնդրին: Ունենք. $x_1=20k$, $x_2=24k$, $x_3=21k$, $65k=162,5$, $k=2,5$:

Այսպիսով, $x_1=50$, $x_2=60$, $x_3=52,5$:

Պատասխան. 50, 60 և 52,5:

Վարժություններ

a թիվը բաժանենք m, n և p թվերին համեմատական մասերի.

238. *ա)* $a=218,4$, $m=5$, $n=3$,

բ) $a=302,4$, $m=3$, $n=4$, $p=5$:

239. *ա)* $a=271,8$, $m=2$, $n=7$,

բ) $a=275,6$, $m=2$, $n=7$, $p=4$:

240. Զոդանյութը բաղկացած է մեկ մաս կապարից և երկու մաս անագից: Որքա՞ն կապար և անագ է հարկավոր 3,6 կգ զոդանյութ պատրաստելու համար:

241. Համաձուլվածքը կազմված է 3 մաս պղնձից և 2 մաս անագից: Որքա՞ն պղինձ և անագ կպահանջվի 3 կգ համաձուլվածք ստանալու համար:

242. Բաբիտը բաղկացած է պղնձից, անագից և ծարիրից, որոնց զանգվածները համեմատական են 1, 8, 2 թվերին: Այս նյութերից որքա՞ն է հարկավոր 154 կգ բաբիտ ստանալու համար:

243. Հոր և որդու տարիքները միասին կազմում են 54 տարի: Հոր տարիքը հարաբերում է որդու տարիքին, ինչպես 7:2: Քանի՞ տարեկան է որդին և քանի՞ տարեկան հայրը:

244. Մոր և աղջկա տարիքները միասին կազմում են 33 տարի: Մոր տարիքը հարաբերում է աղջկա տարիքին, ինչպես 9:2: Գտեք մոր և աղջկա տարիքները:

245. 12,4 մ երկարությամբ հաղորդալարը կտրել են 3 մասի այնպես, որ առաջին մասի երկարությունը հարաբերում է երկրորդ մասի երկարությանը, ինչպես 3:5, իսկ երկրորդ մասի երկարությունը՝ երրորդ մասի երկարությանը, ինչպես 2:3: Գտեք յուրաքանչյուր հատվածի երկարությունը:

246. Այգում աճում է խնձորենի, տանձենի և սալորենի, ընդամենը 516 ծառ: Խնձորենիների թիվը հարաբերում է սալորենիների թվին,

ինչպես 5 : 4, իսկ տանձենիների թիվը հարաբերում է սալորենիների թվին, ինչպես 4 : 3։ Այգում քանի՞ ծառ կա յուրաքանչյուր տեսակից։

§ 39. ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Մենք ծանոթացանք այնպիսի մեծությունների, որոնք միմյանց հետ գտնվում են ուղիղ համեմատական կախման մեջ։ Անցնենք երկու մեծությունների միջև այլ տիպի կախումների դիտարկմանը։ Ինչպես սովորաբար, սկսենք օրինակից։

Ենթադրենք, թե ունենք 600 տետր, որոնք պետք է հավասարապես բաժանել սովորողներին։ Օրինակ, եթե կա 40 սովորող, ապա յուրաքանչյուրը կստանա 15 տետր։ Եթե սովորողները լինեն 1,5 անգամ շատ, ապա յուրաքանչյուրը կստանա 1,5 անգամ քիչ տետր, 60 սովորողները կստանան արդեն 10-ական տետր։

Դիցուք m փոփոխականը նշանակում է սովորողների թիվը, իսկ n փոփոխականը՝ յուրաքանչյուր սովորողին հասնող տետրերի թիվը։ Կազմենք m և n փոփոխականների որոշ արժեքների աղյուսակ։

m	20	40	50	60
n	30	15	12	10

20 և 30, 40 և 15, 50 և 12 և այլն արժեքները կանվանենք, ինչպես և առաջ, m և n փոփոխականների համապատասխան արժեքներ։ Նշված աղյուսակում դրանք գտնվում են միևնույն սյունակում։

Աղյուսակից երևում է, որ փոփոխականների mn արտադրյալը համապատասխան արժեքների ցանկացած զույգի համար ունի միևնույն արժեքը.

$$20 \cdot 30 = 40 \cdot 15 = 50 \cdot 12 = 600։$$

Ուստի կարելի է գրել, որ $mn = 600$, կամ $n = \frac{600}{m}$։

Այսպիսի երկու փոփոխականները կոչվում են հակադարձ համեմատական, իսկ նրանց արտադրյալը՝ հակադարձ համեմատականության գործակից։ Տվյալ օրինակում այդ գործակիցը հավասար է 600-ի։

Այսպիսով, եթե սովորողներին բաժանելու տետրերի թիվը միանգամայն որոշակի է, ապա սովորողների քանակը և նրանցից յուրաքանչյուրին հասնող տետրերի քանակը հակադարձ համեմատական մեծությունների օրինակ են։

Սահմանում։ Երկու փոփոխականներ կոչվում են հակադարձ

համեմատական, եթե նրանց արտադրյալը հավասար է զրոյից տարբեր միևնույն թվին. այդ թիվը կոչվում է հակադարձ համեմատականության գործակից:

x և y փոփոխականների հակադարձ համեմատականության գործակիցը նշանակելով k-ով, կստանանք.

$$xy = k \text{ կամ } y = \frac{k}{x}, \ k \neq 0.$$

$y = \frac{k}{x}$ հավասարությունը x և y փոփոխականների հակադարձ համեմատականության բանաձևն է:

Հակադարձ համեմատական փոփոխականները օժտված են հետևյալ կարևոր հատկությամբ:

Դիցուք x_1-ը և y_1-ը, ինչպես նաև x_2-ը և y_2-ը x և y հակադարձ համեմատական փոփոխականների համապատասխան արժեքների զույգեր են: Քանի որ xy արտադրյալը հաստատուն է համապատասխան արժեքների ցանկացած զույգի համար, ուստի ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$x_1y_1 = x_2y_2.$$

Քանի որ այդ թվերը զրոյից տարբեր են ($k \neq 0$), ուստի կարելի է գրել

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

ճիշտ համեմատությունը: Նկատի ունենալով, որ $\frac{y_2}{y_1} = 1 : \frac{y_1}{y_2}$, կարելի է անել հետևյալ եզրակացությունը:

Հակադարձ համեմատական փոփոխականներից մեկի ցանկացած երկու արժեքների հարաբերությունը հավասար է մյուս փոփոխականի համապատասխան արժեքների հակադարձ հարաբերությանը:

x և y փոփոխականների համապատասխան արժեքների բերված հատկությունները հաճախ են օգտագործվում խնդիրներ լուծելիս:

Եթե հակադարձ համեմատական փոփոխականները ընդունում են դրական արժեքներ, ապա կարելի է ասել, որ փոփոխականներից մեկի արժեքները մի քանի անգամ մեծացնելիս (փոքրացնելիս) մյուս փոփոխականի համապատասխան արժեքները փոքրանում են (մեծանում են) նույնքան անգամ:

Բերենք օրինակներ:

1) Ուղղանկյան մակերեսի բանաձևն է S = ah: Բանաձևից հետևում է, որ ուղղանկյան հաստատուն մակերեսի դեպքում բարձրու-

համեմատական, եթե նրանց արտադրյալը հավասար է զրոյից տարբեր միևնույն թվին. այդ թիվը կոչվում է հակադարձ համեմատականության գործակից:

x և y փոփոխականների հակադարձ համեմատականության գործակիցը նշանակելով k-ով, կստանանք.

$$xy = k \text{ կամ } y = \frac{k}{x}, \ k \neq 0.$$

$y = \frac{k}{x}$ հավասարությունը x և y փոփոխականների հակադարձ համեմատականության բանաձևն է:

Հակադարձ համեմատական փոփոխականները օժտված են հետևյալ կարևոր հատկությամբ:

Դիցուք x_1-ը և y_1-ը, ինչպես նաև x_2-ը և y_2-ը x և y հակադարձ համեմատական փոփոխականների համապատասխան արժեքների զույգեր են: Քանի որ xy արտադրյալը հաստատուն է համապատասխան արժեքների ցանկացած զույգի համար, ապա ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

Քանի որ այդ թվերը զրոյից տարբեր են ($k \neq 0$), ապա կարելի է գրել

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

ճիշտ համեմատությունը: Նկատի ունենալով, որ $\frac{y_2}{y_1} = 1 : \frac{y_1}{y_2}$, կարելի է անել հետևյալ եզրակացությունը:

Հակադարձ համեմատական փոփոխականներից մեկի ցանկացած երկու արժեքների հարաբերությունը հավասար է մյուս փոփոխականի համապատասխան արժեքների հակադարձ հարաբերությանը:

x և y փոփոխականների համապատասխան արժեքների բերված հատկությունները հաճախ են օգտագործվում խնդիրներ լուծելիս:

Եթե հակադարձ համեմատական փոփոխականները ընդունում են դրական արժեքներ, ապա կարելի է ասել, որ փոփոխականներից մեկի արժեքները մի քանի անգամ մեծացնելիս (փոքրացնելիս) մյուս փոփոխականի համապատասխան արժեքները փոքրանում են (մեծանում են) նույնքան անգամ:

Բերենք օրինակներ:

1) Ուղղանկյան մակերեսի բանաձևն է S = ah: Բանաձևից հետևում է, որ ուղղանկյան հաստատուն մակերեսի դեպքում բարձր-

թյունը և հիմքի երկարությունը հակադարձ համեմատական են։

2) Դիցուք F հաստատուն ուժի ազդեցությամբ մարմինը (օրինակ, մետաղե գնդիկը) ուժի ազդեցության ուղղության հետ համընկնող ուղղով տեղափոխվել է S երկարությամբ։ Աշխատանք (նշանակենք A-ով) կոչվում է ուժի և մարմնի անցած ճանապարհի արտադրյալը։ Աշխատանքի բանաձևն է $A = FS$: Այսպիսով, մարմնի ուղղագիծ շարժման դեպքում (որը կատարվում է հաստատուն ուժի ազդեցության ուղղությամբ), երբ աշխատանքի մեծությունը չի փոխվում, ուժը և ճանապարհը հակադարձ համեմատական են. աշխատանքը հակադարձ համեմատականության գործակիցն է։

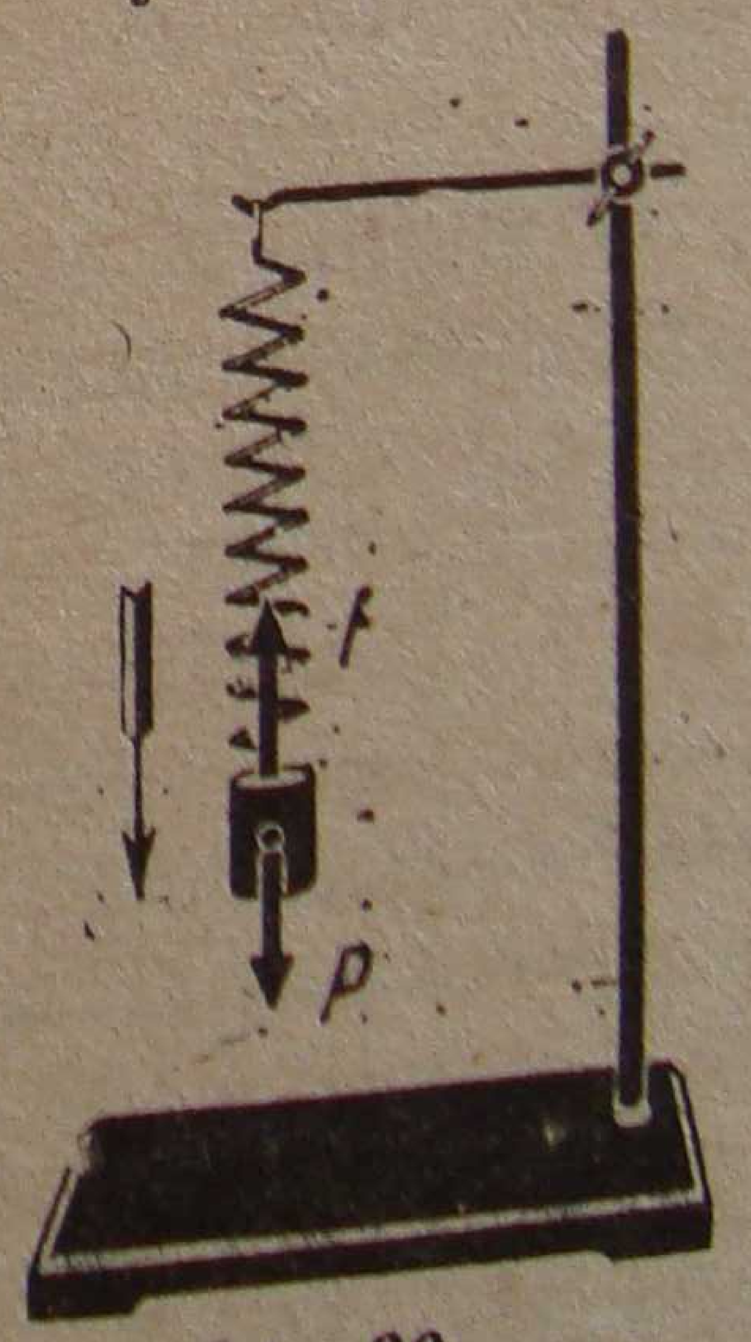
Աշխատանքը համարվում է դրական, եթե մարմնի շարժման ուղղությունը համընկնում է ուժի ուղղության հետ, և բացասական՝ հակառակ դեպքում։

Օրինակ, եթե չձգված զսպանակից (Նկ. 39) կախենք P բեռը և նրան հնարավորություն տանք իջնելու, ապա բեռի վրա ազդող ծանրության ուժը կկատարի դրական աշխատանք, քանի որ բեռը շարժվում է այդ ուժի ուղղությամբ։ Միաժամանակ զսպանակը ձգվում է և նրա առաձգականության F ուժը կատարում է բացասական աշխատանք, քանի որ բեռը շարժվում է ներքև, իսկ առաձգականության ուժը, որը ձգտում է զսպանակը բերել սկզբնական դիրքին, ուղղված է վեր։

Անցնենք երկու մեծությունների հակադարձ համեմատականության վերաբերյալ խնդիրների լուծմանը։

Խնդիր։ 4 բանվորներ 12 օրում կարող են կատարել որոշ աշխատանք։ Քանի՞ օրում կարող են կատարել այդ աշխատանքը 6 բանվորները, յուրաքանչյուր բանվորի աշխատանքի նույն արտադրողականության դեպքում։

Լուծում։ Բանվորների թիվը նշանակենք, օրինակ, n-ով, իսկ աշխատանքային օրերի թիվը՝ p-ով։ Բանվորների թիվը և որոշակի աշխատանք կատարելու համար անհրաժեշտ ժամանակը հակադարձ համեմատական մեծություններ են, այսինքն՝ n-ը և p-ն հակադարձ համեմատական փոփոխականներ են։ Կազմենք փոփոխականների համապատասխան արժեքների աղյուսակ։ Օրերի որոնելի թիվը նշանակենք x տառով։



Նկ. 39

n	4	6
p	12	x

1-ին եղանակ։ n փոփոխականի որևէ երկու արժեքների հարաբերությունը պետք է հավասար լինի p փոփոխականի երկու համապատասխան արժեքների հակադարձ հարաբերությանը. $\frac{6}{4}=\frac{12}{x}$, $x=\frac{12\cdot 4}{6}=8$։

Պատասխան. 8 օր։

2-րդ եղանակ։ n և p փոփոխականների ցանկացած երկու համապատասխան արժեքների արտադրյալը ունի միևնույն արժեքը։ Այստեղից հետևում է $4\cdot 12=6\cdot x$ հավասարությունը։ Անհայտ x արտադրիչը գտնելու համար պետք է $4\cdot 12$ արտադրյալը բաժանել արտադրիչի՝ 6-ի վրա։

Ուստի՝

$$x=\frac{4\cdot 12}{6}=8։$$

Պատասխան. 8 օր։

Հետևյալ խնդիրները սովորողները կարող են լուծել նշված եղանակներից որևէ մեկով։ Համապատասխան արժեքների աղյուսակ կազմելը շատ ցանկալի է։

Վարժություններ

247. Աղյուսակում գրեցեք m և n հակադարձ համեմատական փոփոխականների համապատասխան արժեքները.

m	−20	42		385	
n			−70	−36	11

248. Լրացրեք աղյուսակը, եթե հայտնի է, որ y փոփոխականը հակադարձ համեմատական է x փոփոխականին և հակադարձ համեմատականության գործակիցը հավասար է 5-ի.

x	180	−30		6,3	
y			12		−75

249. Մի բնակավայրից մյուսը հեծանվորդը գնաց 2 ժ 30 ր-ում, շարժվելով 12 կմ/ժ արագությամբ։ Հեծանվորդը որքա՞ն ժամանակում կվերադառնա, եթե շարժվի 15 կմ/ժ արագությամբ։

250. Որոշակի քանակությամբ բեռը տեղափոխելու համար 2,5 տ բեռնատարողությամբ մեքենան կատարում է 18 ուղերթ։ Նույն այդ բեռը քանի՞ ուղերթ կատարելով կտեղափոխի 1,5 տ բեռնատարողությամբ մեքենան։

251. Մի վայրից մյուսը հետիոտնը անցնում է 4 ժ 40 ր-ում, շարժվելով 4,5 կմ/ժ արագությամբ։ Ի՞նչ արագությամբ պետք է շարժվի հեծանվորդը, որպեսզի այդ հեռավորությունը անցնի 1,5 ժ-ում։

252. 12 հոգուց բաղկացած բրիգադը կարող է առաջադրանքը կատարել 105 ժ-ում։ Որքա՞ն ժամանակում կարող է այդ առաջադրանքը կատարել 14 հոգուց բաղկացած բրիգադը, եթե աշխատի նույն արտադրողականությամբ։

253. 72 ատամ ունեցող ատամնանիվը րոպեում կատարում է 78 պտույտ։ Քանի՞ ատամ ունի առաջինի հետ միակցված երկրորդ անիվը, եթե րոպեում կատարում է 126 պտույտ։

254. Ցանկապատելու համար պետք է 4 հենասյուն և 87 փայտե ձող, եթե դրանք խփվի միմյանցից 10 սմ հեռավորության վրա։ Քանի՞ ձող է պետք նույնպիսի ցանկապատի համար, եթե դրանք խփվի միմյանցից 15 սմ հեռավորության վրա։

255. Ունեցած մետաղից կարելի է պատրաստել 192 ձուլածո, յուրաքանչյուրը 350 գ զանգվածով։ Այդ մետաղից որքա՞ն ձուլածո կստացվի, եթե յուրաքանչյուրի զանգվածը իջեցվի մինչև 280 գ։

256. Օրական 0,75 տ օգտագործելու դեպքում ածխի պաշարը կբավականացնի 128 օր։ Քանի՞ օր կբավականացնի այդ պաշարը, եթե օրական օգտագործվի 1 տ։

Ինքնուրույն աշխատանք №6

1. Խնդիր։ Համաձուլվածք պատրաստելու համար վերցրին հավասար ծավալներով պղինձ և անագ։ Գտեք համաձուլվածքի զանգվածը, եթե պղինձը 5 կգ էր։ Պղնձի խտությունը $8,9 \frac{գ}{սմ^3}$ է, իսկ անագինը՝ $7,3 \frac{գ}{սմ^3}$։

2. Խնդիր: Ժամում 24 դետալ պատրաստելու դեպքում բանվորը կարող է առաջադրանքը կատարել 7 ժ-ում: Բանվորը որքա՞ն ժամանակում կկատարի առաջադրանքը, եթե ժամում 4 դետալ ավելի պատրաստի.

3. Լուծեցեք համասարումը, որն ունի հետևյալ համեմատության տեսքը՝ $24 : 1{,}44 = 3\frac{5}{9}y : 2$։

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ի՞նչն է կոչվում համեմատություն: Ապացուցեք համեմատության հիմնական հատկությունը:

2. Ինչպիսի՞ երկու փոփոխականներն են կոչվում ուղիղ համեմատական: Բերեք երկու համեմատական մեծությունների օրինակ:

3. Ի՞նչ հատկությամբ է օժտված համեմատական փոփոխականների համապատասխան արժեքների հարաբերությունը: Պատասխանը գրեցեք համեմատության տեսքով:

4. Ի՞նչ հատկությամբ է օժտված երկու համեմատական փոփոխականներից մեկի որևէ արժեքների հարաբերությունը:

5. Ի՞նչն է կոչվում երկու փոփոխականների համեմատականության գործակից: Գրեցեք ուղիղ համեմատականության բանաձևը:

6. Ինչպիսի՞ երկու փոփոխականներն են կոչվում հակադարձ համեմատական: Բերեք երկու հակադարձ համեմատական մեծությունների օրինակ:

7. Ի՞նչ հատկությամբ է օժտված հակադարձ համեմատական փոփոխականների երկու համապատասխան արժեքների արտադրյալը:

8. Ի՞նչ հատկությամբ է օժտված երկու հակադարձ համեմատական փոփոխականներից մեկի որևէ արժեքների հարաբերությունը: Պատասխանը գրեցեք համեմատության տեսքով:

9. Ի՞նչն է կոչվում հակադարձ համեմատականության գործակից: Գրեցեք հակադարձ համեմատականության բանաձևը:

ՖՈՒՆԿՑԻԱ

§ 40. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Տրված են A և B երկու բազմությունները։ Ենթադրենք, թե նրանց տարրերի միջև հաստատված է որոշ համապատասխանություն։ Դա նշանակում է, որ A բազմության տարրերին համապատասխանում են B բազմության որոշակի տարրեր։

Օրինակ 1։ Դիցուք A-ն 1-ից 12 բնական թվերի բազմությունն է, իսկ B-ն՝ 1-ից 8 բնական թվերի բազմությունը, այսինքն՝ $A=\{1; 2; \cdots; 12\}$, $B=\{1; 2; \cdots; 8\}$։ A բազմության յուրաքանչյուր a տարրին համապատասխանեցնենք B բազմության այն b տարրը, որը հավասար է a տարրի բաժանարարների թվին։

Դիցուք a տարրից b տարրը գնացող սլաքը $(a\rightarrow b)$ նշանակում է, որ $a\in A$ տարրին համապատասխանում է $b\in B$ տարրը։ Տվյալ օրինակում՝ $1\rightarrow 1$, $2\rightarrow 2$, $3\rightarrow 2$, $4\rightarrow 3$, $5\rightarrow 2$, $6\rightarrow 4$, $7\rightarrow 2$, $8\rightarrow 4$, $9\rightarrow 3$, $10\rightarrow 4$, $11\rightarrow 2$, $12\rightarrow 6$։ Այսպիսով, A բազմության յուրաքանչյուր տարրին համապատասխանում է B բազմության միմիայն մեկ տարր։ Բայց B բազմության ոչ բոլոր տարրերն են, որ համապատասխանում են A բազմության որևէ տարրի։ Այսպես, B բազմության 5, 7 և 8 տարրերին չի համապատասխանում A բազմության ոչ մի տարր․ 1-ից 12 թվերից ոչ մեկը չունի 5, 7 կամ 8 բաժանարար։ B բազմության 5, 7 և 8 տարրերին առաջված չէ A բազմության տարրերից եկող ոչ մի սլաք։

Օրինակ 2: Դիցուք A-ն 1-ից 100 բնական թվերի բազմությունն է, իսկ B-ն՝ 0-ից 5 ամբողջ թվերի բազմությունը։ A բազմության յուրաքանչյուր a տարրին համապատասխանեցնենք B բազմության այն b տարրը, որը հավասար է a թիվը 6-ի բաժանման մնացորդին։ Բնական թիվը 6-ի բաժանելիս հնարավոր է միայն վեց մնացորդ՝ 0, 1, 2, 3, 4, և 5։ Օրինակ, 4-ը 6-ի բաժանելիս ստացվում է 4 մնացորդ, 17-ը 6-ի բաժանելիս, 5 մնացորդ, 24-ը 6-ի բաժանելիս՝ 0 մնացորդ, այսինքն՝ 4—4, 17—5, 24—0 և այլն։

Այսպիսով, A բազմության յուրաքանչյուր տարրին համապատասխանում է B բազմության միակ տարր, և, հակադարձը, B բազմ-

թյան յուրաքանչյուր տարր համապատասխանում է A բազմության որևէ տարրի: Օրինակ, B բազմության 4 տարրը համապատասխանում է A բազմության այնպիսի տարրերի, ինչպիսիք են 4-ը, 10-ը, 16-ը, 22-ը և այլն:

Նշանակելու համար այն, որ $a \in A$ տարրին համապատասխանում է $b \in B$ տարրը, կարելի է օգտագործել ոչ միայն սլաք: Երկու բազմությունների միջև համապատասխանությունը կարելի է գրել տարրերի (a, b) կարգավորյալ զույգերի բազմության տեսքով, որտեղ կլոր փակագծերի մեջ առաջին տեղում նշված է a տարրը՝ $a \in A$, իսկ երկրորդ տեղում՝ նրան համապատասխանող b տարրը՝ $b \in B$.

Այսպես, 1-ին օրինակում համապատասխանությունը կարելի է գրել 12 կարգավորյալ զույգ (ըստ A բազմության տարրերի թվի) պարունակող բազմության տեսքով.

$\{(1; 1), (2; 2), (3; 2), (4; 3), (5; 2), (6; 4), (7; 2), (8; 4), (9;3), (10; 4), (11; 2), (12; 6)\}$:

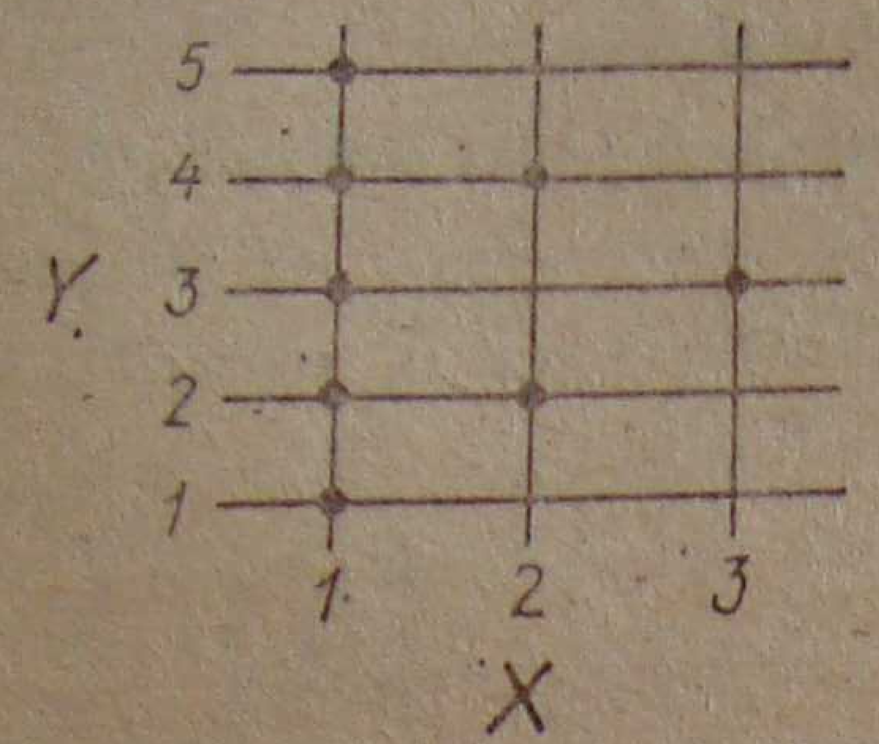
2-րդ օրինակում կարգավորյալ զույգերի բազմությունը կազմված կլիներ 100 տարրից, օրինակ, $(4; 4)$, $(17; 5)$, $(24; 0)$ և այլն:

Օրինակ 3. Դիտարկենք երկու բազմություն՝ $X = \{1; 2; 3\}$, $Y = \{1; 2; 3; 4; 5\}$: Յուրաքանչյուր x $(x \in X)$ տարրին համապատասխանեցնենք այն y $(y \in Y)$ տարրը, որը ամբողջությամբ բաժանվում է x տարրի վրա:

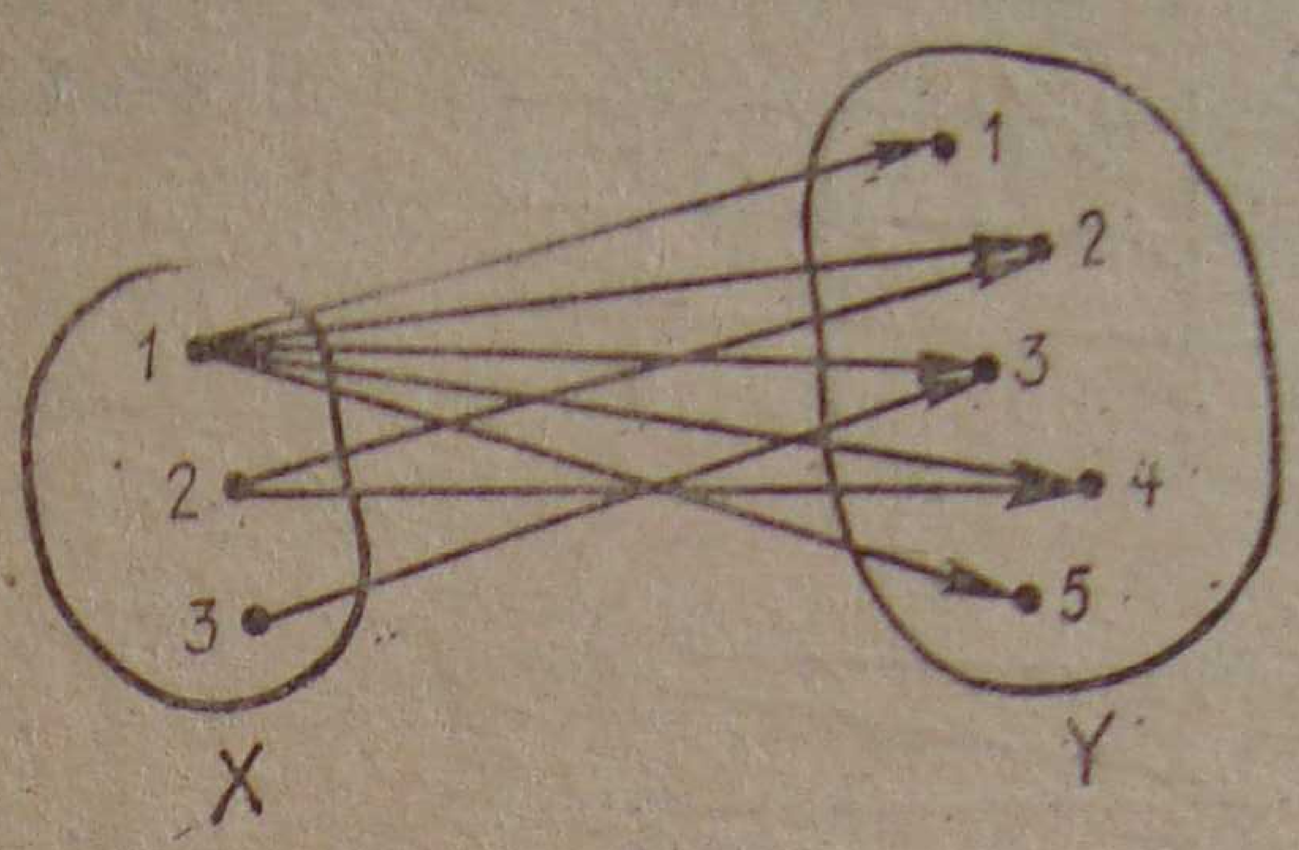
X և Y բազմությունների միջև այդ համապատասխանությունը կարելի է գրել կարգավորյալ զույգերի հետևյալ բազմության տեսքով. $\{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 2), (2; 4), (3; 3)\}$: Հինգ զույգում առաջին տեղում գրված է $1 \in X$ տարրը, երկու զույգում՝ $2 \in X$ տարրը և մեկ զույգում՝ $3 \in X$ տարրը:

Ստացված համապատասխանության մասին ակներև պատկերացում կարելի է ստանալ նաև հետևյալ կերպ: Կառուցենք փոխուղղահայաց հորիզոնական և ուղղաձիգ գծերի ցանց: Հորիզոնականների վրա նշենք X բազմության տարրերը, իսկ ուղղաձիգի վրա՝ Y բազմության տարրերը: Տարրերի ամեն մի կարգավորյալ զույգ կպատկերվի հանգույցի, այսինքն՝ ցանցի գծերի հատման կետի տեսքով: Տվյալ համապատասխանության զույգերը տեսնելու համար, դրանց համապատասխան հանգույցները նշենք շրջանիկներով (Նկ. 40):

Նույն այդ համապատասխանությունը կարելի է ակներև պատկերել սլաքավոր սխեմայի տեսքով: Եթե x տարրին համապատասխանում է y տարրը, ապա $x \in X$ տարրից սլաք տանենք դեպի $y \in Y$ տարրը (Նկ. 41): Նկարում 1 տարրից ելնում է 5 սլաք, 2 տարրից՝ երկու սլաք և 3 տարրից՝ մեկ սլաք:



Նկ. 40



Նկ. 41

Սահմանում։ X և Y բազմությունների միջև այնպիսի համապատասխանությունը, որի դեպքում X բազմության յուրաքանչյուր x տարրին համապատասխանում է Y բազմության մեկից ոչ ավելի y տարր, կոչվում է ֆունկցիա:

Այսպիսով, X բազմությունում կարող են այնպիսի տարրեր լինել, որոնց չի համապատասխանում Y բազմության ոչ մի տարր, և այնպիսի տարրեր, որոնց համապատասխանում է Y բազմության միայն մեկ տարր:

X բազմության բոլոր այն տարրերի բազմությունը, որոնց համապատասխանում է Y բազմության միմիայն մեկ տարր, կոչվում է ֆունկցիայի որոշման տիրույթ:

Այն y տարրը, որը համապատասխանում է որոշ x տարրի, կոչվում է ֆունկցիայի արժեք:

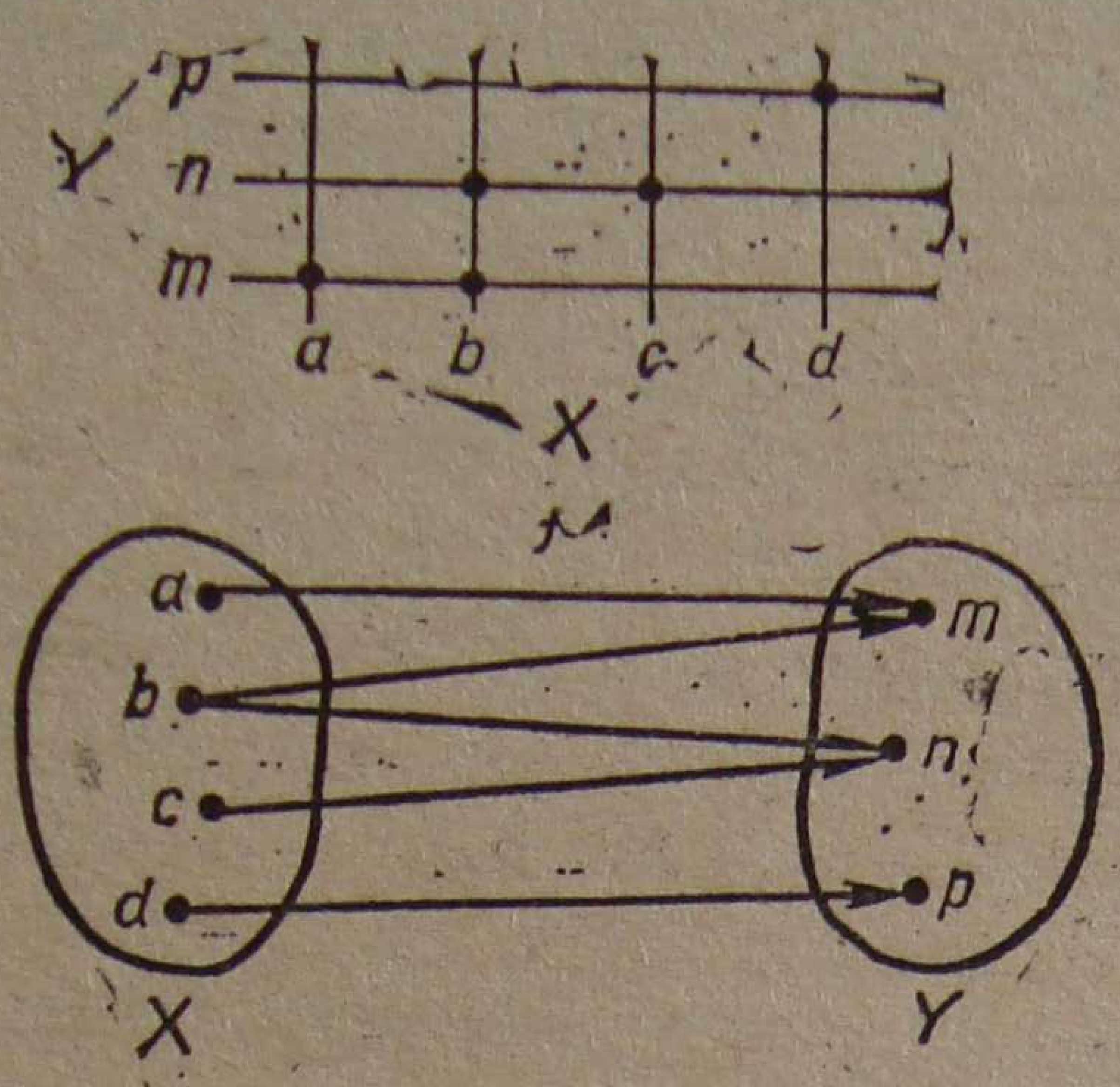
Y բազմության ոչ բոլոր տարրերն են, որ կարող են համապատասխանել X բազմության որևէ տարրի: Y բազմության այն տարրերի բազմությունը, որոնք համապատասխանում են X բազմության գոնե մեկ տարրի, կոչված է ֆունկցիայի արժեքների տիրույթ:

Դառնանք 1—3-րդ օրինակներին: 1-ին օրինակում տրված համապատասխանությունը ֆունկցիա է A որոշման տիրույթով և {1; 2; 3; 4; 6;} արժեքների տիրույթով, որը B բազմության ենթաբազմությունն է:

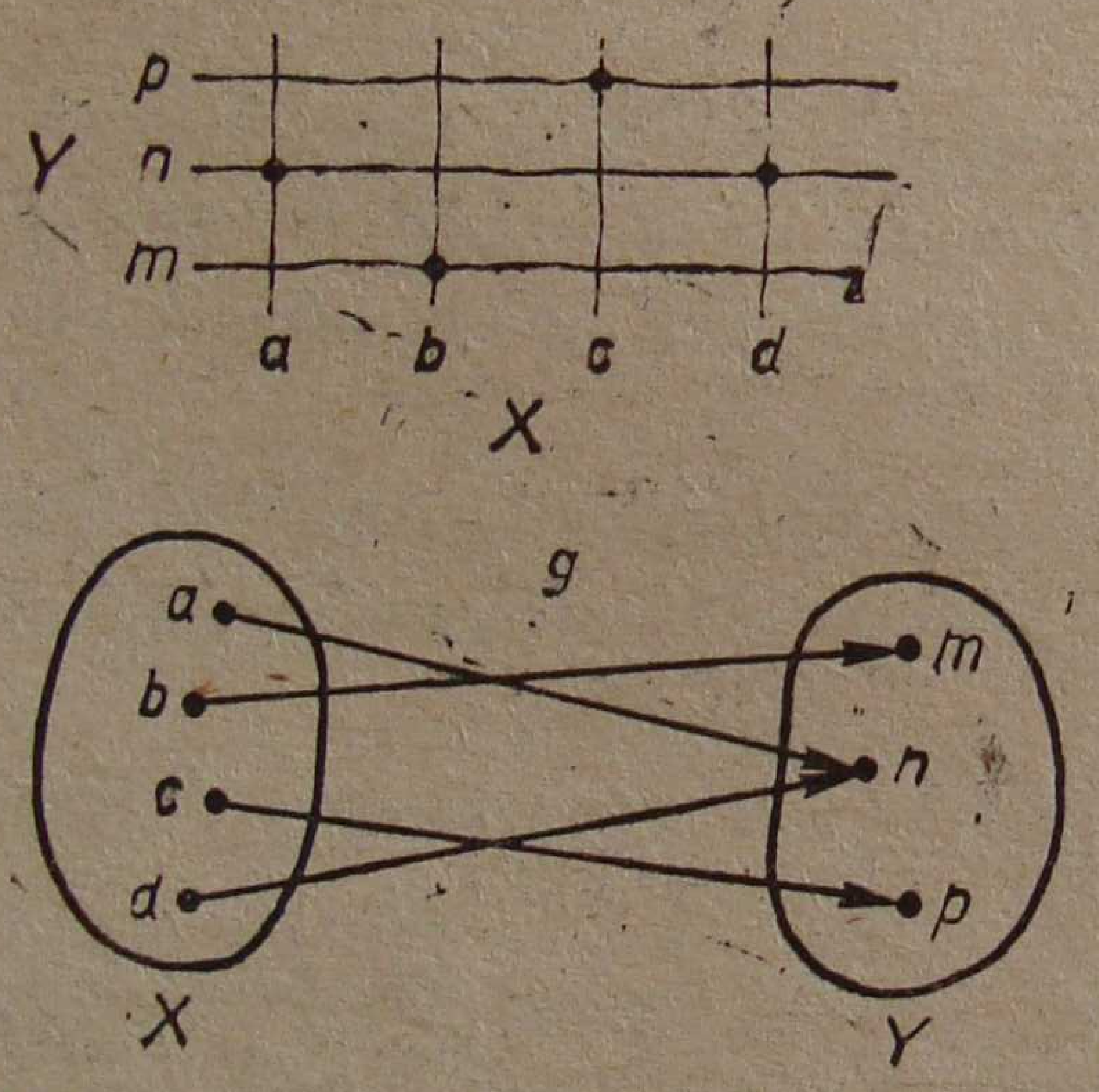
2-րդ օրինակում տրված համապատասխանությունը ֆունկցիա է A որոշման տիրույթով և B արժեքների տիրույթով:

3-րդ օրինակում տրված համապատասխանությունը ֆունկցիա չէ, քանի որ, օրինակ, 2∈X տարրին համապատասխանում է Y բազմության երկու տարր, իսկ 1∈X տարրին՝ Y բազմության նույնիսկ հինգ տարր:

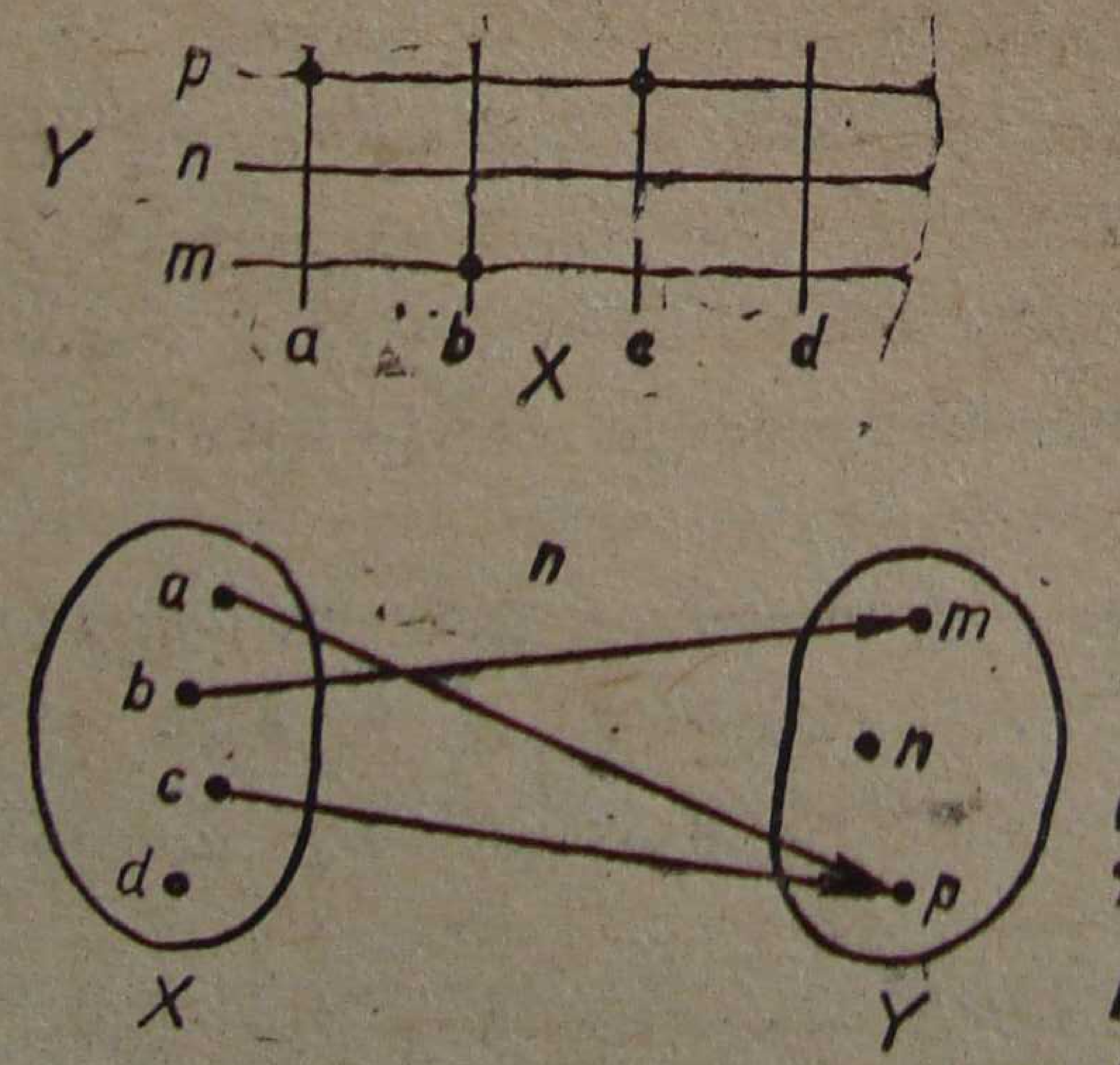
Մենք ծանոթացանք երկու բազմությունների տարրերի միջև համապատասխանության պատկերման երեք եղանակների: Դրանցից յուրաքանչյուրը հնարավորություն է տալիս ակներևորեն որոշել,



Նկ. 42



Նկ. 43



Նկ. 44

թե տվյալ համապատասխանությունը ֆունկցիա է, թե ոչ։

X բազմության տարրերի և Y բազմության տարրերի միջև համապատասխանությունը X որոշման տիրույթով ֆունկցիա է, եթե կարգավորյալ զույգերի բազմությունում չկան այնպիսի զույգեր, որոնց առաջին տարրերը նույնն են, իսկ երկրորդները՝ տարբեր, կամ չնպիսի ուղղանկյուն ցանցում, որի վրա հորիզոնական ուղղությամբ նշված են X բազմության տարրերը, իսկ ուղղաձիգ ուղղությամբ՝ Y բազմության տարրերը, ոչ մի ուղղաձիգի վրա չկա շրջանիկով նշված երկու հանգույց կամ սլաքներով սխեմայում X բազմության ոչ մի տարրից չի ելնում դեպի Y բազմության տարրերը գնացող մեկից ավելի սլաք։

Դա պարզաբանենք ևս մի քանի օրինակով։

Դիցուք տրված է երկու բազմություն։ X={a; b; c; d} և Y={m; n; p}։ Դրանց տարրերի միջև կարող են լինել զանազան համապատասխանություններ։ Յուրաքանչյուր համապատասխանություն կարող է ներկայացվել (տրվել) տրված X և Y բազմությունների տարրերից կազմված կարգավորյալ զույգերի որոշ բազմությամբ։

Կազմենք, օրինակ, երեք տարբեր համապատասխանություններ, որոնք նշանակենք f, g և h, և դրանք ներկայացնենք ուղղանկյուն ցանցի, ինչպես նաև սլաքավոր սխեմայի օգնությամբ (Նկ. 42—44)։ Առանձին գրենք տարրերի զույգերի այն բազմությունները, որոնք կազմում են այդ համապատասխանությունները․

$$f=\{(a; m), (b; m), (b; n), (c; n), (d; p)\},$$
$$g=\{(a; n), (b; m), (c; p), (d; n)\},$$
$$h=\{(a; p), (b; m), (c; p)\}։$$

1) f համապատասխանությունը ֆունկցիա չէ։

2) g համապատասխանությունը ֆունկցիա է որոշման X տիրույթով և արժեքների Y տիրույթով։

3) h համապատասխանությունը ֆունկցիա է {a, b, c} որոշման տիրույթով, որը X բազմության ենթաբազմությունն է և չի համընկնում X-ի հետ, և {m; p} արժեքների տիրույթով, որը Y բազմության ենթաբազմությունն է և չի համընկնում Y-ի հետ։

Վարժություններ

257. Երկու բազմությունների տարրերի միջև համապատասխանությունները տրված են սլաքավոր սխեմայի միջոցով (նկ. 45—52)։ Յուրաքանչյուր համապատասխանությունը գրեցեք կարգավորյալ զույգերի բազմության տեսքով։

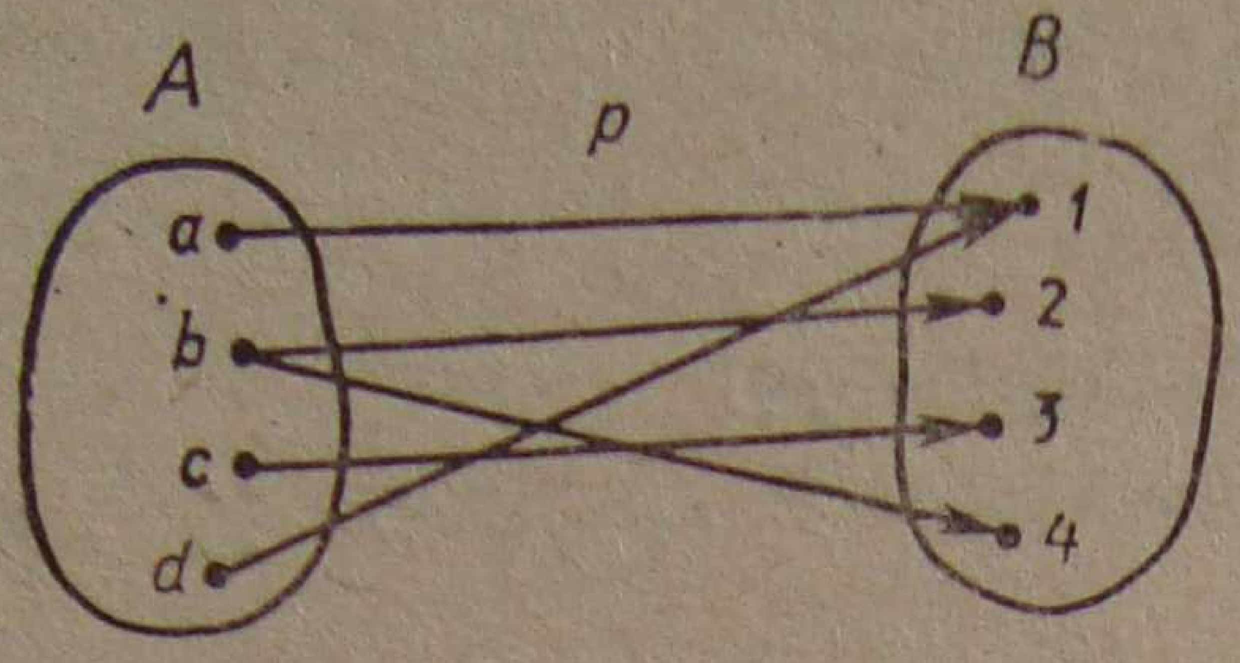
258. ա) Տրված համապատասխանություններից որո՞նք են, որ ֆունկցիա չեն (նկ. 45—52)։ բ) 45—52-րդ նկարներում նշված համապատասխանություններից որո՞նք են ֆունկցիա։ Նշեցեք յուրաքանչյուր ֆունկցիայի որոշման և արժեքների տիրույթները։

§41. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՏՐՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ

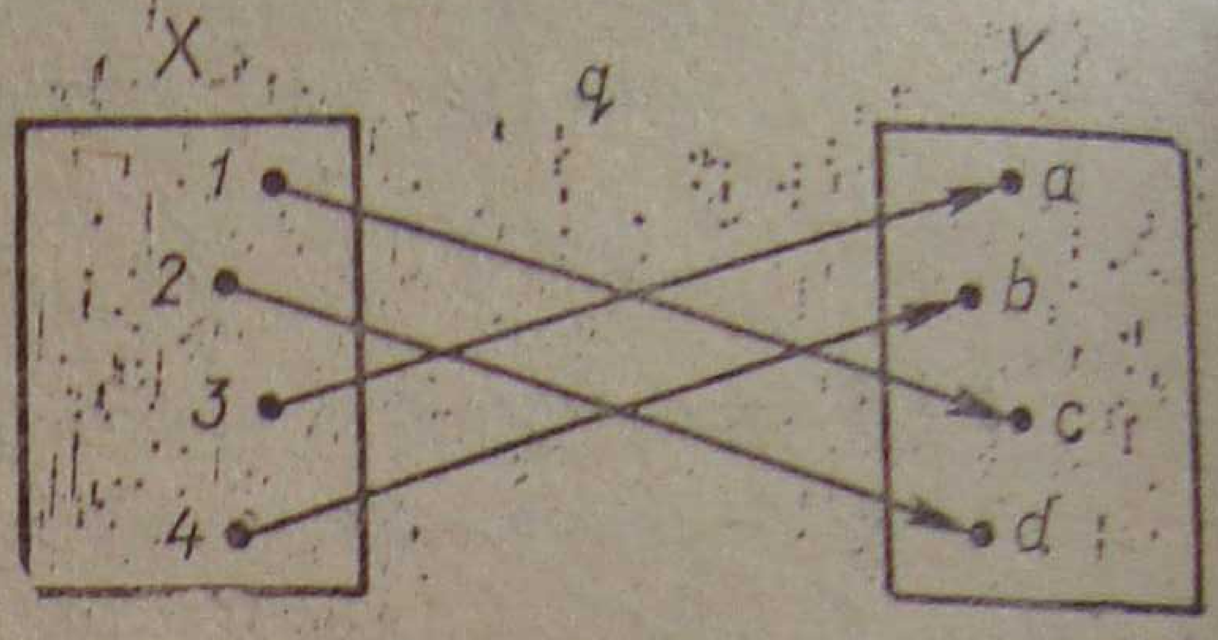
Համապատասխանություն կարելի է ստեղծել ցանկացած բնույթի տարրերի բազմությունների միջև։

Հանրահաշվում հիմնականում դիտարկվում են թվային բազմություններ։ Դիցուք D-ն և E-ն երկու թվային բազմություններ են։ Եթե D բազմության յուրաքանչյուր թվին համապատասխանեցված է E բազմության միմիայն մեկ թիվ և եթե E բազմության յուրաքանչյուր թիվ համապատասխանում է D բազմության որևէ թվի, ապա դրանով իսկ տրված է թվային ֆունկցիա որոշման D տիրույթով և արժեքների E տիրույթով։

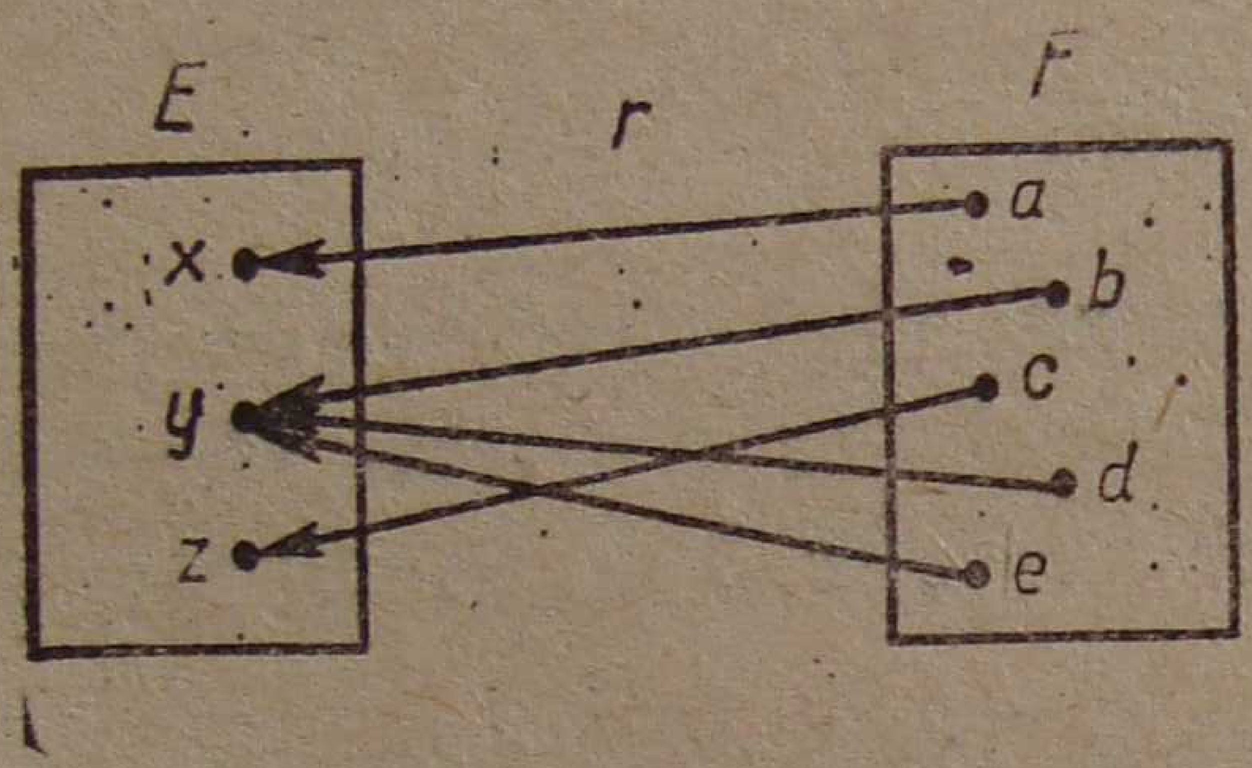
Երկրաչափությունում հիմնականում դիտարկվում են կետային բազմություններ։ Պատկերը դա կետերի որոշ բազմություն է։ Եթե Φ_1 պատկերի յուրաքանչյուր կետի համապատասխանեցված է Φ_2 պատկերի միմիայն մեկ կետ և եթե Φ_2 պատկերի յուրաքանչյուր կետ համապատասխանում է Φ_1 պատկերի որոշ կետի, ապա դրանով իսկ տրված է Φ_1 պատկերի արտապատկերում Φ_2 պատկերի վրա։



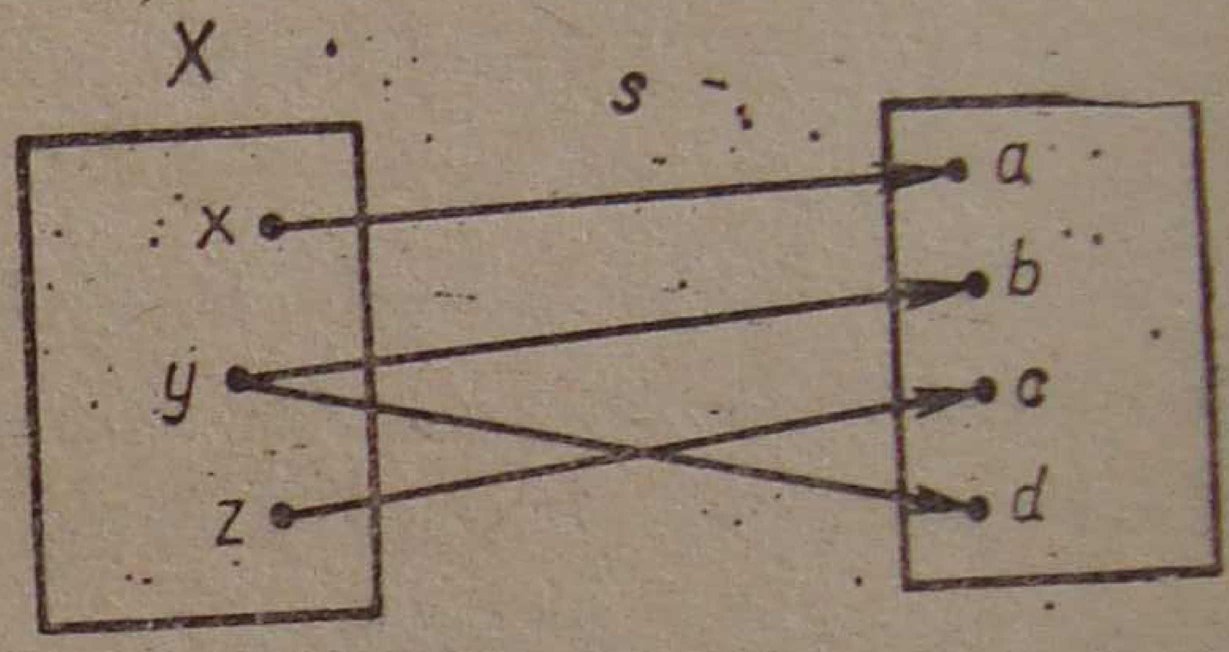
Նկ. 45



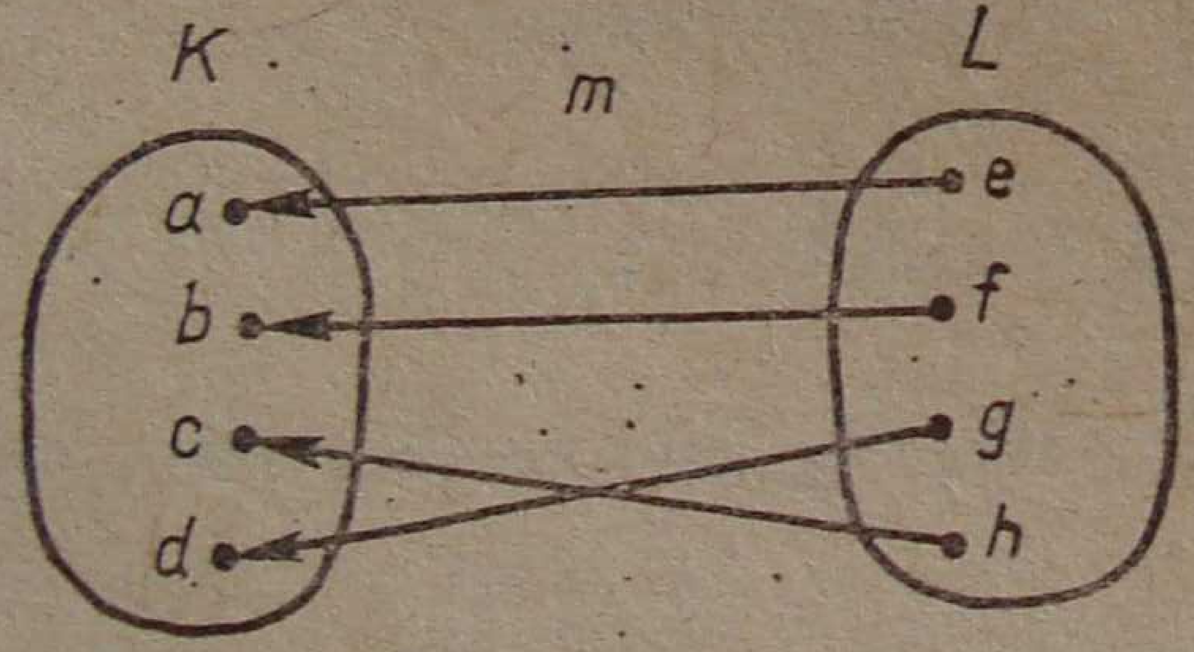
Նկ. 46



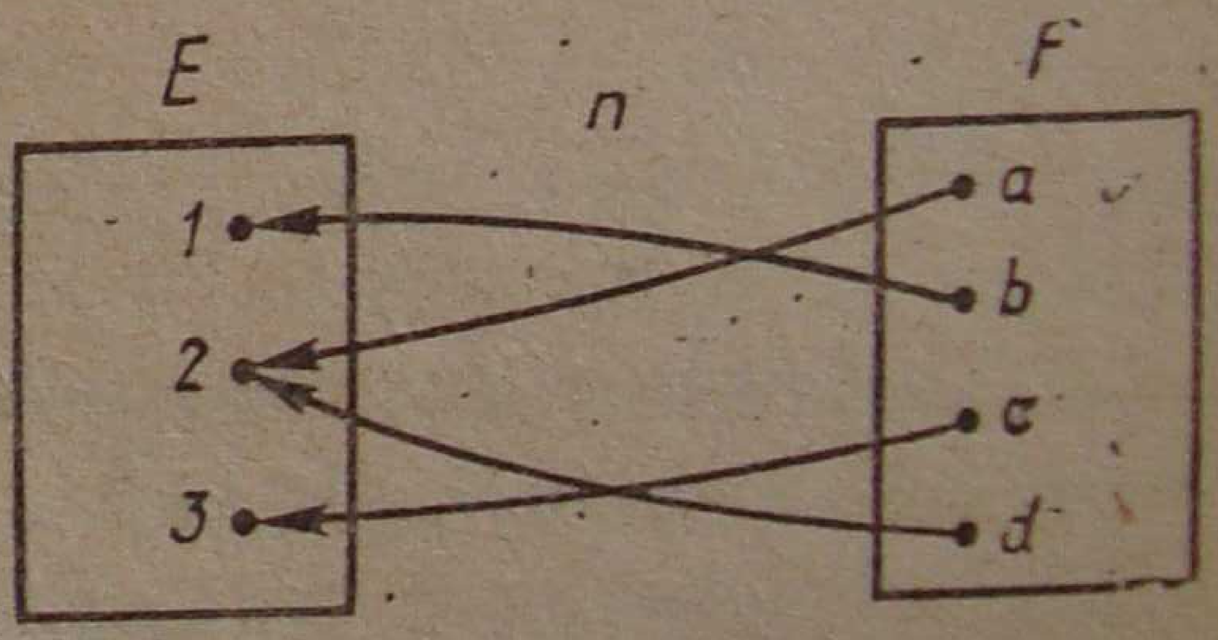
Նկ. 47



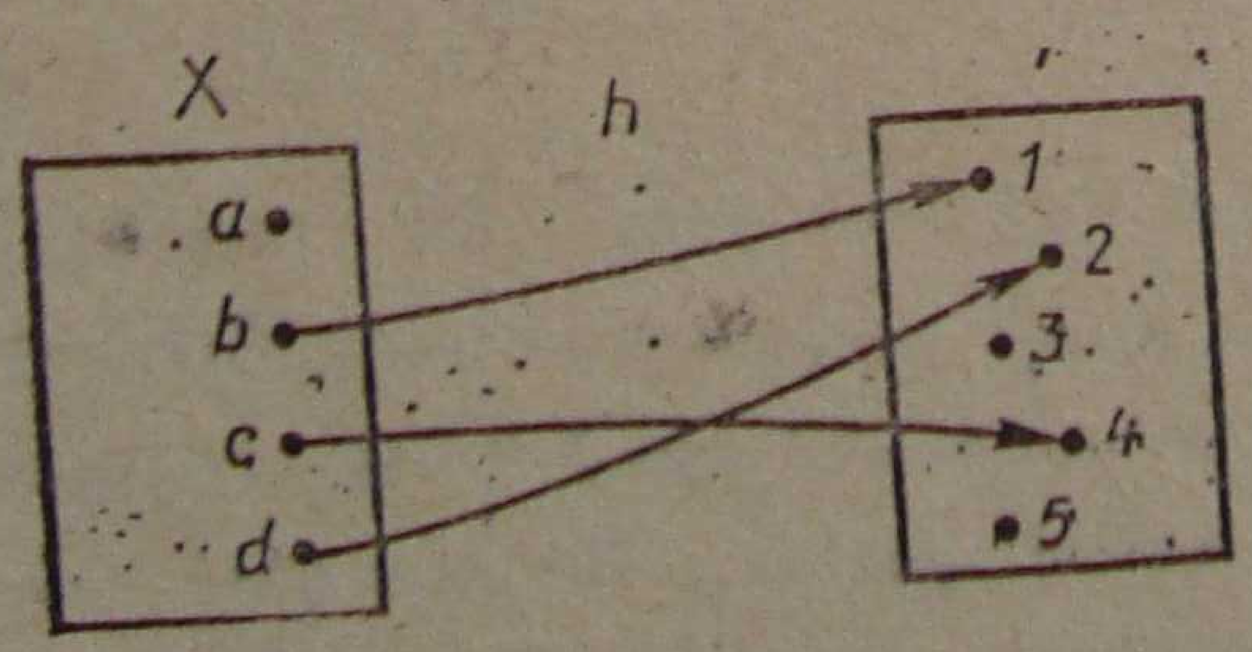
Նկ. 48



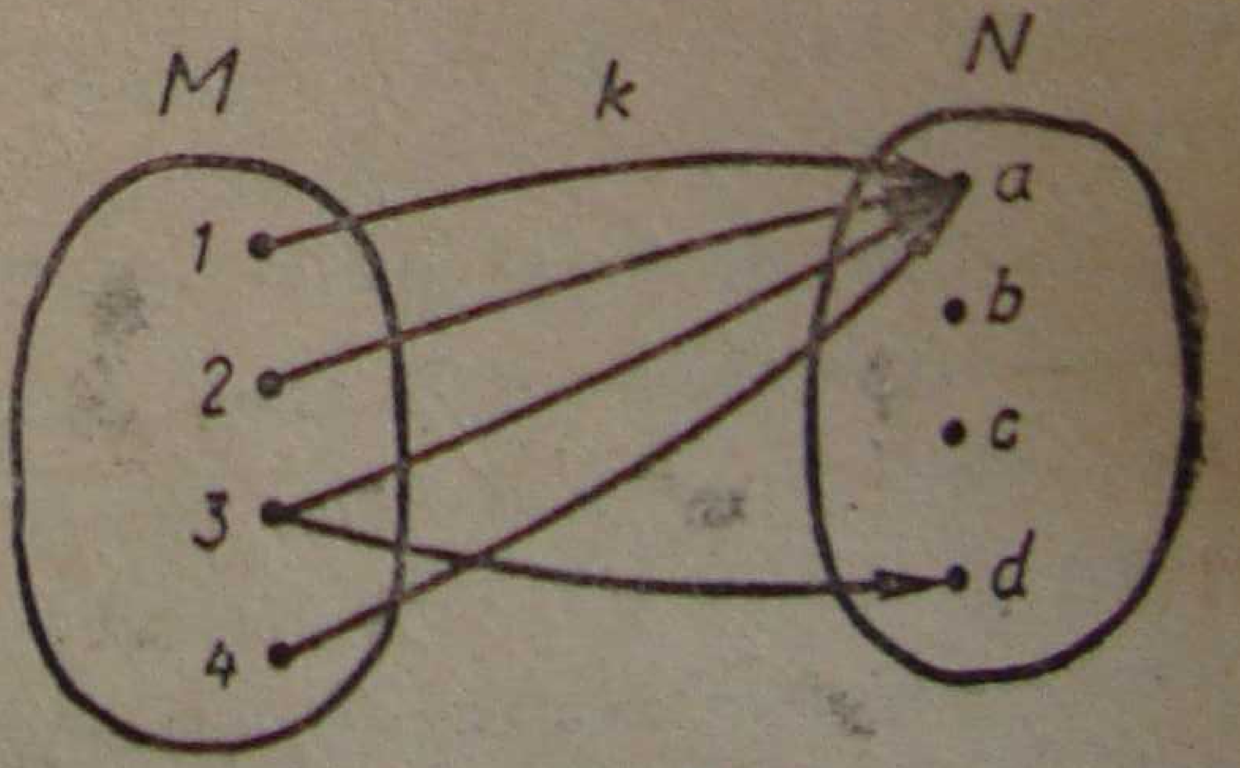
Նկ. 49



Նկ. 50



Նկ. 51



Նկ. 52

Ընդհանրապես, X որոշման տիրույթով և Y արժեքների տիրույթով ֆունկցիան X բազմության արտապատկերումն է Y բազմության վրա։

Դիտարկենք ֆունկցիայի տրման որոշ եղանակներ:

Ֆունկցիայի տրման աղյուսակային եղանակը կայանում է նրանում, որ որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր արժեքի համար նշված է ֆունկցիայի՝ նրան համապատասխան արժեքը։ Այդպիսին են, օրինակ թվերի քառակուսիների աղյուսակները, 2 թվի բնական աստիճանների այսինքն 2^n տեսքի թվերի (որտեղ $n \in N$) աղյուսակները և այլն։

Ֆունկցիան հաճախ տրվում է գրաֆիկի միջոցով։

Ֆունկցիայի գրաֆիկ կոչվում է կոորդինատային հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնց աբսցիսները արգումենտի արժեքներն են, իսկ օրդինատները՝ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքները։ Եթե կոորդինատային հարթության որևէ գիծ ինչ-որ ֆունկցիայի գրաֆիկ է, ապա օրդինատների առանցքին զուգահեռ յուրաքանչյուր ուղիղ կամ չի հատում այդ գիծը, կամ հատում է մեկ կետում։

Հանրահաշվում ֆունկցիայի տրման հիմնական եղանակը ֆունկցիայի տալն է բանաձևով, որով փոփոխականի՝ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող յուրաքանչյուր արժեքի համար կարելի է հաշվել ֆունկցիայի համապատասխան արժեքը։ Այն փոփոխականը, որի արժեքները կազմում են ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, կոչվում է ֆունկցիայի արգումենտ:

Բերենք օրինակ։ Տրված են x և y երկու փոփոխականներ։ Դիցուք X-ը x փոփոխականի որոշման տիրույթն է. $X = \{-3, -1, 0, 2, 3, 5, 6\}$։ Տրված է $y = x^2 - 2x - 3$ բանաձևը։ Այդ բանաձևով x փոփոխականի (արգումենտի) յուրաքանչյուր արժեքի համար կարելի է հաշվել y փոփոխականի միակ արժեքը, որը կհամարենք x-ի տրված արժեքին համապատասխան։ Բայց դա էլ նշանակում է, որ այդ բանաձևով տրվում է ֆունկցիա։

Հաշվումները հանգեցնում են այսպիսի արդյունքների. $-3 \to 12$, $-1 \to 0$, $0 \to -3$, $2 \to -3$, $3 \to 0$, $5 \to 12$, $6 \to 21$։

Դրանով իսկ մենք գտանք y ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը.

$$Y = \{-3;\ 0;\ 12;\ 21\}։$$

Ֆունկցիան նշանակենք f տառով, իսկ y փոփոխականը $f(x)$-ով (կարդացվում է էֆ իքս)։ $y = x^2 - 2x - 3$ բանաձևը կարելի է գրել $f(x) = x^2 - 2x - 3$ տեսքով։

$f(a)$-ով նշանակենք այն արժեքը, որը f ֆունկցիան ընդունում է արգումենտի a-ի հավասար արժեքի դեպքում:

Այսպիսով, $f(-3)=f(5)=12$, $f(-1)=f(3)=0$, $f(0)=f(2)=-3$, $f(6)=21$։

Վարժություններ

Ֆունկցիան X բազմության վրա տրված է բանաձևով։ Գտեք համապատասխան ֆունկցիաների արժեքների տիրույթները.

259. *ա)* $X=\{-2; 0; 3; 4; 5; 9; 10\}$, $y=x^2-8x+15$,

բ) $X=\{-8; -5; -4; -3; 0; 3; 5\}$, $f(x)=x^2+8x+15$։

260. *ա)* $X=\{-5; -2; -1; 0; 1; 2; 4\}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$,

բ) $X=\{-3; -2; 0; 1; 3; 4; 5\}$, $y=\dfrac{2x-5}{3x-4}$։

§ 42. ՈՒՂԻՂ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԳՐԱՖԻԿԸ

Ուղիղ համեմատականության $y=kx$, $k\neq 0$ *բանաձևով (տես* § 37*) տրվում է ֆունկցիա, քանի որ արգումենտի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է* y *փոփոխականի մեկ միանգամայն որոշակի արժեք։* x *փոփոխականը կարող է ընդունել ցանկացած արժեք, ուստի* $y=kx$ *բանաձևով տրվող ֆունկցիայի (կարճ՝* $y=kx$ *ֆունկցիայի) որոշման տիրույթը բոլոր թվերի բազմությունն է։*

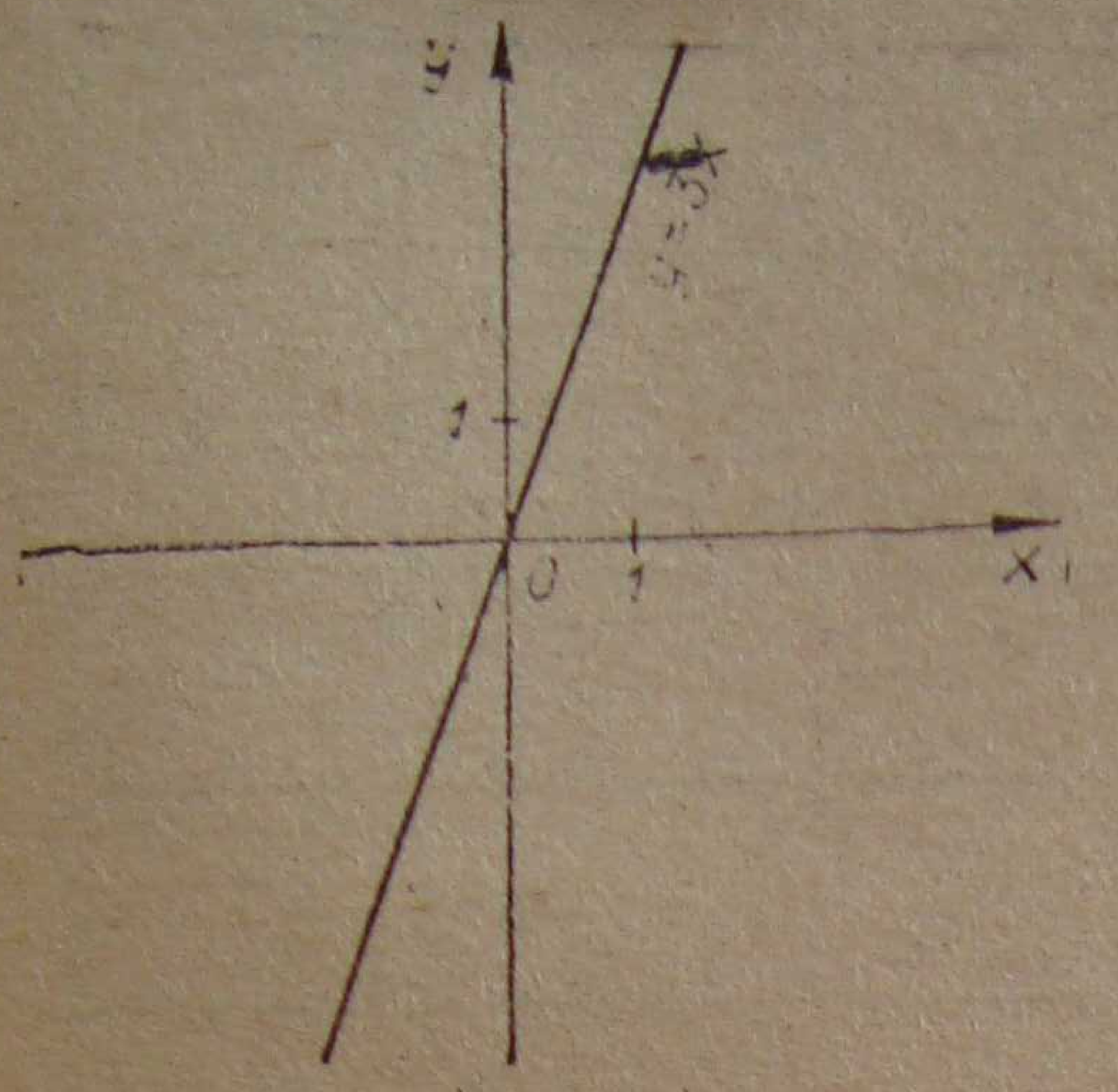
Դիցուք $k=3$։ *Կառուցենք* $y=3x$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը։*

Կազմենք հետևյալ աղյուսակը.

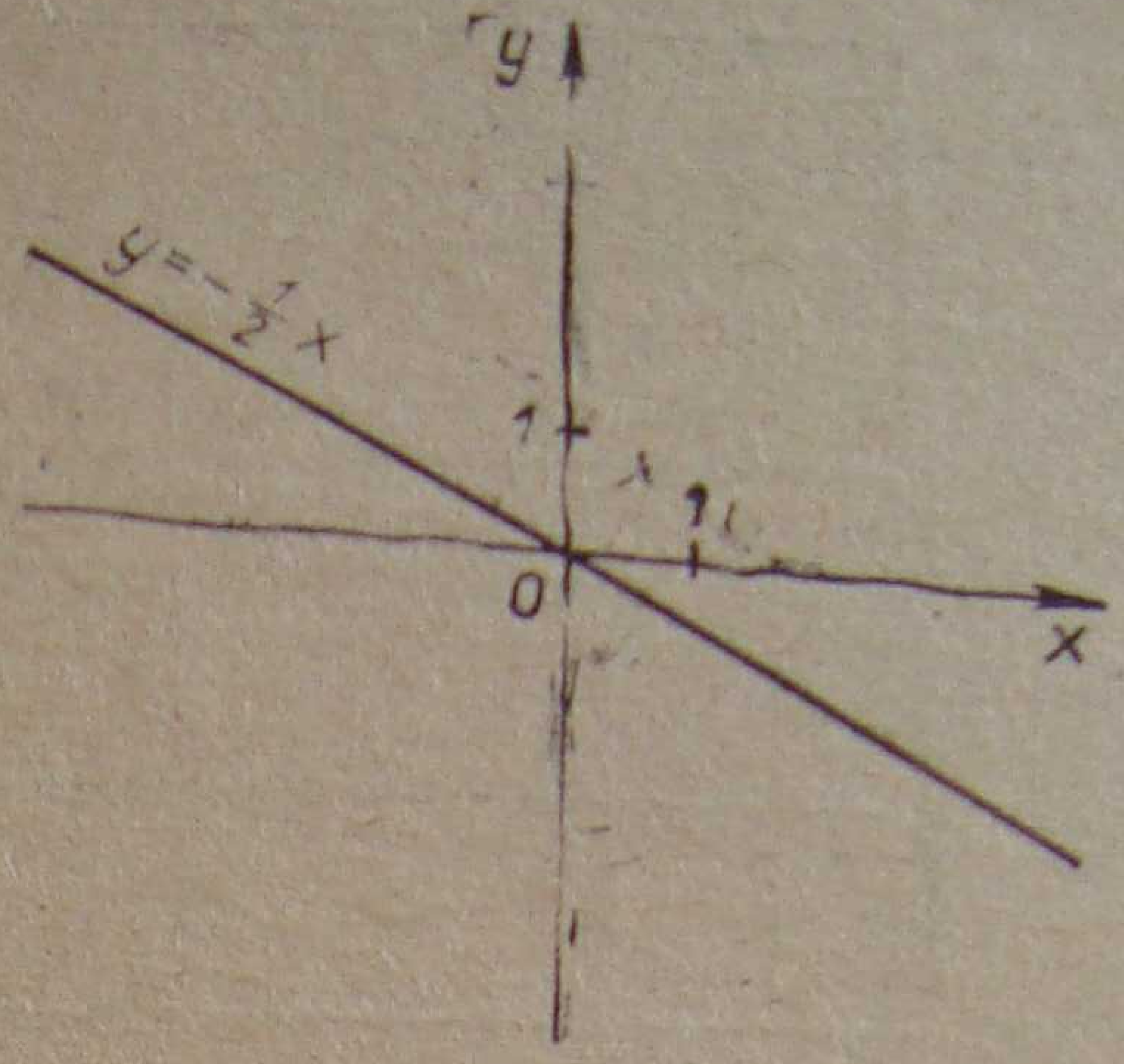
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−9	−6	−3	0	3	6	9	12

Կոորդինատների Oxy *ուղղանկյուն համակարգում* x *և* y *փոփոխականների համապատասխան արժեքների յուրաքանչյուր* (x; y) *կարգավորված զույգը, օրինակ,* (−2; −6), (0; 0), (3; 9) *և այլ զույգերը, կդիտարկենք որպես հարթության որոշակի կետի կոորդինատներ։ Կառուցելով այդ կետերը և տեղադրելով քանոնը, կնկատենք, որ դրանք բոլորը գտնվում են կոորդինատների սկզբնակետով անցնող միևնույն ուղիղ գծի վրա։ Այդ ուղիղն էլ հենց* $y=3x$ *ֆունկցիայի գրաֆիկն է (նկ. 53)։*

$y=-\dfrac{1}{2}x$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցենք նույն եղանակով։*



Նկ. 53



Նկ. 54

Կազմենք աղյուսակ.

x	−2	−1	0	1	2	3
y	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{3}{2}$

Այս գրաֆիկը ևս կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղիղ է (Նկ. 54)։

Այսպիսով, $y=kx$ ուղիղ համեմատականության գրաֆիկը կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղիղ է։

y-ի ցանկացած արժեք ($k\neq0$ դեպքում) կարող է լինել $y=kx$, $k\neq0$ ֆունկցիայի արժեք՝ x արգումենտի որոշ արժեքի դեպքում։ Հետևաբար, $y=kx$ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը, ինչպես և որոշման տիրույթը, բոլոր թվերի բազմությունն է (Նկ. 53, 54)։

$k>0$ դեպքում ուղիղը գտնվում է I և III կոորդինատային քառորդներում, իսկ $k<0$ դեպքում՝ II և IV քառորդներում։

Համեմատականության k գործակցի և առանձնապես նրա նշանի դերը մեկ անգամ ևս ընդգծելու համար միևնույն գծագրի վրա կառուցենք մի քանի գրաֆիկ՝ k-ի զանազան արժեքների դեպքում (Նկ. 55—56)։

Վարժություններ

261. x և y փոփոխականները ուղիղ համեմատական են։ Լրացրեք աղյուսակը.

ա)

x	−5	−3	1	2,5	5
y					−10

բ)

x		−2	1	1,5	5
y	4	6			

262. Կառուցեք հետևյալ բանաձևով տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.

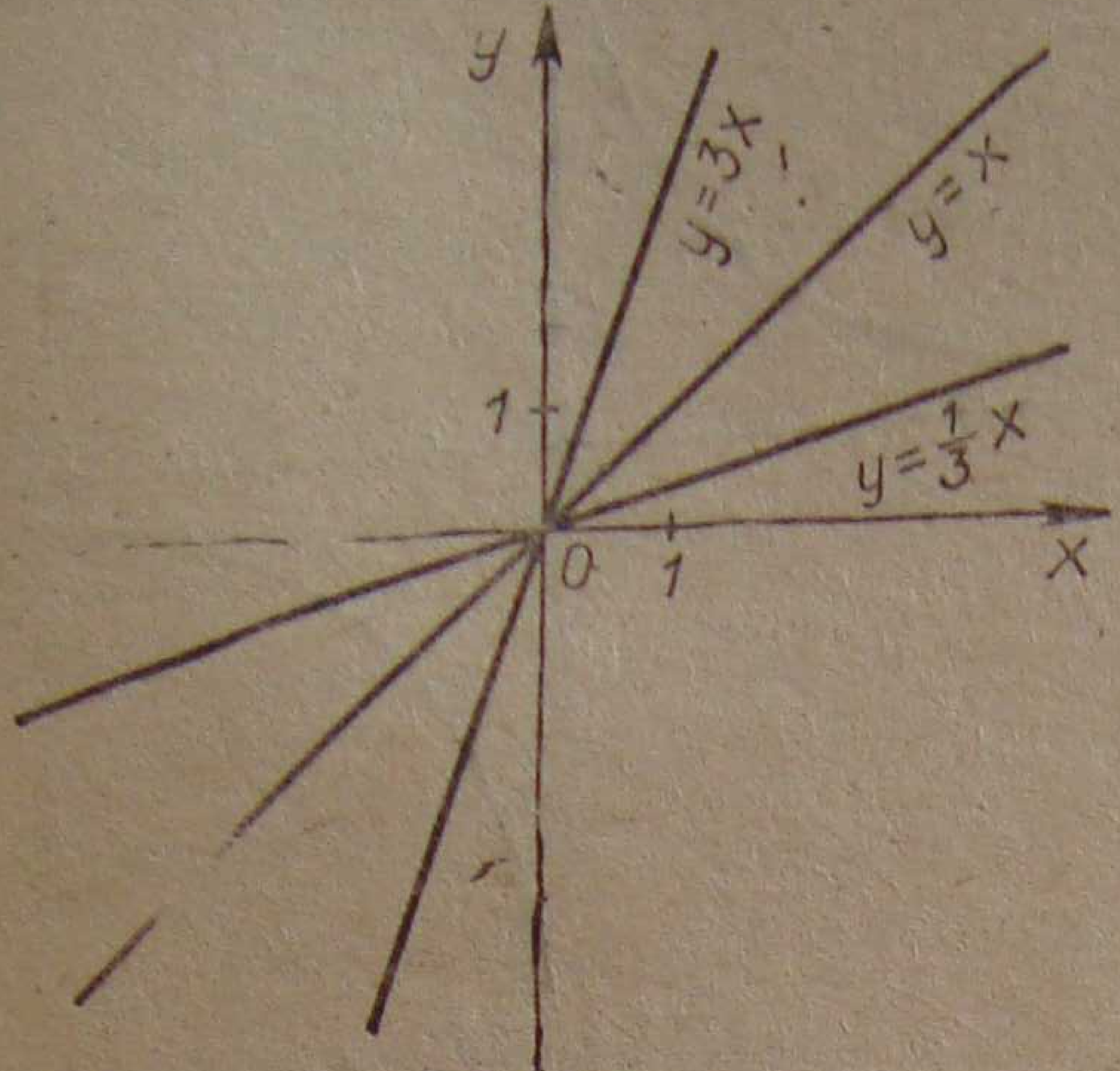
ա) $y=2x$, բ) $y=-2x$, գ) $y=-\frac{3}{4}x$, դ) $y=\frac{2}{3}x$։

§ 43. ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԳՐԱՖԻԿԸ

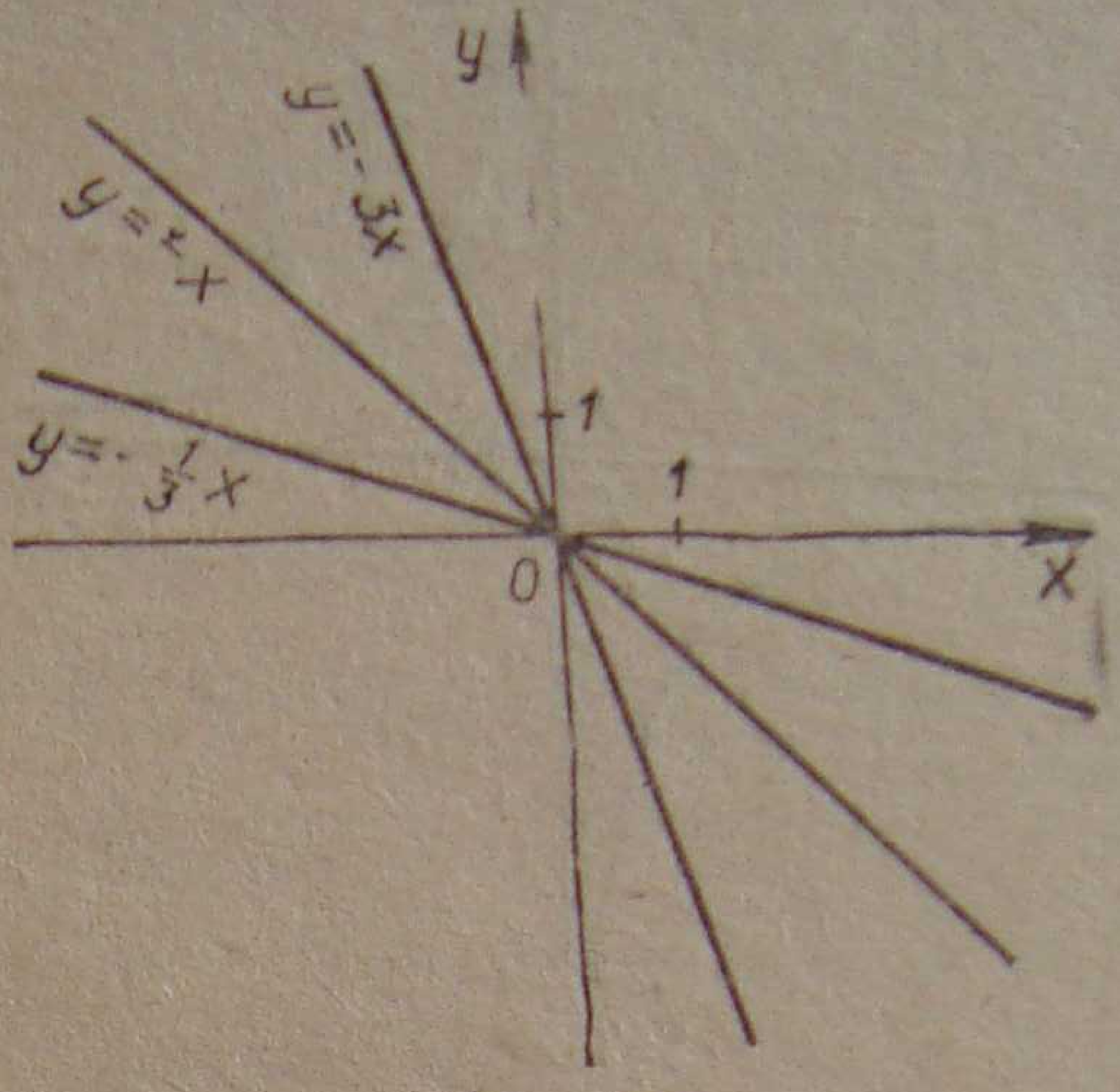
Դիցուք ֆունկցիան տրված է $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$ բանաձևով, որն արտահայտում է x և y փոփոխականների հակադարձ համեմատականությունը։ Որոշակիության համար ընդունենք $k=6$, կազմենք $y=\frac{6}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Կազմենք աղյուսակ.

x	−6	−3	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	6
y	−1	−2	−3	−6	−12	12	6	3	2	1

Դիտարկենք փոփոխականների համապատասխան արժեքների յուրաքանչյուր (x, y) կարգավորված զույգը։ Կոորդինատային հարթության վրա նշենք այն կետերը, որոնց կոորդինատները գտնվում են աղյուսակում։ Միացնելով բացասական, իսկ այնուհետև դրական աբսցիսներով կետերը, կստանանք $y=\frac{6}{x}$ բանաձևով տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Գրաֆիկն իրենից ներկայացնում է երկճյուղ մի կոր, որը գտնվում է I և III կոորդինատային քառորդներում։ $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոչվում է հիպերբոլ (նկ. 57)։ $xy=6$



Նկ. 55



Նկ. 56

հավասարությունից երևում է, որ $x \neq 0$ և $y \neq 0$, ուստի $y = \frac{6}{x}$ հիպերբոլը չի հատում կոորդինատների առանցքները։

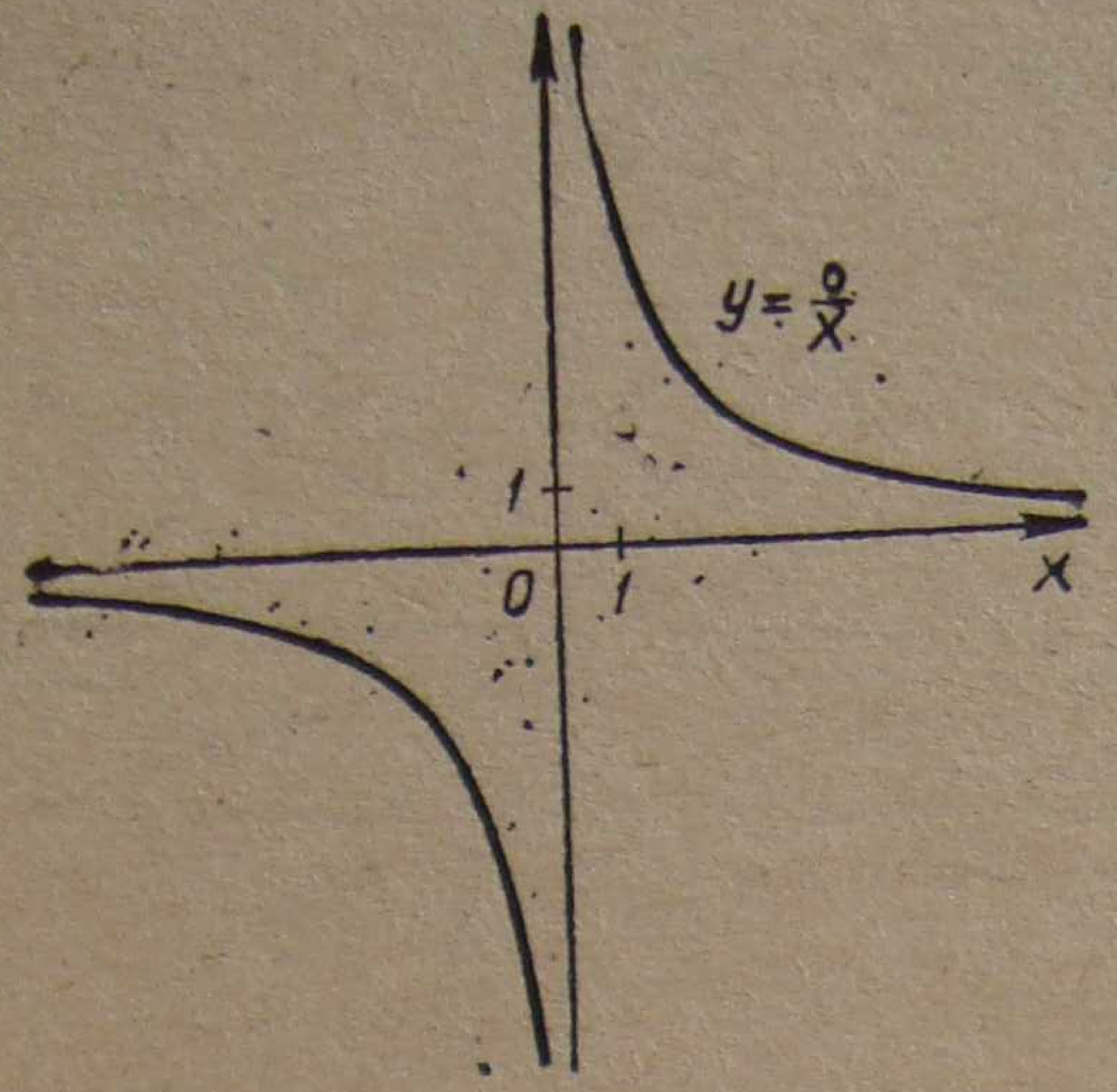
Դիտենք այժմ հակադարձ համեմատականության գործակիցը հավասար է բացասական թվի, օրինակ, $k = -2$։ Կառուցենք $y = -\frac{2}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Կազմենք աղյուսակ.

x	−4	−2	−1	1	2	4
y	$\frac{1}{2}$	1	2	−2	−1	$-\frac{1}{2}$

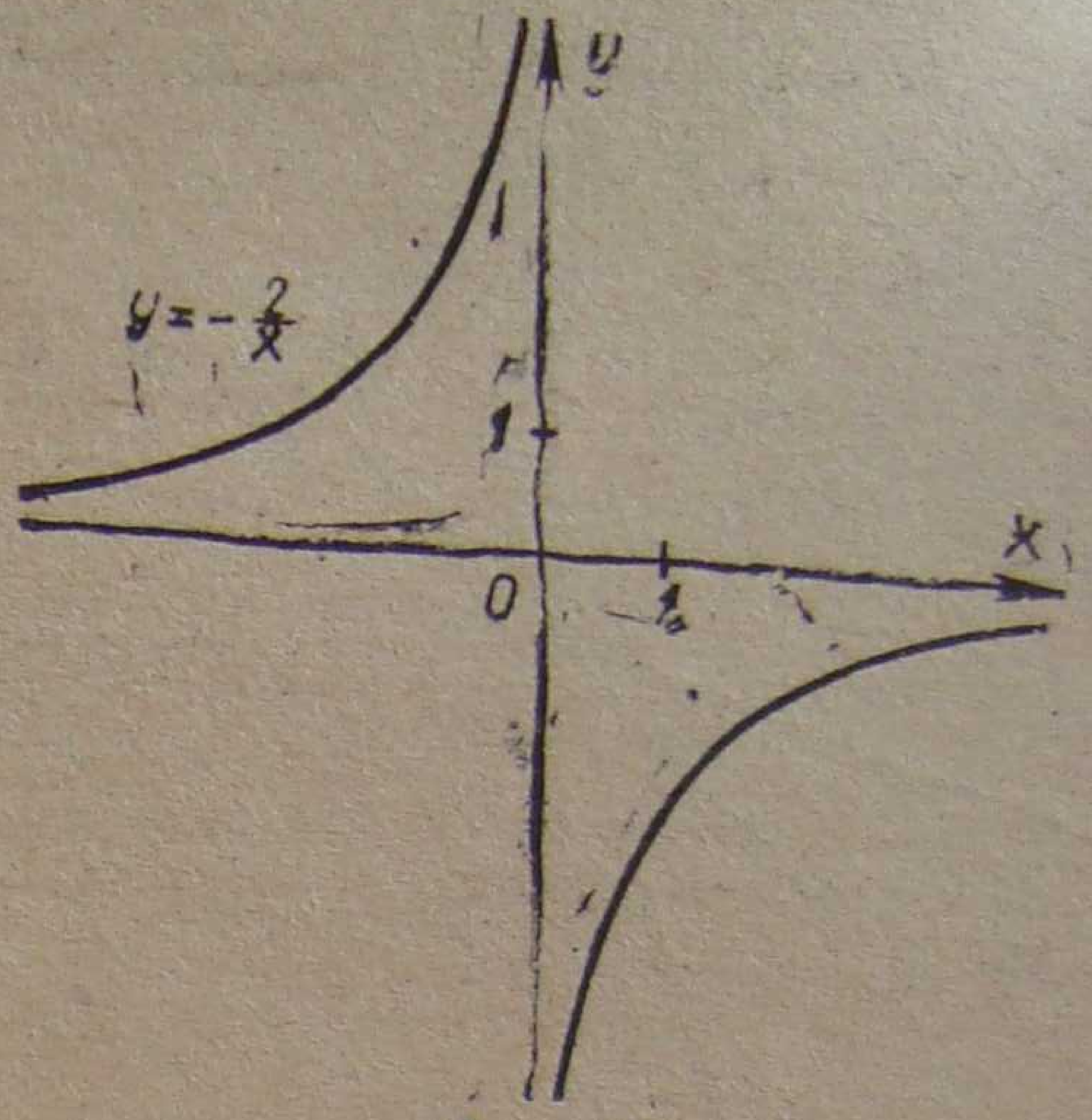
Կառուցենք այն կետերը, որոնց կոորդինատները x և y փոփոխականների համապատասխան արժեքներն են։ Սահուն գծով նախ միացնենք բացասական, իսկ այնուհետև դրական աբսցիսներով կետերը։ Նորից ստացվում է հիպերբոլ։ Այն կազմված է երկու ճյուղերից, որոնք գտնվում են II և IV քառորդներում (նկ. 58)։ Նրա ճյուղերը չեն հատում կոորդինատային առանցքներից ոչ մեկը։

Այսպիսով, $k > 0$ դեպքում հիպերբոլի ճյուղերը գտնվում են I և III կոորդինատային քառորդներում (նկ. 57), իսկ $k < 0$ դեպքում՝ II և IV կոորդինատային քառորդներում (նկ. 58)։

$y = \frac{k}{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների տիրույթը զրոյից տարբեր բոլոր թվերի բազմությունն է (նկ. 57, 58)։



Նկ. 57



Նկ. 58

Վարժություններ

263. x և y փոփոխականները հակադարձ համեմատական են։ Լրացրեք աղյուսակը.

ա)

x	−5	−3	−2	−1	0,5	1,5	2	3	5
y			−5						

բ)

x	−4	−3	−2	−1	0,5	1	2	3	4
y									

264. Կառուցեք հետևյալ բանաձևով տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y=\frac{8}{x}$, բ) $y=-\frac{6}{x}$, գ) $y=-\frac{4}{x}$, դ) $y=\frac{2}{x}$։

Ինքնուրույն աշխատանք №7

1. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը. ա) $y=4x$, բ) $y=-4x$։

2. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը. ա) $y=\frac{4}{x}$, բ) $y=-\frac{8}{x}$,

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ի՞նչն է կոչվում ֆունկցիա։ Ի՞նչն է կոչվում ֆունկցիայի որոշման տիրույթ։ Ի՞նչն է կոչվում ֆունկցիայի արժեքների տիրույթ։

2. Կազմեցեք չորսական տարրերից բաղկացած երկու բազմություն և դրանց տարրերի միջև ստեղծեք երկու համապատասխանություն այնպես, որ մեկը լինի ֆունկցիա, իսկ մյուսը՝ ոչ։

3. Նշեցեք $y=kx$ և $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի որոշման և արժեքների տիրույթները։

4. Ի՞նչ է $y=kx$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Ո՞ր կոորդինատային քառորդներում է գտնվում գրաֆիկը $k>0$ դեպքում և $k<0$ դեպքում։

5. Ի՞նչ է $y=\frac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Ո՞ր կոորդինատային քառորդներում է գտնվում գրաֆիկը $k>0$ դեպքում և $k<0$ դեպքում։ Գրաֆիկը հատու՞մ է արդյոք կոորդինատների առանցքները։

9—509

ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ։ ՀԱՇՎԵՔԱՆՈՆ

§ 44. ԹՎԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ՍԽԱԼՆԵՐԸ

Կենցաղում, դպրոցի պարապմունքներին, մեր պրակտիկ գործունեության մեջ մենք մշտապես հանդիպում ենք զանազան չափումների։ Երկարություն չափելու համար մենք օգտագործում ենք մասշտաբային քանոն կամ չափերիզ, անկյուն չափելու համար՝ փոխադրիչ, ժամանակ՝ ժամացույց կամ վայրկենաչափ, ջերմաստիճան՝ ջերմաչափ, օդի ճնշում՝ բարոմետր, մեքենայի արագություն՝ արագաչափ, զանգված՝ զանազան կառուցվածքի կշեռքներ և այլն։ Սակայն յուրաքանչյուր չափում, ինչպես նաև յուրաքանչյուր հաշվարկ բստ այս կամ այն սանդղակի, չի կարող լինել միանգամայն ճշգրիտ։ Չափումից կարող է ստացվել միայն մոտավոր արդյունք թեկուզ և այն պատճառով, որ հնարավոր չէ պատրաստել չափիչ սարքերի կատարյալ ճշգրիտ սանդղակներ և, բացի այդ, մեր աչքը, որի միջոցով մենք կարդում ենք այդ սանդղակների ցուցմունքները, նույնպես հեռու է կատարյալ լինելուց։ Իհարկե, արդի տեխնիկայի տնօրինության տակ կան գերզգայուն սարքեր և դրանց ցուցմունքները գրանցելու համար նախատեսված նրբագույն օպտիկական և այլ հարմարանքներ, բայց, այնուամենայնիվ, դրանից չափումների արդյունքները բացարձակ ճշգրիտ չեն դառնում։

Երբ մենք հաշվում ենք ոչ մեծ թվով մարդկանց, կենդանիների, և ընդհանրապես առարկաներ, մենք սովորաբար գործածում ենք ճշգրիտ տվյալներ։ Մենք ասում ենք, որ այսօր դասին ներկա է 28 մարդ, որ իմ պայուսակում հիմա կա 4 դասագիրք, որ դեկտեմբերն ունի 31 օր։ Բայց դահլիճում նստած կինոդիտողների թիվը ըստ վաճառված տոմսերի կարելի է որոշել միայն մոտավորապես։

Իսկ եթե մենք ցանկանայինք իմանալ անտառի ծառերի թիվը, կամ տոնահանդեսին մասնակցող մարդկանց թիվը, կամ որևէ քաղաքի բնակիչների թիվը, ապա ճշգրիտ պատասխան մենք անշուշտ չէինք ստանա։ Մեծ թվով առարկաներ հաշվելիս կարող է ստացվել միայն մոտավոր արդյունք։

Մոտավոր արդյունքների մենք հանդիպում ենք ամեն անգամ, երբ կլորացնում ենք թվերը։ Եթե, ասենք, մի օր հերթափոխի ժամանակ պատրաստվել է 496 ինչ-որ դետալ, իսկ մյուս օրը՝ 508 այդպիսի դետալ, ապա կարելի է ասել, որ երկու օրերից յուրաքանչյուրում պատրաստվել է մոտավորապես 500 դետալ։ 500-ը դետալների թվի մոտավոր արժեքն է։

Մոտավոր արդյունքների է հանգեցնում սովորական կոտորակները տասնորդական դարձնելը։ Ստորակետից հետո շատ թվանշաններ ունեցող վերջավոր տասնորդական կոտորակ ստացվելու դեպքում մենք ըստ մեր ցանկության կարող ենք կլորացնել կոտորակը և ստանալ նրա մոտավոր արժեքը։ Իսկ անվերջ տասնորդական կոտորակ ստացվելու դեպքում մենք անհրաժեշտաբար ինչ-որ տեղ ընդհատում ենք բաժանման պրոցեսը և անպայման հանգում քանորդի մոտավոր արժեքի։

Դիցուք պահանջվում է հաշվել ուղղանկյունաձև հատակ ունեցող սենյակի մակերեսը։ Չափելով սանտիմետրական բաժանումներ ունեցող չափերիզով, մենք ստացանք, որ երկարությունը հավասար է 5,62 մ-ի, իսկ լայնությունը՝ 3,78 մ-ի։ Ուստի՝ $S = 5{,}62 \cdot 3{,}78$ մ² $= 21{,}2436$ մ²։ Դա իհարկե սենյակի հատակի մակերեսի ոչ թե ճշգրիտ, այլ մոտավոր արժեքն է։ Չէ որ արդեն իսկ երկարությունն ու լայնությունը չափելիս ստացվեցին դրանց մոտավոր արժեքները, որովհետև հաշվի չառնվեցին սանտիմետրի մասերը, ուստի 21,2436 թիվը ոչ մի դեպքում չի կարող լինել մակերեսի ճշգրիտ արժեքը, որը, սովորաբար, ի վերջո անհայտ է մնում։ Դեռ ավելին, քանի որ մեզ միշտ չէ, որ հետաքրքրում են մակերեսի քառակուսի մետրի տասհազարերորդական և նույնիսկ հազարերորդական մասերը, ուստի ցանկալի է և նույնիսկ անհրաժեշտ, որ արդյունքը կլորացվի և պատասխանը ստացվի $S = 21{,}24$ մ² տեսքով։

x տառով նշանակենք որևէ մեծության ճշգրիտ (իսկական) արժեքը։ Դա միանգամայն որոշակի թիվ է (արտահայտված նույն միավորներով, ինչ և դիտարկվող մեծությունը)։ a տառով նշանակենք այդ մեծության ցանկացած մոտավոր արժեքը, որը նաև կանվանենք մոտավորություն։ a թիվը սովորաբար քիչ է տարբերվում x թվից. դա գրվում է $x \approx a$ տեսքով և կարդացվում՝ x-ը մոտավորապես հավասար է a-ի։

Քանի որ մենք որոշ մեծության x ճշգրիտ արժեքը փոխարինում ենք a մոտավոր արժեքով, ապա կարևոր է գիտենալ, թե այդ երկու թվերը որքանով են տարբերվում մեկը մյուսից։

Սահմանում։ x թվի a մոտավոր արժեքի և այդ a մոտավոր արժեքի $x-a$ տարբերությունը կոչվում է x թվի a մոտավոր արժեքի սխալ։

Այդ տարբերությունը նշանակում են Δ տառով (Δ-ն հունական այբուբենի տառ է և կարդացվում է «դելտա»). $\Delta = x - a$։

Օրինակ 1: *Դիցուք* $x = 5{,}64$, *Տրված են x թվի 4 մոտավոր արժեքներ՝* $a = 5{,}6$; $b = 5{,}7$; $c = 5{,}68$; $d = 5{,}62$։ *Հաշվել դրանց սխալները։*

Լուծում։ 1) $x - a = 5{,}64 - 5{,}6 = 0{,}04$, 2) $x - b = 5{,}64 - 5{,}7 = -0{,}06$, 3) $x - c = 5{,}64 - 5{,}68 = -0{,}04$, 4) $x - d = 5{,}64 - 5{,}62 = 0{,}02$։

Եթե a մոտավոր արժեքը փոքր է x-ից, այսինքն՝ $a < x$, *ապա* $x - a$ *սխալը դրական է, և a թիվը կոչվում է x թվի* պակասորդով մոտավոր արժեք *(կամ* պակասորդով մոտավորություն):

Եթե a մոտավոր արժեքը մեծ է x-ից, այսինքն՝ $a > x$, *ապա* $x - a$ *սխալը բացասական է և a թիվը կոչվում է x թվի* հավելորդով մոտավոր արժեք *(կամ* հավելորդով մոտավորություն):

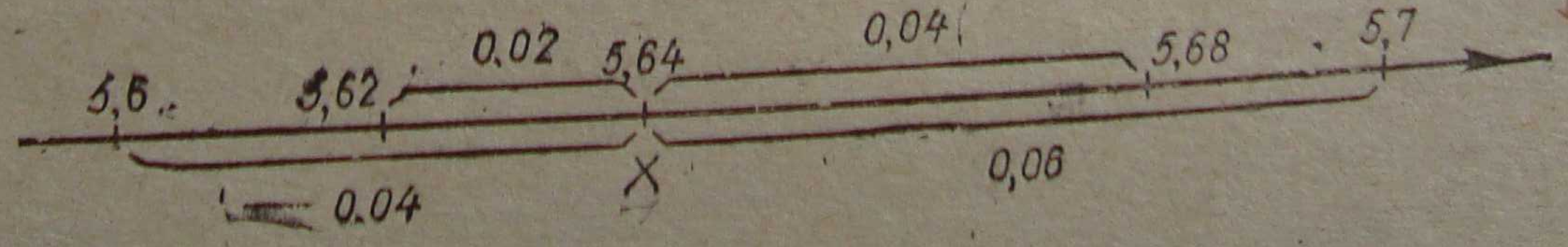
1-ին օրինակում a և d թվերը 5,64 թվի պակասորդով մոտավորություններն են, իսկ b և c թվերը՝ հավելորդով մոտավորությունները։

Կոորդինատային ուղղի վրա տեղադրենք 1-ին օրինակում նշված բոլոր թվերը (Նկ. 59)։ Չորս մոտավորություններից լավագույն կհամարենք այն, որը x թվից ավելի մոտ է գտնվում, քան մյուսները։ Դա $d = 5{,}62$ *թիվն է։ a և c թվերը հավասարապես են հեռացված x թվից և մեկը մյուսի նկատմամբ առավելություն չունեն։ Վատագույն մոտավորությունը* $b = 5{,}7$ *թիվն է։ Քանի որ կոորդինատային ուղղի վրա երկու հեռավորությունը հավասար է նրանց կոորդինատների տարբերության մոդուլին (տես § 25), ապա միևնույն x թվի լավագույն մոտավորությունն այն է, որի* բացարձակ սխալը *փոքր է։*

Սահմանում։ x թվի a մոտավորության **բացարձակ սխալ կոչվում է այն մոտավորության սխալի մոդուլը՝** $|\Delta| = |x - a|$։

1-ին օրինակում տրված $x = 5{,}64$ *թվի մոտավորությունների բացարձակ սխալները (Նկ. 59) հավասար են 0,04, 0,06, 0,04 և 0,02։*

Չափումների որակը գնահատելու համար պետք է գիտենալ, թե մոտավորության որ մասն է կազմում բացարձակ սխալը։



Նկ. 59

Սահմանում: x թվի a մոտավոր արժեքի ($a \neq 0$, $x \neq 0$) հարաբերական սխալ կոչվում է այդ մոտավորության բացարձակ սխալի հարաբերությունը a թվի մոդուլին:

Հարաբերական սխալը նշանակվում է ω տառով (ω-ն հունական այբուբենի տառ է և կարդացվում է «օմեգա»). $\omega = \frac{|x-a|}{|a|}$:

Հարաբերական սխալը հաճախ արտահայտվում է տոկոսներով:

Օրինակ 2: 3,24 թվի մոտավորությունը հավասար է 3,2-ի: Հաշվել մոտավորության բացարձակ և հարաբերական սխալները:

Լուծում: Բացարձակ սխալը հավասար է $|3{,}24 - 3{,}2| = 0{,}04$: Հաշվենք հարաբերական սխալը.

$$\frac{0{,}04}{3{,}2} = \frac{4}{320} = \frac{1}{80} = \frac{100}{80}\,\% = 1{,}25\,\%:$$

Վարժություններ

265. Տրված է x թիվը և նրա մի քանի մոտավոր արժեքները: Բոլոր տրված թվերը պատկերացրեք կոորդինատային ուղղի վրա: Գրեցեք, թե մոտավորություններից որոնք են պակասորդով և որոնք՝ հավելորդով: Հաշվեցեք յուրաքանչյուր մոտավորության սխալը և բացարձակ սխալը.

ա) $x = 6{,}78$, $a = 6{,}70$, $b = 6{,}83$, $c = 6{,}80$, $d = 6{,}73$:

բ) $x = -0{,}8$, $a = -1{,}3$, $b = 0{,}2$, $c = 0{,}1$, $d = -1{,}0$:

գ) $x = 0{,}4$, $a = -0{,}3$, $b = 0{,}8$, $c = -0{,}5$, $d = 1{,}0$:

266. 24, 84 և 156 թվերը փոխարինված են համապատասխանաբար 20, 80 և 160 թվերով: Հաշվեցեք մոտավորություններից յուրաքանչյուրի բացարձակ և հարաբերական սխալները:

267. Հայտնի է 6,45 թվի մոտավորությունը. ա) 6,4, բ) 6,5: Հաշվեցեք յուրաքանչյուր մոտավորության բացարձակ և հարաբերական սխալները:

268. 7,28 թվի մոտավորություններն են 7,2 և 7,3 թվերը: Հաշվեցեք յուրաքանչյուր մոտավորության բացարձակ և հարաբերական սխալները:

§ 45. ԹՎԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԱՐԺԵՔԻ ԲԱՑԱՐՁԱԿ ՍԽԱԼԻ ԵԶՐԸ

Ոչ մի չափման դեպքում չի կարելի ստանալ չափվող մեծությունների ճշգրիտ արժեքները: Դրա փոխարեն համարյա ամեն մի չափման դեպքում կարելի է որոշել մեծության անհայտ ճշգրիտ ար-

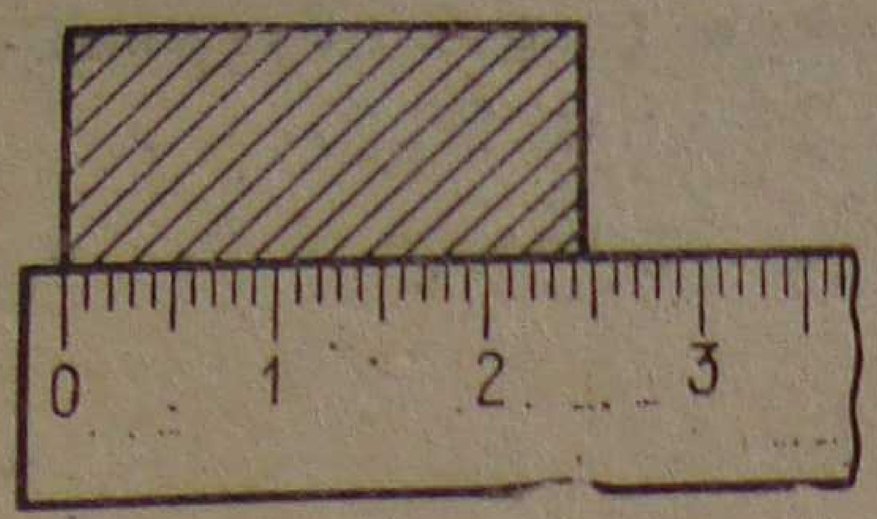
ժեքի երկու եզրերը՝ փոքրը՝ (ստորին) և մեծը՝ (վերին), այսինքն՝ երկու այնպիսի թվեր, որոնց միջև գտնվում է այդ արժեքը։ Եթե մենք ձողի երկարությունը չափում ենք մի մասշտաբային քանոնով, որի երկու հարևան բաժանումների հեռավորությունը (բաժանման արժեքը) հավասար է 1 մմ-ի, ապա ձողի l երկարությունը կարող է լինել, ասենք, 24 և 25 մմ-երի միջև. $24 \leqslant l \leqslant 25$։ Եթե մենք տետրում նկարված անկյունը չափել ենք մի փոխադրիչով, որի սանդղակի բաժանման արժեքը հավասար է 1°-ի, ապա A անկյան մեծությունը կարող է լինել, օրինակ, 74°-ի և 75°-ի միջև. $74 \leqslant A \leqslant 75$։ Եթե մենք մեր մարմնի ջերմությունը չափում ենք մի բժշկական ջերմաչափով, որի սանդղակի բաժանման արժեքը հավասար է 0,1°-ի, ապա t ջերմությունը կարող է լինել, օրինակ, 37,2°-ի և 37,3°-ի միջև. $37{,}2 \leqslant t \leqslant 37{,}3$։ Եթե առևտրական կշեռքի բաժանման արժեքը հավասար է 10 գ-ի, ապա մթերքի m զանգվածը կարող է լինել, օրինակ, 630 և 640 գ-երի միջև, այնպես որ $630 \leqslant m \leqslant 640$։

Այս բոլոր օրինակներում չափվող մեծության ճշգրիտ արժեքը կարող է համընկնել կամ երկու եզրերից որևէ մեկի հետ, կամ այդ եզրերի միջև գտնվող ցանկացած թվի հետ։ Այդպիսի ցանկացած թիվը կարելի է նաև ընդունել որպես որոնելի թվի մոտավոր արժեք։ Ծագում է նաև միանգամայն կարևոր հարց. կա՞րող է պատահել, որ մոտավոր արժեքներից մի քանիսը որոնելի թիվը ներկայացնեն ավելի ճշգրիտ, քան մյուսները, այսինքն՝ որոնելի թվին լինեն ավելի մոտիկ, քան մյուսները, և եթե այո, ապա ինչպես գտնել այդպիսի մոտավոր արժեքներ։ Այս հարցը դիտարկենք մանրամասն։

Ենթադրենք, թե մասշտաբային քանոնով մենք չափում ենք ուղիղ գծի որոշ հատված։ Քանոնի զրո սկզբնակետը համատեղելով հատվածի ծայրերից մեկի հետ, մենք տեսանք, որ հատվածի մյուս ծայրն ընկավ, ասենք, քանոնի 24 և 25 բաժանումների միջև, այնպես որ՝ $24 \leqslant l \leqslant 25$ (Նկ. 60)։

Որպես երկարության մոտավոր արժեքներ ընտրենք հաջորդաբար 24, 24, 1, 24, 2, . . ., 24, 9, 25 թվերը, որոնք միմյանցից հեռու են 0,1 մմ-ով, և լավագույն մոտավորությունը գտնելու նպատակով անհավասարությունների միջոցով գնահատենք այդ 11 թվերից յուրաքանչյուրի հնարավոր բացարձակ սխալները (Նկ. 61)։

Սկզբում վերցնենք փոքր եզրին հավասար արժեքը, այսինքն՝ 24 մմ։ Դատենք այսպես. եթե երկարության ճշգրիտ արժեքը համընկնում է մեծ եզրի հետ (25 մմ), ապա 24 արժեքի սխալի մոդուլը հավասար է $|25 - 24| = 1$, այսինքն 1 մմ։ Իսկ եթե ճշգրիտ արժեքը համընկնում է որևէ միջանկյալ թվի հետ, ապա 24 արժեքի սխալ



Նկ. 60

մոդուլը 1-ից փոքր կլինի, քանի որ միջանկյալ կետի հեռավորությունը հատվածի ձախ ծայրից փոքր է ծայրակետերի հեռավորությունից: Այսպիսով, ձախ եզրի բացարձակ սխալը, որպես կանոն, փոքր է 1-ից, բայց կարող է հասնել 1-ի. $|l - 24| \leqslant 1$:

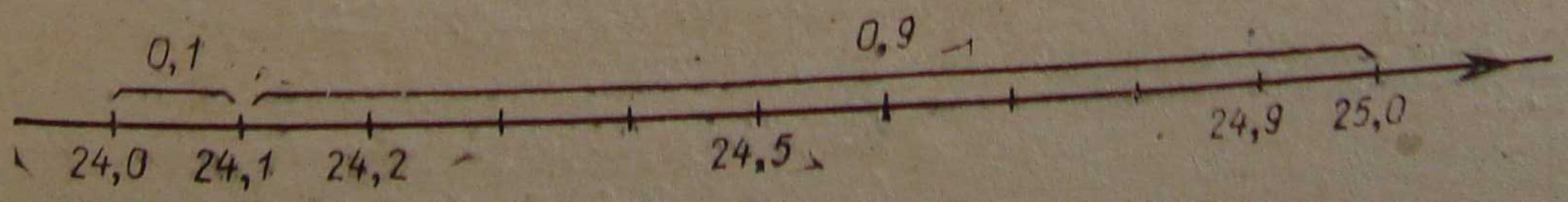
Այժմ վերցնենք $l = 24{,}1$ մմ: Այդ թիվը գտնվում է ձախ եզրից 0,1 մմ, իսկ աջ եզրից 0,9 մմ հեռավորության վրա: Եթե ենթադրենք, որ երկարության ճշգրիտ արժեքն արտահայտվում է 24-ի և 24,1-ի միջև գտնվող թվով, ապա 24,1 արժեքի սխալի մոդուլը կամ հավասար է 0,1-ի, կամ փոքր է 0,1-ից: Իսկ եթե ենթադրենք, որ ճշգրիտ արժեքն արտահայտվում է 24,1-ի և 25-ի միջև գտնվող թվով, ապա 24,1 արժեքի սխալի մոդուլը կամ հավասար է 0,9-ի, կամ փոքր է 0,9-ից: Այսպիսով, 24,1 արժեքի բացարձակ սխալը, որպես կանոն, փոքր է 0,9-ից, բայց կարող է հասնել 0,9-ի.

$$|l - 24{,}1| \leqslant 0{,}9:$$

Հանգամանորեն դատելով ընտրված բոլոր 11 թվերի մասին, կըհանգենք այսպիսի արդյունքների.

24 արժեքի մոդուլը կարող է լինել մինչև 1, 24,1-ինը՝ մինչև 0,9; 24,2-ինը՝ մինչև 0,8; 24,3-ինը՝ մինչև 0,7; 24,4-ինը՝ մինչև 0,6; 24,5-ինը՝ մինչև 0,5; 24,6-ինը՝ մինչև 0,6; 24,7-ինը՝ մինչև 0,7; 24,8-ինը՝ մինչև 0,8; 24,9-ինը՝ մինչև 0,9; 25-ինը՝ մինչև 1:

Այժմ պարզ դարձավ, որ հատվածի երկարության լավագույն մոտավորություն պետք է համարել եզրերի կիսագումարին հավասար մոտավորությունը, այսինքն՝ $l = 24{,}5$ մմ-ը, որովհետև այդ մոտավորությունը մյուսների համեմատությամբ ունի ավելի փոքր բացարձակ սխալ, որը հավասար է եզրերի հեռավորության կեսին, այսինքն՝ 0,5 մ-ի: Դիտարկենք $|l - 24| \leqslant 1$ անհավասարությունը: Պայմանավորվենք ասել, որ 24-ը ձողի l երկարության մոտավոր արժեքն է (մմ-երով) 1 (կամ 1-ի) ճշգրտությամբ և դա գրել $l = 24 \pm 1$ մմ կամ $23 \leqslant l \leqslant 25$ տեսքով:



Նկ. 61

Հանգունորեն, $|l - 24{,}1| \leqslant 0{,}9$ անհավասարությունը նշանակում է, որ 24,1-ը ձողի երկարության մոտավոր արժեքն է 0,9 ճշգրտությամբ. գրառումն է՝ $l = 24{,}1 \pm 0{,}9$ մմ կամ $23{,}2 \leqslant l \leqslant 25{,}0$։

Ընդհանրապես, $x = a \pm h$ հավասարությունը նշանակում է, որ $a - h \leqslant x \leqslant a + h$ (նկ. 62)։

Ձողի l երկարության ճշգրիտ արժեքը մեզ հայտնի չէ։ Այդ պատճառով սխալը հնարավոր չէ հաշվել ոչ մի մոտավորության համար։ Բայց, այնուամենայնիվ, գիտենալով երկարության եզրերը, մենք կարող ենք յուրաքանչյուր a մոտավորության համար նշել այնպիսի h թիվ, որը քիչ է գերազանցում $|l - a|$ բացարձակ սխալի հնարավոր արժեքները։

Սահմանում։ **Եթե a թիվը x թվի մոտավորություններից է և h թիվն այնպիսին է, որ այդ մոտավորության բացարձակ սխալը չի գերազանցում h-ը, այսինքն՝ $|\Delta| \leqslant h$, ապա a թիվը կոչվում է x թվի մոտավորություն h ճշգրտությամբ։**

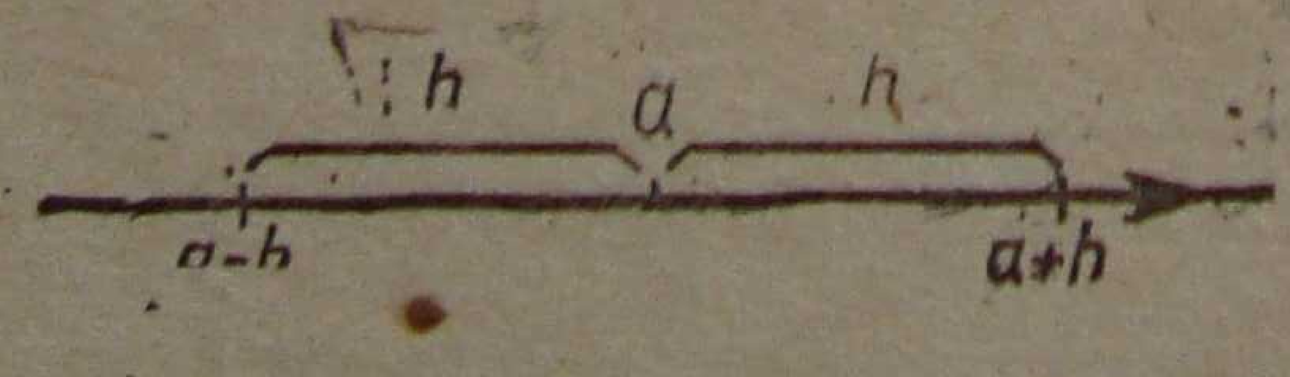
$|\Delta| \leqslant h$ անհավասարությանը բավարարող h թիվը կոչվում է մոտավորության բացարձակ սխալի եզր։

Օրինակ 1: Ինչ-որ մարմնի m զանգվածը գտնվում է հետևյալ եզրերում՝ $630 \leqslant m \leqslant 640$։ Գտնել զանգվածի լավագույն մոտավոր արժեքը և այդ մոտավորության բացարձակ սխալի եզրը։

Լուծում։ Որպես զանգվածի մոտավոր արժեք ընդունենք նրա եզրերի թվաբանական միջինը՝ $\dfrac{630 + 640}{2} = 635$։

Այդ մոտավորության բացարձակ սխալի եզրը հավասար է զանգվածի եզրերի կիսատարբերությանը։ Այսպիսով, $m = 635 \pm 5$ գ։

5 գ-ից մեծ ցանկացած թիվ, օրինակ՝ 8 գ-ը, նույնպես կարող է լինել բացարձակ սխալի եզր. $m = 635 \pm 8$ գ հավասարությունից կհետևեր, որ $627 \leqslant m \leqslant 643$։ Սակայն դա կհանգեցներ որոնելի մոտավոր արժեքը ընդգրկող ինտերվալի լայնացման՝ $627 < 630 \leqslant m \leqslant 640 < 643$, մի բան, որը ձեռնտու չէ. որքան փոքր է որոնելի թվի եզրերի միջև հեռավորությունը, այսինքն որքան նեղ է որոնելի թիվը պարունակող ինտերվալը, այնքան ճշգրիտ են համարվում նրա մոտավորությունները։ Սակայն բացարձակ սխալի եզրերի փոքր-ինչ լայնացումից օգտվում են այն բանի համար, որ եզրը գրեն քիչ թվով



Նկ. 62

նիշերով։ Օրինակ, եթե հաշվել են, որ $h = 0{,}06238$, ապա կարելի է h-ը փոխարինել թեկուզև քիչ ճշգրիտ, բայց հաշվումների համար ավելի հարմար $h_1 = 0{,}07$ կամ նույնիսկ $h_2 = 0{,}1$ թվ-

վում: Բացարձակ սխալի եզրի փոքրացումը, սակայն միշտ չէ, որ հնարավոր է. h թիվը չպետք է փոքր լինի մոտավորության բացարձակ սխալի հնարավոր որևէ արժեքից:

Օրինակ 2: Տրված է $x = 2,362307$ թիվը և նրա 2,36 մոտավորությունը: Գտնել տրված մոտավորության բացարձակ սխալը և նրա եզրը:

Լուծում: Բացարձակ սխալը հավասար է $|x - 2,36| = 0,002307$, Դա ամենափոքրն է այն թվերից, որոնք կարելի է վերցնել որպես մոտավորության բացարձակ սխալի եզր: Բայց կարելի է վերցնել նաև այլ թվեր, օրինակ, 0,0025, կամ 0,003, կամ 0,01, կամ 0,1, քանի որ ճիշտ են $0,002307 < 0,0025 < 0,003 < 0,01 < 0,1$ անհավասարությունները:

Կարելի է վերցնել նաև 0,0024 թիվը, բայց չի կարելի վերցնել 0,0021 թիվը, քանի որ $0,002307 > 0,0021$:

Օրինակ 3: Դիցուք 5,74 թիվը որոնելի x թվի մոտավորություններից է, որի բացարձակ սխալի եզրն է 0,3: Ինչպիսի՞ արժեքներ կարող է ընդունել x թիվը (Նկ. 63):

Եթե 5,74-ը հավելորդով մոտավորություն է, ապա x-ի հնարավոր արժեքները տեղադրված են 5,74 թվից ձախ և ընդ որում նրանից հեռու են ոչ ավելի, քան 0,3-ի չափով, այնպես որ $5,44 \leqslant x \leqslant 5,74$: Իսկ եթե 5,74-ը որոնելի x թվի պակասորդով մոտավորությունն է, ապա x-ի հնարավոր արժեքները գտնվում են 5,74 թվից ձախ՝ նրանից ոչ ավելի, քան 0,3 հեռավորությամբ, այնպես որ $5,74 \leqslant x \leqslant 6,04$: Այսպիսով, որոնելի x թիվը կարող է ընդունել $[5,44; 6,04]$ միջակայքի ցանկացած արժեք, այսինքն՝ $5,44 \leqslant x \leqslant 6,04$:

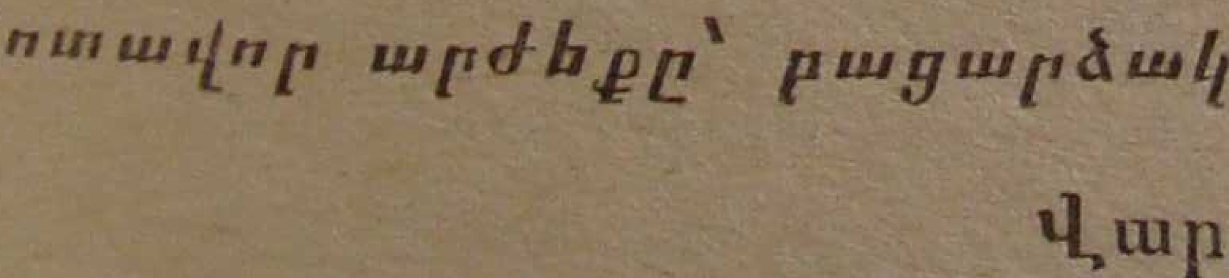
Օրինակ 4: Տրված է $x = 8,47$ թիվը: 64-րդ նկարից երևում է, որ $8,37 \leqslant a \leqslant 8,57$ ինտերվալի ցանկացած թիվ կարող է լինել նրա մոտավոր արժեքը՝ բացարձակ սխալի 0,1-ի հավասար եզրով:

Վարժություններ

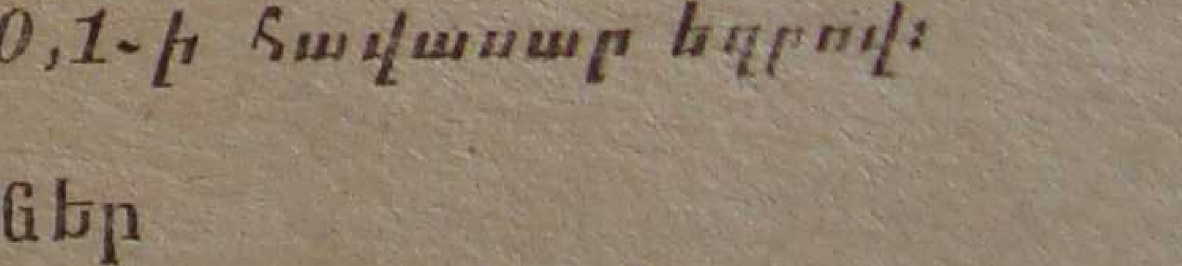
269. x թիվը փոխարինված է իր a մոտավորությամբ: Գրեցեք h բացարձակ սխալի եզրի երեք արժեք.

ա) $x = 3,74302$, $a = 3,745$, գ) $x = 0,1684$, $a = 0,1$,

բ) $x = 0,1684$, $a = 0,2$, դ) $x = 3,14159$, $a = 3,14$:



Նկ. 63



Նկ. 64

270. Ի՞նչ եզրերում կարող է գտնվել x թիվը, եթե նրա a մոտավորության բացարձակ սխալի եզրն է h.

ա) $a=4{,}23$, $h=0{,}2$, գ) $a=4\frac{2}{9}$, $h=\frac{1}{6}$,

բ) $a=-2{,}87$, $h=0{,}4$, դ) $a=-7\frac{5}{6}$, $h=\frac{1}{4}$,

271. Տրված է x թիվը։ Ի՞նչ եզրերում կարող են գտնվել նրա մոտավոր արժեքները, եթե դրանց բացարձակ սխալների եզրը նույն h-ն է.

ա) $x=5{,}82$, $h=0{,}8$, գ) $x=3\frac{5}{8}$, $h=\frac{7}{12}$,

բ) $x=-3{,}43$, $h=0{,}6$, դ) $x=-8\frac{5}{12}$, $h=\frac{7}{9}$։

272. Չափման արդյունքում ստացվել են x թվի եզրերը։ Հաշվեցեք x թվի լավագույն մոտավորությունը և նրա բացարձակ սխալի եզրը.

ա) $125<x<127$, գ) $45{,}7<x<46{,}3$,

բ) $36{,}9<x<41{,}5$, դ) $146<x<147$։

§ 46. ԹՎԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԱՐԺԵՔԻ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ՍԽԱԼԻ ԵԶՐԸ

Ենթադրենք, թե որոշ հատվածի չափումից՝ ստացվել է 20 ± 1 սմ արդյունք, իսկ մարմնի զանգվածի չափումից՝ 250 ± 10 գ արդյունք։ Ո՞ր չափումն է ավելի լավ, ավելի ճշգրիտ։ Երկարության և զանգվածի ճշգրիտ արժեքները հայտնի չեն, ուստի ոչ բացարձակ և ոչ էլ հարաբերական սխալները հնարավոր չէ հաշվել ոչ մի մոտավորության համար։ 1 սմ և 10 գ թվերը ոչ թե բացարձակ սխալներն են, այլ դրանց եզրերը։ Ցույց տանք, թե, գիտենալով այդ եզրերը, մենք ինչպես կարող ենք յուրաքանչյուր մոտավորության համար նշել այնպիսի թիվ, որը փոքր-ինչ գերազանցում է մոտավորության հարաբերական սխալի հնարավոր արժեքները։

Հատվածի երկարության համար ունենք՝ $a=20$ սմ, $h=1$ սմ։

Քանի որ հարաբերական սխալը հավասար է $\omega=\frac{|\Delta|}{|a|}$, իսկ $|\Delta|\leqslant h$, ապա $\omega\leqslant\frac{h}{|a|}$, այսինքն՝ $\omega\leqslant\frac{1}{20}$, հենց $\frac{1}{20}=5\%$ թիվն էլ մենք կընդունենք որպես հարաբերական սխալի եզր։ Համանման եզրը զանգ-

մածի դեպքում հավասար է $\frac{10}{250}=\frac{1}{25}=4\%$: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ զանգվածը չափված է ավելի ճշգրիտ, քան երկարությունը:

Սահմանում: Եթե a թիվը x թվի մոտավորություններից է և եթե ε թիվն այնպիսին է, որ այդ մոտավորության ω հարաբերական սխալը չի գերազանցում ε-ը, այսինքն՝ եթե $\omega \leqslant \varepsilon$, ապա a թիվը կոչվում է x թվի մոտավորություն ε հարաբերական ճշգրտությամբ (ε-ը հունական այբուբենի տառ է և կարդացվում է «էպսիլոն»):

$\omega \leqslant \varepsilon$ անհավասարությանը բավարարող ε թիվը կոչվում է մոտավորության հարաբերական սխալի եզր:

ε թիվը հաճախ արտահայտվում է տոկոսներով: Դիցուք որոշվել է ինչ-որ մոտավորության հարաբերական սխալի ε եզրը: ε-ից մեծ ցանկացած ε_1 թիվը նույնպես կարող է լինել այդ մոտավորության հարաբերական սխալի եզր: ε-ը կարելի է մի փոքր մեծացնել թեկուզև այն բանի համար, որ եզրը գրենք քիչ թվով նիշերով, մի բան, որը ավելի հարմար է հաշվումների համար: Բայց փոքրացնել մոտավոր արժեքի հարաբերական սխալի եզրը միշտ չէ, որ հնարավոր է. ε թիվը չպետք է փոքր լինի մոտավորության հարաբերական սխալի հնարավոր որևէ արժեքից:

Քանի որ $\omega=\frac{|\Delta|}{|a|}=\frac{|x-a|}{|a|}\leqslant\frac{h}{|a|}$, ապա $\frac{h}{|a|}$ թիվը կարելի է ընդունել որպես x թվի a մոտավորության ε հարաբերական սխալի եզր, ուստի ստանում ենք՝ $\varepsilon=\frac{h}{|a|}$:

Այս բանաձևը կարևոր նշանակություն ունի. գիտենալով h-ը, կարելի է հաշվել ε-ը, և ընդհակառակը, գիտենալով ε-ը, կարելի է հաշվել h-ը:

Օրինակ 1: *Որոշ մարմնի m զանգվածի չափումից ստացվել է $m=690\pm5$գ արդյունքը: Գտնել զանգվածի միջին արժեքի հարաբերական սխալի եզրը:*

Լուծում: $\varepsilon=\frac{5}{690}=\frac{1}{138}\approx0{,}00725=0{,}725\%\approx0{,}8\%$: (Մենք պատասխանը կլորացնում ենք մեծացնելով, այսինքն՝ ε թիվը վերցնում ենք հավելուրդով):

Օրինակ 2: *8,364 թիվը փոխարինվել է 8,4 մոտավոր արժեքով: Գտնել հարաբերական սխալը և ընտրել մոտավորության սխալի եզրը:*

Լուծում։ Հարաբերական սխալը հավասար է՝ $\frac{|1-0{,}036|}{8{,}4}=\frac{0{,}36}{84}=$ $=\frac{0{,}03}{7}=\frac{3}{700}=\frac{3}{7}\%$։ Որպես հարաբերական սխալի եզր կարելի է վերցնել $\frac{3}{700}$-ից մեծ արժեքներ. քանի որ $\frac{3}{700}\approx 0{,}0042857$, ապա կարելի է ընդունել $\varepsilon=0{,}0043=0{,}43\%$ կամ $\varepsilon=0{,}005=0{,}5\%$, բայց չի կարելի ընդունել $\varepsilon=0{,}004=0{,}4\%$, քանի որ $\frac{3}{7}>0{,}004$։

Վարժություններ

273. x թիվը փոխարինվել է իր a մոտավոր արժեքով։ Գրեցեք x թվի a մոտավորության հարաբերական սխալի եզրի երկու արժեք։

ա) $x=0{,}269$, $a=0{,}2$, գ) $x=2{,}8627$, $a=2{,}85$,

բ) $x=0{,}269$, $a=0{,}3$, դ) $x=3{,}1416$, $a=3{,}14$։

274. Չափումից ստացվել են x թվի եզրերը։ Հաշվեցեք չափման միջին արդյունքը և նրա հարաբերական սխալի եզրը։

ա) $1600<x<1760$, գ) $68{,}5<x<82{,}3$,

բ) $300<x<360$, դ) $385<x<467$։

§ 47. Թվերի կլորացումը։ Թվի տասնորդական նիշերը և իմաստալից թվանշանները

Մոտավոր հաշվումների ժամանակ հարկ է լինում թվերը կլորացնել այս կամ այն կարգի ճշգրտությամբ։

Որպեսզի թիվը տրված կարգի ճշգրտությամբ կլորացնենք պակասորդով, *պետք է թվի բոլոր այն նիշերը, որոնք գրված են այդ կարգից աջ, փոխարինել զրոներով։*

Որպեսզի թիվը տրված կարգի ճշգրտությամբ կլորացնենք հավելորդով, *պետք է տրված կարգից աջ գտնվող բոլոր նիշերը փոխարինել զրոներով, իսկ այդ կարգի թվանշանը ավելացնել մեկ միավորով։*

Եթե թիվը կլորացված է հարյուրի, տասի, միավորի, տասնորդական մասերի, հարյուրերորդական մասերի և այլնի ճշգրտությամբ, ապա կասենք, որ այդ թիվը տրված է 100; 10; 1; 0,1; 0,01 և այլ ճշգրտությամբ։

Օրինակ, հարյուրի ճշգրտությամբ՝ $386\approx 400$ *(հավելորդով),* 0,1 *ճշգրտությամբ՝* $5{,}3208\approx 5{,}3000=5{,}3$ *(պակասորդով)։*

Օրինակ 1։ 7,40952 թիվը կլորացնել 1; 0,1; 0,01; 0,001 և 0,0001 ճշտությամբ. ա) պակասորդով, բ) հավելորդով։

Պատասխաններ. ա) 7; 7,4; 7,40; 7,409; 7,4095,
բ) 8; 7,5; 7,41; 7,410; 7,4096։

Մի շարք խնդիրներ լուծելիս հարկ է լինում թիվը կլորացնել միայն պակասորդով կամ միայն հավելորդով։ Բայց շատ հաճախ թվերը կլորացնում են այնպես, որ կլորացման սխալը լինի ամենափոքրը։ Այդ դեպքերում կիրառվում է կլորացման հետևյալ հիմնական կանոնը։

Թիվը տվյալ կարգի ճշտությամբ կլորացնելու համար պետք է այդ կարգից աջ գրված բոլոր թվանշանները փոխարինել զրոներով։ Եթե փոխարինելի թվանշաններից առաջինը փոքր է 5-ից, այսինքն՝ 0, 1, 2, 3 կամ 4 է, ապա տվյալ կարգի թվանշանը չի փոխվում։ Եթե փոխարինելի թվանշաններից առաջինը մեծ է կամ հավասար 5-ի, այսինքն՝ 5, 6, 7, 8 կամ 9 է, ապա այդ կարգի թվանշանը մեծացվում է մեկ միավորով։

Այսպիսով, եթե փոխարինելի թվանշաններից ձախից առաջինը 0, 1, 2, 3, 4 է, ապա կլորացումը կատարվում է պակասորդով, իսկ եթե այդ թվանշանը 5, 6, 7, 8, 9 է, ապա՝ հավելորդով։

Օրինակ 2։ 7,40952 թիվը կլորացնել հաջորդաբար միավորի, տասնորդական, հարյուրերորդական, հազարերորդական մասերի ճշտությամբ։

Պատասխաններ. 7; 7,4; 7,41; 7,410; 7,4095։

Տասնորդական կոտորակի բոլոր այն թվանշանները, որոնք գրված են ստորակետից աջ, կոչվում են թվի տասնորդական նիշեր։

Օրինակ, 25,034; 0,72; 350,1; 2,03004 թվերն ունեն համապատասխանաբար 3, 2, 1 և 5 տասնորդական նիշեր։ Առաջին տասնորդական նիշը համապատասխանում է տասնորդական մասերի կարգին, երկրորդը՝ հարյուրերորդական մասերի կարգին և այլն։

Օրինակ 3։ 24,7286; 210,074; 4805,396 թվերը կլորացնել 2 տասնորդական նիշի ճշտությամբ։

Պատասխաններ. 24,73; 210,07; 4805,40։

Դիցուք պահանջվում է 5-ը 34-ի բաժանման քանորդը գտնել 0,001 ճշտությամբ և արդյունքը կլորացնել 0,1 ճշտությամբ։ Ունենք՝ $\frac{5}{34} \approx 0,147$։ Եթե 0,147-ը կլորացնենք նախ հարյուրերորդականի, իսկ այնուհետև տասնորդականի ճշտությամբ, ապա կստանանք հաջորդաբար 0,15 և 0,2։ Իսկ եթե 0,147-ը միանգամից կլորացնենք տասնորդականի ճշտությամբ, ապա կստանանք 0,1, որ ճիշտ պատասխանն է։

Թվի **իմաստալից թվանշաններ** *կոչվում են նրա բոլոր թվանշանները, բացի այն զրոներից, որոնք գտնվում են զրոյից տարբեր առաջին թվանշանից ձախ։*

230,04; 0,0507; 1,00302; 0,003; 25,0001; 18,23020; 35; 410 թվերն ունեն համապատասխանաբար 5, 3, 6, 1, 6, 7, 2, 3 իմաստալից թվանշաններ։

Թվերի մոտավոր արժեքները գրելիս սովորաբար նկատի են ունենում հետևյալ պայմանը։

Եթե ասված է, որ հատվածի երկարությունը $l=23{,}0$ *մմ է, ապա դա պետք է հասկանալ այնպես, որ չափումը կատարված է միլիմետրի տասներորդական մասի ճշգրտությամբ, մինչդեռ* $l=23$ *մմ գրառումը ցույց է տալիս, որ չափումը կատարված է միլիմետրի ճշգրտությամբ։ Նույն կերպ է հասկացվում նաև այն պնդումը, որ, ասենք, մարզիկը որոշ տարածություն վազել է 11,0 վ-ում (չափումը կատարվել է միլիմետրի տասներորդական մասի ճշգրտությամբ)։ Ուստի 23,0 և 11,0 թվերն ունեն երեքական իմաստալից թվանշան, իսկ 23 և 11 թվերը՝ միայն երկուական իմաստալից թվանշան։*

Օրինակ 4։ *24,7286; 210,074; 4800,396; 72,103 թվերը կլորացնել 4 իմաստալից թվանշանի ճշգրտությամբ։*

Պատասխաններ. 24,73; 210,1; 4800; 72,10։

Վարժություններ

275. *Թվերը կլորացրեք հարյուրի, միավորի, տասներորդական, հարյուրերորդական, հազարերորդական մասերի ճշգրտությամբ։*

ա) 3620,80745; 208,4724; 82,30065; 0,03472,

բ) 4530,70627; 307,3832; 74,40078; 0,02361։

276. *Սովորական կոտորակների արժեքները գտեք 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 ճշգրտությամբ.*

ա) $\frac{8}{13}, \frac{12}{19}, \frac{15}{28},$ *բ)* $\frac{12}{17}, \frac{18}{23}, \frac{35}{44},$

277. *Թիվը կլորացրեք 0,01 ճշգրտությամբ և հաշվեցեք կլորացման. ա) սխալը, բ) հարաբերական սխալը.*

ա) $\frac{5}{71},$ *բ)* $\frac{45}{64},$

278. Թվերը կլորացրեք 2, 3, 4 նիշանոց թվանշանի ճշտությամբ.

ա) 3476,803; 34,76803; 5,09684; 0,0039956; $\frac{1}{37}$,

բ) 4367,604; 43,67604; 6,09873; 0,0049968; $\frac{1}{49}$,

§ 48. ԹՎԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՀԵՏ ԿԱՏԱՐՎՈՂ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԻ ԿԼՈՐԱՑՈՒՄԸ

Օրինակ 1: Երկու հատվածների երկարությունների չափման արդյունքներն են x=64 սմ, y=28 սմ: Գտնել այդ հատվածների երկարությունների գումարը:

Թվում է, թե ինչ կարող է լինել ավելի պարզ, քան այս խնդիրը: Չէ որ պատասխանն ակնհայտ է՝ x+y=92 սմ: Բայց հատվածները չափելով սանտիմետրի ճշտությամբ, մենք, հավանաբար, անտեսել ենք միլիմետրերը. 64 սմ արդյունքը կարող էր ստացվել նաև այն դեպքում, երբ հատվածի երկարությունը, չափված միլիմետրերով, հավասար լիներ 63,5; 63,6; 63,7; 63,8; 63,9; 64,0; 64,1; 64,2; 64,3; 64,4; 64,5 սմ: Նույն կերպ էլ 28 սմ արդյունքի տակ «թաքնված են» երկրորդ հատվածի երկարության հնարավոր արժեքները 27,5 սմ-ից մինչև 28,5 սմ: Այսպիսով, x և y երկարությունների համար տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները. $63{,}5 \leq x \leq 64{,}5$; $27{,}5 \leq y \leq 28{,}5$: Եվ եթե հատվածների երկարությունները հավասար լինեն, ասենք, 63,5 և 27,5, ապա նրանց գումարը կլիներ 91,0, իսկ 63,7 և 27,9 երկարությունների դեպքում՝ 91,6, իսկ 64,4 և 28,4 երկարությունների դեպքում՝ 92,8: Իսկ մեզ թվաց, թե 92 սմ-ը միանգամայն ճշգրիտ պատասխան է: Ոչ, այդ պատասխանում 2 թվանշանը կասկածելի տեղեկություններ… է տալիս: Բայց մենք համենայնդեպս կպահպանենք այդ պատասխանը (92 սմ), եթե չենք կարող կամ չենք ցանկանում տրված հատվածները չափել սանտիմետրի մասերով:

Օրինակ 2: Երկու հատվածների երկարությունների չափման արդյունքներն են՝ a=4,2457 մ, b=5,58 մ: Գտնել հատվածների երկարությունների գումարը:

Առաջին տպավորությունն այն է, որ «միանգամայն ճշգրիտ» պատասխանը պետք է լինի այսպիսին՝ a+b=9,8257 մ: Սակայն առաջին հատվածը չափվել է 0,0001 մ ճշգրտությամբ, իսկ երկրորդը՝ 0,01 մ ճշգրտությամբ, և դա կարևոր նշանակություն ունի: Ենթադրենք, թե երկրորդ հատվածն էլ է չափվել 0,0001 մ ճշգրտությամբ

և նրա չափման արդյունքում ստացվել են ևս երկու տասնորդական նիշեր: Այդ անհայտ թվանշանները մենք կնշենք կետերով՝ b=5,58.. մ: Գումարենք երկարությունները.

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 4,2457 \\ 5,58\cdot\cdot \end{array} \\
\hline
9,82\cdot\cdot
\end{array}
$$

Գումարի 4-րդ տասնորդական նիշը գտնելու համար պետք է 7-ին գումարել անհայտ թվանշանը, իսկ 3-րդ տասնորդական նիշը գտնելու համար՝ 5-ին գումարել անհայտ թվանշանը: Ուստի, բանից պարզվում է, որ գումարի 3-րդ և 4-րդ տասնորդական նիշերի մասին մենք ընդհանրապես ոչինչ չգիտենք: Սրանից հետո էլ ի՞նչ արժեք ունի մեր առաջին տպավորությունը, որ a+b=9,8257 մ: Դեռ ավելին, գումարի 2-րդ տասնորդական նիշը ևս կարող է ընդունել 3 արժեքը կախված այն բանից, թե ինչպիսին են երկրորդ գումարելիի անհայտ թվանշանները:

Այսպիսով, ընդունենք այսպիսի պատասխան. a+b=9,82 մ: 9,8257 պատասխանը ստեղծել էր միայն ճշգրտության պատրանք, քանի որ մենք այժմ արդեն պարզ հասկացանք, որ, ասենք, 7 թվանշանը ամենաչնչին վստահություն անգամ չի ներշնչում:

Այժմ փոքր-ինչ ճշգրտենք 9,82 պատասխանը: Որոնելի գումարի երրորդ տասնորդական նիշի մասին մենք համենայնդեպս ինչ-որ բան գիտենք՝ այն չի կարող 5-ից փոքր լինել, ուստի որոնելի գումարը ավելի մոտիկ է 9,83-ին, քան 9,82-ին: Այսպիսով բարելավված պատասխանն է 9,83 սմ:

Այդ բարելավված պատասխանը կարելի է ստանալ, եթե նախապես առաջին գումարելին կլորացնենք երեք տասնորդական նիշի ճշգրտությամբ, իսկ այնուհետև գումարը կլորացնենք երկու տասնորդական նիշի ճշգրտությամբ: Ահա՝ $4,2457+5,58\approx4,246+5,58=9,826\approx9,83$:

Օրինակ 3: Գումարել թվերի հետևյալ մոտավոր արժեքները. 4,267; 17,42843; 32,3; 5,48:

Եթե այս թվերը լինեին որոշ մեծությունների ճշգրիտ արժեքներ, օրինակ՝ հատվածների երկարություններ, մենք դրանց վերջում կավելացնեինք այնքան զրոներ, որքան անհրաժեշտ է, որ բոլոր գումարելիներն ունենան 5-ական տասնորդական նիշեր, և կստացվեր գումարի ճշգրիտ արժեքը՝ 59,47543: Բայց տվյալ թվերը որոշ մեծությունների մոտավոր արժեքներ են և նրանց տասնորդական նիշերի թիվը հավասարեցնել չի կարելի: Անհայտ թվանշանները փոխարինենք կետերով: Ուղղաձիգ գծիկով առանձնացնենք գումարելիների բոլոր

այն թվանշանները, որոնք գտնվում են առաջին տասնորդական նիշից աջ, և սկսենք գումարել թվերը: Պարզ է, որ գումարում տասնորդական մասերից աջ գտնվող բոլոր տեղերում կլինեն միայն կետեր, քանի որ մենք ավելի որոշակի ոչինչ չենք կարող գրել: Արդյունքում ստանում ենք 59,3 պատասխանը: Սակայն պարզ է, որ պատասխանում 3 թվանշանը ճիշտ չէ: Տասնորդական մասերը պետք է լինեն ոչ թե 3, այլ 4 կամ նույնիսկ 5, կախված այն բանից, թե ինչպիսին է, օրինակ 3-րդ գումարելիի 2-րդ տասնորդական նիշը: Պատասխանը բարելավելու համար վարվենք նախորդի նման: Բոլոր գումարելիները նախապես կլորացնենք երկու տասնորդական նիշի ճշգրտությամբ, իսկ այնուհետև գումարը կլորացնենք մեկ նիշի ճշգրտությամբ և երկրորդ նիշը դեն նետենք:

4,26700	4,2|67··	4,27
17,42843	17,4|2843	17,43
32,30000	32,3|····	32,3
5,48000	5,4|8···	5,48
59,47543	59,3|····	59,48

Պատասխան. 59,5:

Այս և սրանց նման օրինակներից անենք եզրակացություն: Եթե բոլոր գումարելիներն ունեն միևնույն թվով տասնորդական նիշեր, ապա գումարում պահպանվում է այնքան տասնորդական նիշ, որքան ունեն գումարելիները: Եթե գումարելիներն ունեն տարբեր թվով տասնորդական նիշեր, ապա դրանք պետք է կլորացնել այնպես, որ ունենան մեկ տասնորդական նիշ ավելի, քան ամենափոքր թվով տասնորդական նիշ ունեցող գումարելիները: Եթե արդյունքը վերջնական է, ապա գումարը կլորացվում է, և վերջին տասնորդական նիշը դեն է նետվում, իսկ եթե արդյունքը միջանկյալ է, այսինքն՝ այն մասնակցում է հետագա հաշվարկներում, ապա այդ նիշը պահպանվում է:

Բոլոր այս դատողությունները և եզրակացությունները ամբողջովին վերաբերում են նաև մոտավոր թվերի հանմանը:

Օրինակ 4: Գտնել թվերի մոտավոր արժեքների 8,25—4,827543 տարբերությունը:

Լուծում: 8,25—4,827543≈8,25—4,828=3,422≈3,42:

Օրինակ 5: 25,308472 և 13,980624 թվերի տարբերությունը գտնել 0,01 ճշգրտությամբ:

Սկզբում կատարենք սովորական հանում, իսկ այնուհետև վարվենք այլ կերպ. երկու թվերն էլ կլորացնենք 0,001 ճշգրտությամբ, հաշվենք տարբերությունը և այն կլորացնենք պահանջվող, 0,01 ճշգրտությամբ:

$$\begin{array}{r} 25,308472 \\ -\,13,980624 \\ \hline 11,327848 \approx 11,33 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25,308 \\ -\,13,981 \\ \hline 11,32\overline{7} \approx 11,33 \end{array}$$

Կանոն 1 (գումարի և տարբերության կլորացման)։ Թվերի մոտավոր արժեքները գումարելիս կամ հանելիս արդյունքում պետք է պահել այնքան տասնորդական նիշ, որքան որ կա ամենաքիչ տասնորդական նիշ ունեցող թվում։

Անցնենք թվերի բազմապատկմանը։

Օրինակ 6: *Հաշվել x և y այն կողմերով ուղղանկյան մակերեսը, որոնք հավասար են 0,87 և 0,36 մ։ Սովորական բազմապատկման դեպքում մենք կստանայինք հետևյալ պատասխանը.* 0,87 · 0,36 = 0,3132 *մ²։ Բայց քանի որ չափումը կատարվել է սանտիմետրի ճշգրտությամբ և նրա մասերը դեն են նետվել և, հետևաբար, կողմերի երկարությունները մոտավոր արժեքներ են, ուստի մակերեսի արժեքը ևս մոտավոր է։ Պատասխանը ճշգրտելու համար, ինչպես և նախորդ դեպքում, սանտիմետրի մասերն արտահայտող անհայտ թվանշանները նշանակենք կետերով և կատարենք բազմապատկումը.*

$$\begin{array}{r} 0,87\cdot \\ \times\ 0,36\cdot \\ \hline \cdot\cdot\cdot\cdot \\ 522\cdot \\ 261\cdot\ \ \\ \hline \bar{0},31\cdot\cdot\cdot\cdot \end{array}$$

Որոնելի արտադրյալում միայն 3 և 1 թվանշաններն են վստահություն ներշնչում։ Ճիշտ է, 1 թվանշանը մի փոքր կասկածի տեղիք է տալիս՝ նրա տեղը կարող էր զբաղեցնել և 2 թվանշանը, բայց այնուամենայնիվ մենք կպահպանենք 0,31 պատասխանը։

Օրինակ 7: *Հաշվել թվերի 5,62 և 3,78 մոտավոր արժեքների արտադրյալը։*

Ինչպես երևում է սխեմայից, պատասխանը այսպիսին է՝ 21,2։

$$\begin{array}{r} 5,62\cdot \\ \times\ 3,78\cdot \\ \hline \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 4496\cdot \\ 3\,934\cdot\ \ \\ 16\,86\cdot\ \ \ \ \\ \hline 21,2\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{array}$$

Դիտարկելով այս օրինակները, նկատենք, որ եթե երկու արտադրիչներն էլ ունեին 2-ական իմաստալից թվանշան, ապա և արտադրյալն ունի 2 իմաստալից թվանշան, իսկ եթե երկու արտադրիչներն էլ ունեին 3-ական իմաստալից թվանշան, ապա նույնքան էլ ունի արտադրյալը: Ուստի կարևոր է դիտարկել այնպիսի օրինակ, որտեղ արտադրիչներն ունենան տարբեր թվով իմաստալից թվանշաններ: Ընդհանրապես հիմա պարզ է, որ եթե գումարելիս և հանելիս հիմնական դերը խաղում էր տասնորդական նիշերի թիվը, ապա բազմապատկելիս և բաժանելիս գլխավոր դերը կխաղա իմաստալից թվանշանների թիվը:

Օրինակ 8: Հաշվել թվերի 4,307 և 0,058 մոտավոր արժեքների արտադրյալը:

Սովորական բազմապատկման դեպքում պատասխանը կլիներ 0,249806: Մյուս արդյունքը ստացվում է ըստ դիտարկված սխեմայի՝ 0,24 (ըստ այդ սխեմայի բազմապատկումը կատարեցեք ինքնուրույն): 4-ից աջ գտնվող թվանշանները վստահություն չեն ներշնչում: Սակայն պարզ է, որ ստացված արտադրյալում 4 թվանշանը պետք է մեծացնել 1-ով, քանի որ նրանից աջ գտնվող թվանշանը ակնհայտորեն մեծ է 5-ից: Բարելավված պատասխանն է 0,25: Այսպիսով, մի արտադրիչն ուներ 4 իմաստալից թվանշան, իսկ մյուսը՝ 2: Պատասխանը նույնպես ունի 2 իմաստալից թվանշան: Իսկ եթե առաջին արտադրիչը կլորացնենք 3 իմաստալից թվանշանի ճշտությամբ, ապա դարձյալ կստանանք նույն՝ 0,25 պատասխանը:

Այս և համանման օրինակներից անենք եզրակացություն: Եթե բոլոր արտադրիչներն ունեն միևնույն թվով իմաստալից թվանշաններ, ապա արտադրյալում պահպանվում են այնքան իմաստալից թվանշաններ, որքան ունի արտադրիչներից յուրաքանչյուրը: Եթե արտադրիչներն ունեն տարբեր թվով իմաստալից թվանշաններ, ապա կլորացվում են այնպես, որ արտադրիչներն ունենան մեկ իմաստալից թվանշան ավելի, քան ամենաքիչ իմաստալից թվանշան ունեցող արտադրիչը: Եթե արդյունքը վերջնական է, ապա արտադրյալը կլորացվում է և վերջին իմաստալից թվանշանը դեն է նետվում, իսկ եթե արդյունքը միջանկյալ է (այսինքն՝ այն մասնակցում է հետագա հաշվարկներում), ապա այդ թվանշանը պահպանվում է:

Այս բոլոր դատողությունները ամբողջությամբ վերաբերում են նաև մոտավոր արժեքների բաժանմանը:

Օրինակ 9: Հաշվել թվերի մոտավոր արժեքների 5,4683709 : : 2,43 քանորդը:

```
546,83709|243          546,8|243
486      |2,25         486  |2,25
 608                    608
 486                    486
  1223                  1220
  1215                  1215
     8                     5
```

Քանորդը ստացվել է 3 իմաստալից թվանշաններով. մնացորդը փոքր է բաժանարարի կեսից:

Պատասխան. 2,25:

Մենք դիտարկեցինք թվերի մոտավոր արժեքների բազմապատկումն ու բաժանումը: Եթե տրված թվերից մեկը ճշգրիտ է, ապա նրա իմաստալից թվանշանների քանակը հաշվի չի առնվում:

Կանոն 2 *(արտադրյալի և քանորդի կլորացման)*: **Թվերի մոտավոր արժեքները բազմապատկելիս և բաժանելիս արդյունքում պետք է պահպանել այնքան իմաստալից թվանշան, որքան որ կա ամենաքիչ իմաստալից թվանշան ունեցող թվում:**

Վարժություններ

Գտեք թվերի մոտավոր արժեքների գումարը կամ տարբերությունը:

279. *ա)* 15,24+1,81418+1,6463,

բ) 24,8+0,4751+8,075,

գ) 1,24432+32,4351+86,354+3454,71,

դ) 26,35—9,86034:

280. *ա)* 24,8+0,425+0,1462,

բ) 52,3+1,342+0,2176,

գ) 0,7562+1,138015+8,4913+3,54,

դ) 35,26—18,87056:

Գտեք թվերի մոտավոր արժեքների արտադրյալը կամ քանորդը:

281. *ա)* 1,852 · 2,3, *գ)* 74,5 · 0,324,

բ) 11,4 · 4,607, *դ)* 35,28054 : 8,73:

282. *ա)* 1,56 · 2,1816, *գ)* 52,4 · 3,1416,

բ) 2,14257 · 0,45, *դ)* 53,36047 : 6,42:

§ 49. ՀԱՇՎԵՔԱՆՈՆԻ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԸ

Դժվար է նշել այնպիսի մասնագիտություն, որի ներկայացուցիչները ամեն օր գործ չունենան զանազան հաշվումների հետ։ Բայց նույնիսկ ամենատարրական հաշվումները՝ թվերի բազմապատկումն ու բաժանումը, զբաղեցնում են շատ ժամանակ։ Այդ իսկ պատճառով հաշվումներն արագացնելու համար հարկ է լինում օգտագործել ամենատարբեր տիպի հաշվիչ սարքեր։

Այդ սարքերից է լոգարիթմական քանոնը, որը հնարավորություն է ընձեռում հաշվումներ կատարելիս զգալիորեն տնտեսել աշխատաժամանակը։ Լոգարիթմական քանոն կոչվում է լոգարիթմական սանդղակով հաշվեքանոնը։ Գոյություն ունեն նաև այլ տիպի սանդղակներով հաշվեքանոններ։ Լոգարիթմների մասին գաղափար կտրվի միայն ութերորդ դասարանում և այդ ժամանակ էլ կբացատրվի լոգարիթմական սանդղակի անվանման ծագումը, իսկ առայժմ մենք ամենուր կասենք հաշվեքանոն, դրա տակ հասկանալով լոգարիթմական քանոն։

Հաշվեքանոնները տարբերվում են իրենց սանդղակների չափսերով։ Լայն տարածում են գտել 12,5 սմ և 25 սմ երկարությամբ սանդղակներով քանոնները։ Շատ ավելի հարմար է 25 սմ երկարությամբ սանդղակով քանոնը։ Այդպիսի քանոնը կոչվում է նորմալ։

Հաշվեքանոնը բաղկացած է երեք հիմնական մասերից՝ իրանից, շարժակից և վազկանից (Նկ. 65)։

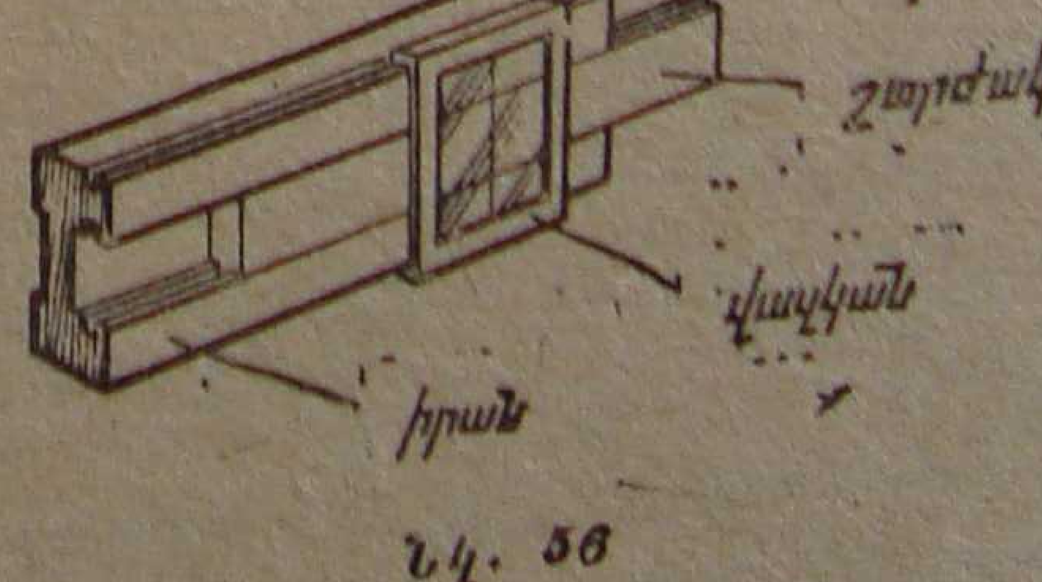
Մանրամասն դիտարկենք այդ մասերից յուրաքանչյուրը։

Իրանի դիմային մասում զետեղված են սանդղակները, ընդ որում դրանցից մեկը հավասարաչափ է, իսկ մյուսները՝ անհավասարաչափ։

Հավասարաչափ կոչվում է այն սանդղակը, որի ամբողջ երկարությունը բաժանված է հավասար հատվածների։ Այդ հատվածներից յուրաքանչյուրում չափման միավորը տեղավորվում է նույնքան անգամ։ Անհավասարաչափ սանդղակն այն սանդղակն է, որը բաժանված է տարբեր երկարությամբ հատվածների։

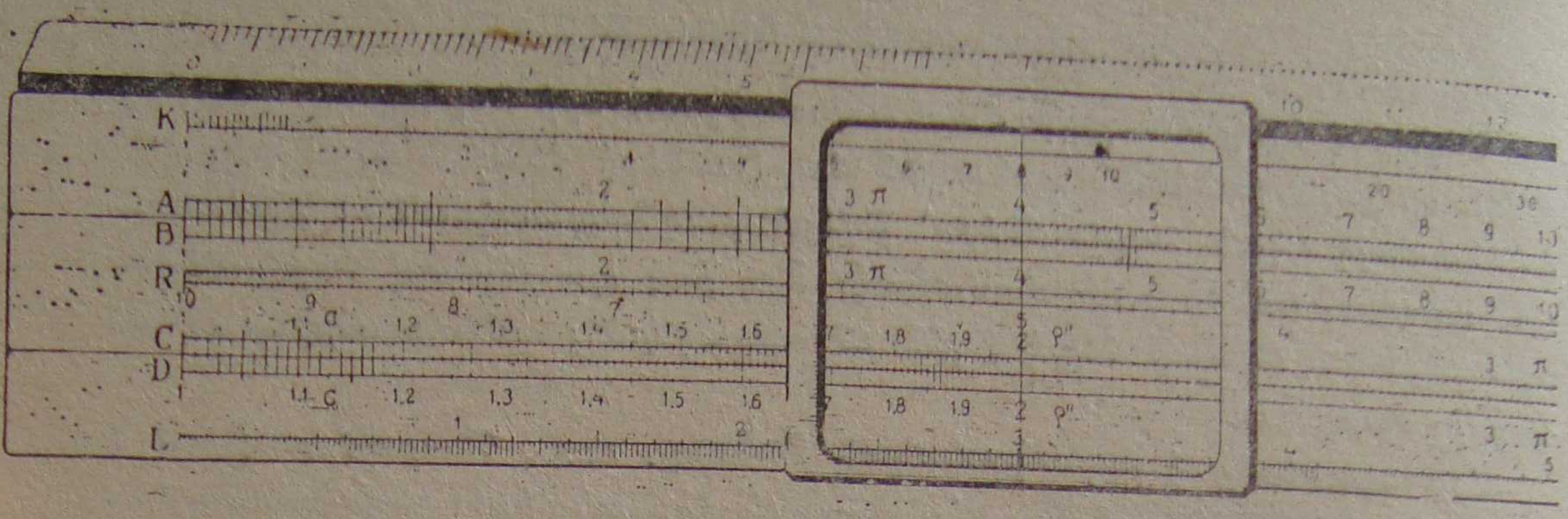
Իրանի ետևի մասում զետեղված են հաճախ հանդիպող մաթեմատիկական և ֆիզիկական հաստատուն մեծությունների արժեքները։ Իրանի եզրերին կան սանտիմետրական բաժանումներ (հավասարաչափ սանդղակ)։

Շարժակի դիմային և ետևի մասում զետեղված են երեքական սանդղակներ։ Մենք կօգտվենք միայն դիմային կողմի սանդղակներից, ուստի աշխատելիս շարժակը պետք է միշտ դեմքով դարձած լինի դեպի մեզ։



Նկ. 56

Վազկանը իրենից ներկայացնում է



Նկ. 66

ապակե երեսակով մետաղե շրջանակ։ Ապակու վրա գծված է ուղղաձիգ գծիկ, որը կոչվում է դիտագիծ։ Երբեմն վազկանի վրա լինում է երեք դիտագիծ։ Այդ դեպքում մենք կօգտվենք միջին գծից։

Ինչպես արդեն ասվեց, իրանի և շարժակի դիմային մասում զետեղված են սանդղակներ։ Դրանք թվարկենք վերից վար (Նկ. 66)։

K—խորանարդների սանդղակ,

A—քառակուսիների սանդղակ իրանի վրա,

B—քառակուսիների սանդղակ շարժակի վրա,

R—հակադարձ սանդղակ (որոշ քանոնների վրա այն չկա),

C—հիմնական սանդղակ շարժակի վրա,

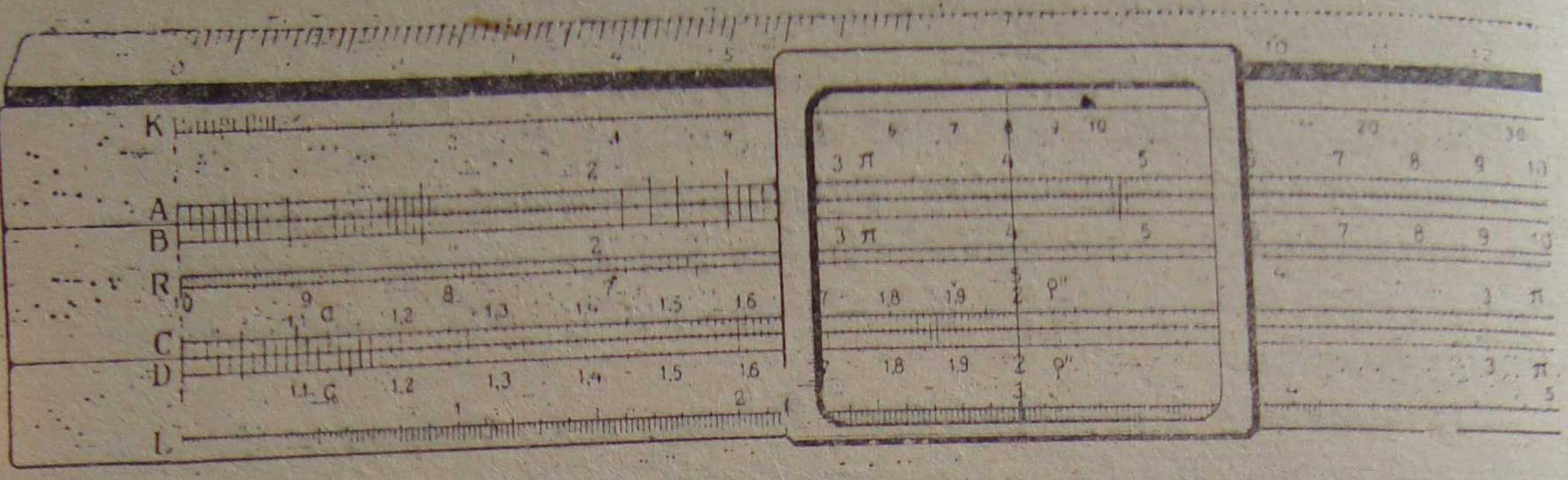
D—հիմնական սանդղակ իրանի վրա,

L—հավասարաչափ (լոգարիթմական) սանդղակ։

Ավելի մանրամասն դիտարկենք շարժակի հիմնական սանդղակը (C սանդղակը)։ Նույնպիսի սանդղակ էլ զետեղված է իրանի վրա (D սանդղակը)։

Ամբողջ հիմնական սանդղակը տրոհված է ինը մասերի (Նկ. 66)։ Դրանց սահմանները նշանակված են խոշոր թվանշաններով. ամենաձախը 1-ն է, այնուհետև 2-ը, 3-ը և այդպես մինչև 10-ը։ Դրանք, այսպես կոչված, մեծ բաժանումներն են։ Դրանց երկարությունները հավասար չեն. հիմնական սանդղակը հավասարաչափ չէ։

Ամեն մի մեծ բաժանումը տրոհված է 10 միջին բաժանման։ Միջին բաժանումների եզրերը նշված են երկար գծիկներով, ընդ որում յուրաքանչյուր հինգերորդ միջին բաժանումը նշված է ավելի երկար գծիկով։ 1-ից 2 մասում (չափսերով ամենամեծ մասում) միջին բաժանումների եզրերը նշանակված են հետևյալ երկնիշ թվերով՝ 1.1, 1.2, 1.3 և այլն։ Այդ թվանշանների չափսերը ավելի փոքր են, քան այն թվանշանները, որոնցով նշանակված են մեծ բաժանումները։ Այդ նշանակումները պետք է հասկանալ այսպես. 1.1—առաջին մեծ և առաջին միջին բաժանումը, 1.2—առաջին մեծ և երկրորդ միջին բաժանումը, 1.3—առաջին մեծ և երրորդ միջին բաժանումը և այլն։



Նկ. 66

ապակե երեսակով մետաղե շրջանակ։ Ապակու վրա գծված է ուղղաձիգ գծիկ, որը կոչվում է գիտագիծ։ Երբեմն վազկանի վրա լինում է երեք գիտագիծ։ Այդ դեպքում մենք կօգտվենք միջին գծից։

Ինչպես արդեն ասվեց, իրանի և շարժակի դիմային մասում զետեղված են սանդղակներ։ Դրանք թվարկենք վերից վար (Նկ. 66)։

K—խորանարդների սանդղակ,

A—քառակուսիների սանդղակ իրանի վրա,

B—քառակուսիների սանդղակ շարժակի վրա,

R—հակադարձ սանդղակ (որոշ քանոնների վրա այն չկա),

C—հիմնական սանդղակ շարժակի վրա,

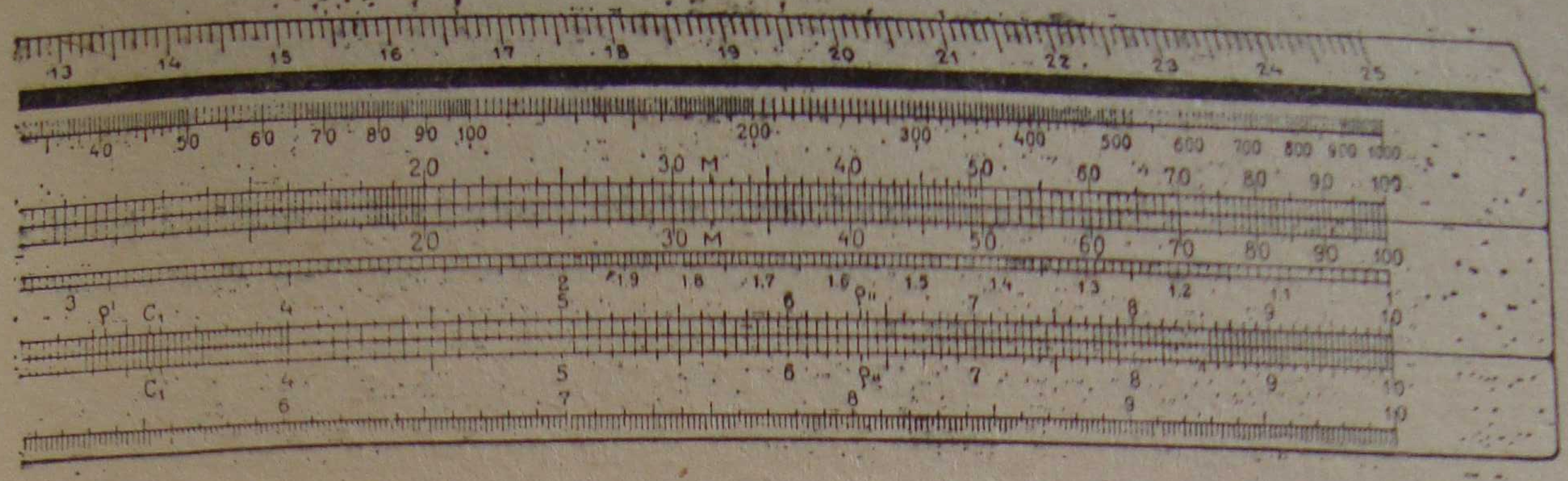
D—հիմնական սանդղակ իրանի վրա,

L—հավասարաչափ (լոգարիթմական) սանդղակ։

Ավելի մանրամասն դիտարկենք շարժակի հիմնական սանդղակը (C սանդղակը)։ Նույնպիսի սանդղակ էլ զետեղված է իրանի վրա (D սանդղակը)։

Ամբողջ հիմնական սանդղակը տրոհված է ինը մասերի (Նկ. 66)։ Դրանց սահմանները նշանակված են խոշոր թվաշաններով. ամենաձախը 1-ն է, այնուհետև 2-ը, 3-ը և այդպես մինչև 10-ը։ Դրանք, այսպես կոչված, մեծ բաժանումներն են։ Դրանց երկարությունները հավասար չեն. հիմնական սանդղակը հավասարաչափ չէ։

Ամեն մի մեծ բաժանումը տրոհված է 10 միջին բաժանման։ Միջին բաժանումների եզրերը նշված են երկար գծիկներով, ընդ որում յուրաքանչյուր հինգերորդ միջին բաժանումը նշված է ավելի երկար գծիկով։ 1-ից 2 մասում (չափսերով ամենամեծ մասում) միջին բաժանումների եզրերը նշանակված են հետևյալ երկնիշ թվերով՝ 1.1, 1.2, 1.3 և այլն։ Այդ թվանշանների չափսերը ավելի փոքր են, քան այն թվանշանները, որոնցով նշանակված են մեծ բաժանումները։ Այդ նշանակումները պետք է հասկանալ այսպես. 1.1—առաջին մեծ և առաջին միջին բաժանումը, 1.2—առաջին մեծ և երկրորդ միջին բաժանումը, 1.3—առաջին մեծ և երրորդ միջին բաժանումը և այլն։



Իր հերթին, յուրաքանչյուր միջին բաժանում տրոհված է փոքր բաժանումների։ Փոքր բաժանումների թիվը սանդղակի առանձին հատվածներում տարբեր է։

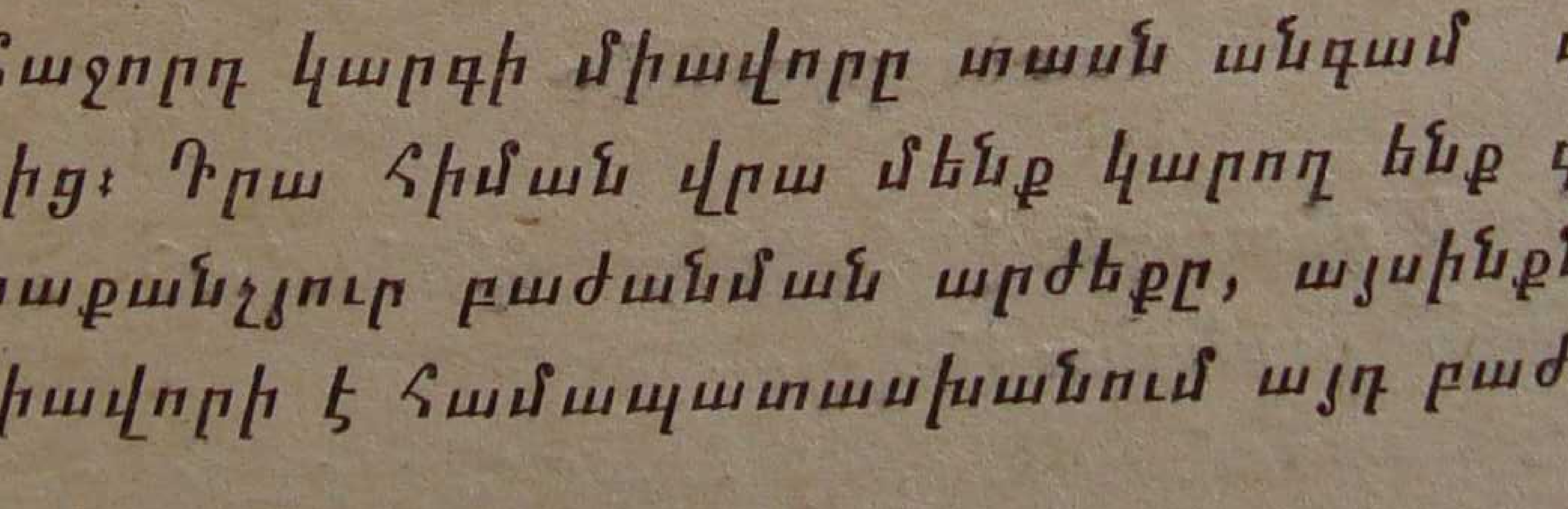
Առաջին մեծ բաժանման մեջ, այսինքն՝ 1-ից 2 ինտերվալում, յուրաքանչյուր միջին բաժանում տրոհված է 10 փոքրի։ 2-ից 4 ինտերվալում յուրաքանչյուր բաժանում տրոհված է 5 փոքրի և, վերջապես, 4-ից 10 ինտերվալում միջին բաժանումները կիսված են։ Այդ ինտերվալների ոչ մեծ չափսերը հնարավորություն չեն տալիս միջին բաժանումները տրոհել ավելի շատ մասերի։

Հիմնական սանդղակն այդպիսի բաժանումների տրոհել հնարավորություն է տալիս թվերը ճշտել և հետևաբար կարդալ երեք իմաստալից թվանշանի (կամ ավելի կարճ՝ երեք նիշի) ճշգրտությամբ։

Վերցնենք որևէ թիվ, օրինակ՝ 438։ Ձախ եզրային 4 թվանշանը կանվանենք առաջին կարգի թվանշան, 3-ը՝ երկրորդ կարգի թվանշան, իսկ 8-ը՝ երրորդ կարգի թվանշան։ Այդ դեպքում առաջին կարգի թվանշաններին կհամապատասխանեն քանոնի հիմնական սանդղակի մեծ բաժանումները, երկրորդ կարգի թվանշաններին՝ միջին բաժանումները, երրորդ կարգի թվանշաններին՝ փոքր բաժանումները։

Ամեն մի հաջորդ կարգի միավորը տասն անգամ փոքր է նախորդ կարգի միավորից։ Դրա հիման վրա մենք կարող ենք գտնել հիմնական սանդղակի յուրաքանչյուր բաժանման արժեքը, այսինքն՝ որոշել, թե իր կարգի քանի միավորի է համապատասխանում այդ բաժանումներից յուրաքանչյուրը։

Յուրաքանչյուր մեծ և միջին բաժանում տարբեր են հիմնական սանդղակի առանձին մասերում։ Մանրամասն քննարկենք փոքր բաժանումները։



Նկ. 67

1—2 ինտերվալում յուրաքանչյուր միջին բաժանում տրոհված է 10 փոքրի, հետևաբար յուրաքանչյուր փոքր բաժանում հավասար է երրորդ կարգի միավորի։

2—4 ինտերվալում յուրաքանչյուր միջին բաժանում կազմված է հինգ փոքրից, այսինքն՝ յուրաքանչյուր փոքր բաժանման արժեքը հավասար է երրորդ կարգի երկու միավորի։

4—10 ինտերվալում միջին բաժանումները կիսված են։ Այսպիսով, սանդղակի այդ մասում յուրաքանչյուր փոքր բաժանում համապատասխանում է երրորդ կարգի հինգ միավորի։

Այժմ ծանոթանանք այն բանին, թե ինչպես պետք է հաշվեքանոնի հիմնական սանդղակի վրա նշել կամ կարդալ որևէ թիվ։

Թիվը քանոնի վրա նշելու համար մենք ուշադրություն չենք դարձնի, թե տասնորդական կոտորակի ստորակետին և թե այն զրոներին, որոնք գրված են թվի սկզբում կամ վերջում։ Այսպիսով, մենք քանոնի վրա նշում և կարդում ենք ոչ թե բուն թվերը, այլ դրանց թվանշանային կազմը, այսինքն՝ այն թվանշանները, որոնք կազմում են երեք ավագ իմաստալից կարգերը։

Օրինակ, 0,036 թվի թվանշանային կազմը կլինեն 3 և 6 թվանշանները (կարդացվում է՝ երեք-վեց)։ Նույնպիսի կազմ ունեն նաև 360; 3,6; 36 թվերը և այլն։

Միևնույն թվանշանային կազմն ունեցող թվերը, օրինակ, 27,4; 2,74; 2740; 0,00274 թվերը, դիտագծով նշվում են սանդղակի միևնույն տեղում՝ 2 մեծ, 7 միջին և 2 փոքր բաժանում։ Սանդղակի այդ մասում մեկ փոքր բաժանման արժեքը հավասար է երկու միավորի։ 67-րդ նկարում ցույց է տրված այդ թվանշանային կազմի նշումը։

Վարժություններ

283. ա) Գտեք և դիտագծով նշեցեք հիմնական սանդղակի 1—2 հատվածի մեծ և միջին բաժանումները։

բ) Քանի՞ փոքր բաժանումների է տրոհված 2—4 հատվածի յուրաքանչյուր միջին բաժանումը։

284. ա) Իր կարգի քանի՞ միավորի է համապատասխանում հիմնական սանդղակի 1—2 հատվածի փոքր բաժանումը։

բ) Ինչո՞ւ է 4—10 հատվածում հիմնական սանդղակի յուրաքանչյուր փոքր բաժանում համապատասխանում իր կարգի հինգ միավորի։

285. Կարդացեք և գրեցեք թվերի թվանշանային կազմը.

ա) 821; 5030; 0,0845; 3,26, բ) 0,625; 37,2; 755; 0,162,

286. ա) Քանի՞ մեծ, միջին և փոքր բաժանում պետք է վերցնել,

որպեսզի հիմնական սանդղակի վրա նշել հետևյալ թվերից յուրաքանչյուրի թվանշանային կազմը. 1360; 0,625; 23,9; 4,72; 36,5; 1972։

բ) Դիտագծով նշեցեք հետևյալ թվերը. 6,05; 2180; 10600; 403; 0,356։

287. Քանոնի իրանի հիմնական սանդղակի վրա.

ա) շարժակի C սանդղակի սկզբով (այսինքն՝ 1 թվանշանով) նշեցեք հետևյալ թվերը. 32,6; 0,629; 138; 2,03; 999,

բ) շարժակի C սանդղակի ծայրով (այսինքն՝ 10 թվանշանով) նշեցեք հետևյալ թվերը. 4,71; 0,257; 60,1; 10,1; 89,7; 965։

§ 50. ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀԱՅՏ ԱՆԴԱՄԸ ԳՏՆԵԼԸ

Այժմ անցնենք այն հարցի ուսումնասիրությանը, թե հաշվեքանոնն ինչպես է կիրառվում այս կամ այն հաշվումները կատարելիս։ Սկսենք համեմատության անհայտ անդամը հաշվեքանոնի միջոցով գտնելուց։

Մենք կհամեմատենք այն թվերը, որոնք գտնվում են միմյանց դիմաց՝ իրանի և շարժակի հիմնական սանդղակների վրա (C և D սանդղակների վրա)։ Օրինակ, C սանդղակի 8 թիվը դնենք D սանդղակի 10 թվի դիմաց։ Այդ դեպքում միմյանց դիմաց կլինեն հետևյալ թվազույգերը. 24 և 30, 32 և 40, 4 և 5, 64 և 80, 16 և 20, 12 և 15 և այլն։

Գտնենք C սանդղակի ցանկացած թվի հարաբերությունը իր դիմաց՝ D սանդղակի վրա գտնվող թվին։ Դրա համար հարկ կլինի 24-ը բաժանել 30-ի, 32-ը՝ 40-ի, 4-ը՝ 5-ի և այլն։ Իրանի նկատմամբ շարժակի այդպիսի դիրքի դեպքում բաժանման արդյունքում միշտ կստացվի միևնույն քանորդը՝ 0,8։ Եվ ընդհանրապես, C սանդղակի ցանկացած երկու թվերի հարաբերությունները իրենց դիմաց՝ D սանդղակի վրա գտնվող թվերին հավասար են միմյանց, այսինքն, շարժակի ավյալ դիրքի դեպքում ստանում ենք ճիշտ համեմատություն։

C սանդղակի վրա գտնվող թվերը կնշանակենք a տառով, իսկ D սանդղակի վրա գտնվող թվերը՝ b տառով։ Նույն սանդղակի վրա գտնվող թվերը միմյանցից տարբերելու համար մենք դրանք կնշանակենք միևնույն տառով, բայց տարբեր ինդեքսներ ունեցող, օրինակ, a_1, a_2 կամ b_1, b_2։

Դիցուք a_1 և a_2 թվերի դիմաց գտնվում են համապատասխանաբար b_1 և b_2 թվերը։ Այդ թվերը կազմում են համեմատություն։ Համեմատության կազմելը հեշտացնելու համար հանձնարարվում է օգտվել հետևյալ կանոնից։

Երբ մենք նայում ենք քանոնին, ապա շարժակի C սանդղակը գտնվում է իրանի D սանդղակից վերև։ Ուստի C սանդղակի վրա գտնվող թվերը կվերցնենք որպես հարաբերությունների նախորդ անդամներ (կոտորակների համարիչներ), իսկ D սանդղակի վրա գտնվող թվերը՝ որպես հարաբերությունների հաջորդ անդամներ (կոտորակների հայտարարներ)։

Այս կանոնը հեշտացնում է նաև համեմատությունը ուղղակի քանոնի վրայից կարդալը. շարժակի թվերը կոտորակների համարիչներն են, իսկ իրանի թվերը՝ կոտորակների հայտարարները, շարժակի կողը կոտորակի գծի դեր է կատարում։ Համեմատությունների այս կանոնը կարելի է գրել այս տեսքով.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\text{։}$$

Այժմ անցնենք հետևյալ խնդրի լուծմանը. ըստ համեմատության երեք հայտնի անդամների գտնել անհայտ չորրորդ անդամը։

Խնդիրը հանգում է համեմատությունը հաշվեքանոնի հիմնական սանդղակների վրա պատկերելուն, այսինքն՝ հիմնական սանդղակների վրա համապատասխան հայտնի թվերը նշելուն։

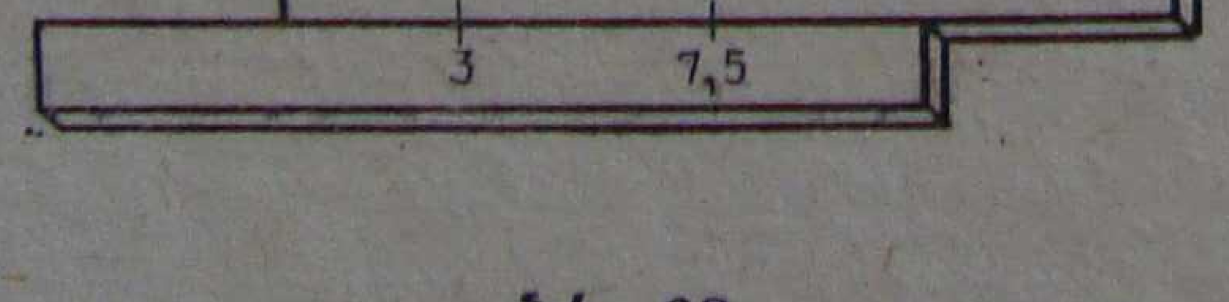
Դիցուք, օրինակ, տրված է $\frac{2}{3}=\frac{5}{x}$ համեմատությունը։

Քանի որ 2 և 5 թվերը կոտորակների համարիչներն են, ուստի դրանք կնշենք շարժակի C սանդղակի վրա։ 3-ը և x անհայտ թիվը կոտորակների հայտարարներն են. դրանք կլինեն իրանի D սանդղակի վրա։

Շարժակը հարմարեցնենք այնպես, որ նրա C սանդղակի 2 թիվը գտնվի իրանի D սանդղակի 3 թվի դիմաց։ Շարժակի C սանդղակի 5 թվի դիմաց իրանի D սանդղակի վրա գտնում ենք պատասխանի թվանշանային կազմը՝ 7—5։ Իսկ ո՞րն է պատասխանը։ Այն մենք գտնում ենք մտքում մոտավոր հաշիվ անելով։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. 7,5 (Նկ. 68)։

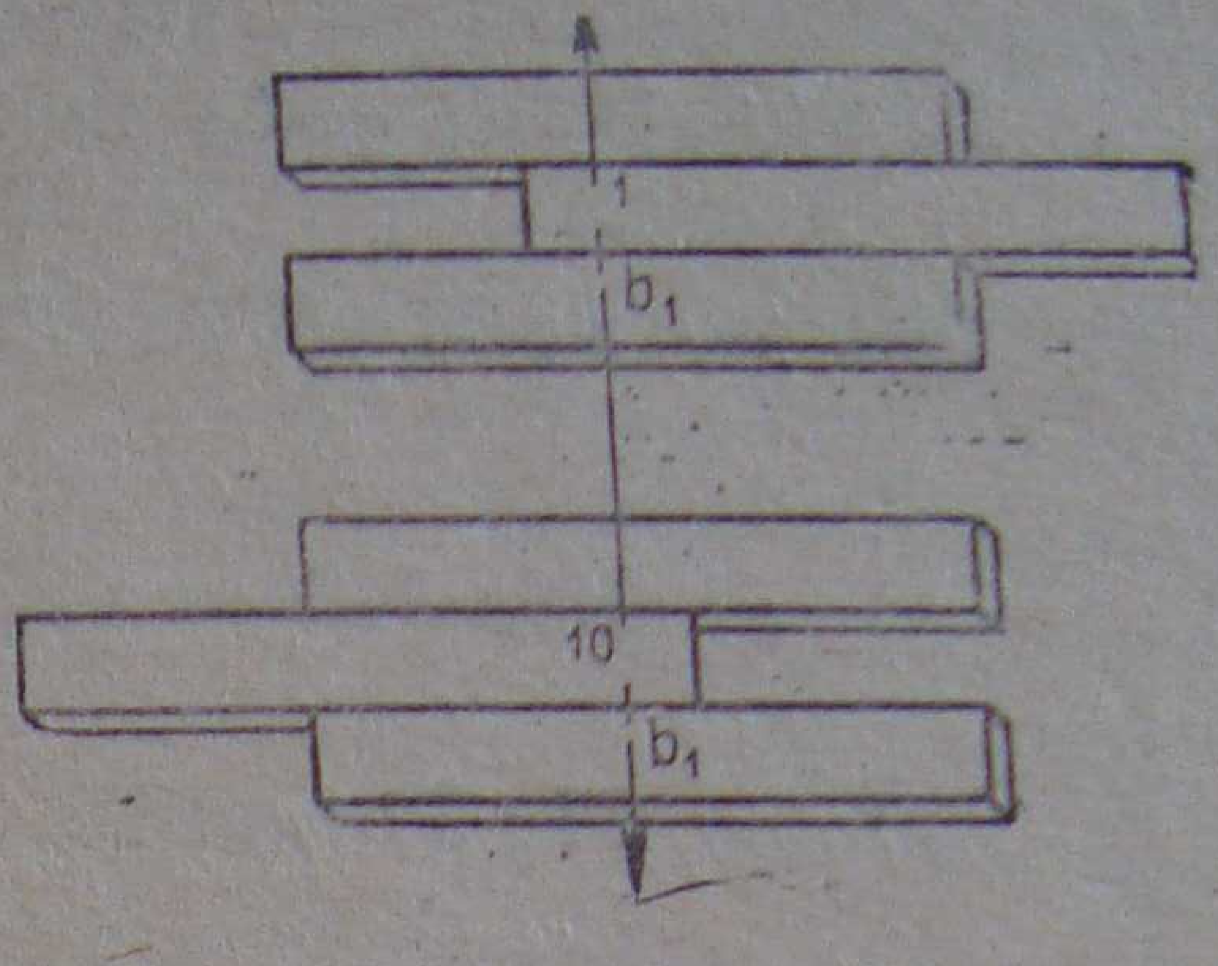
Այսպիսով, համեմատության անհայտ անդամը գտնելու համար ընտրում ենք այնպիսի հարաբերություն, որի երկու անդամներն էլ հայտնի թվեր են։ Այդ հարաբերությունը նշում ենք քանոնի վրա։ Դրա համար իրանի D հիմնական սանդղակի վրա դիտագծով նշում ենք ընտրված հարաբերության հաջորդ անդամը (կոտորակի հայտարարը)։ Շարժակը դնում ենք այնպես, որ նրա C սանդղակի վրա վերցրած այդ հարաբերության հաջորդ անդամը (կոտորակի համարիչը) լինի դիտագծի տակ։ Այնուհետև անցնում ենք երկրորդ հարաբերությանը։ Շարժակը տեղից չշարժելով, համապատասխան սանդղակի վրա դիտագծով նշում ենք երկրորդ հարաբերության հայտնի անդամը և նրա դիմաց հարևան սանդղակի վրա դիտագծի տակ կարդում պատասխանը։ Պատասխանի ամբողջ մասի նիշերի թիվը, այսինքն՝ տասնորդական կոտորակում ստորա-



Նկ. 68

կետի տեղը որոշում ենք մաքում մոտավոր հաշիվ անելով և այդ դեպքում, մասնավորապես, օգտագործվում է համեմատության հիմնական հատկությունը։

Երբեմն մենք չենք կարող խնդիրը լուծել նշված եղանակով, քանի որ շարժակի որոշ դիրքերի դեպքում երկրորդ հարաբերության հայտնի անդամի դիմաց չի լինում հարևան սանդղակը և ոչ մի տեղ հնարավոր չէ փնտրել համեմատության անհայտ անդամը։



Նկ. 69

Այդպիսի դեպքերում կատարում են շարժակի դիրքափոխում և համեմատությունը լուծում հետևյալ կերպ։

Ընտրում են համեմատության այն հարաբերությունը, որի երկու անդամներն էլ հայտնի են, և այն նշում քանոնի սանդղակների վրա։ Համոզվելով, որ երկրորդ հարաբերության մեջ հայտնի անդամի դիմաց չկա հարևան սանդղակը, դիրքափոխում են շարժակը։

Դրա համար իրանի D սանդղակի վրա նշում են շարժակի C սանդղակի սկզբի կամ վերջի (որը որ հնարավոր է) դիրքը։ Վազկանը թողնելով անշարժ, շարժակը տեղափոխում ենք այնպես, որ դիտագծի տակ հայտնվի շարժակի C սանդղակի մյուս ծայրը (նկ. 69)։ Այժմ մնում է դիտագծով նշել երկրորդ հարաբերության հայտնի անդամը և նրա դիմաց կարդալ պատասխանը։

Դա դիտարկենք օրինակով։ Տրված է $\frac{x}{14}=\frac{2}{3,5}$ համեմատությունը։

Այստեղ հայտնին 2:2,5 հարաբերությունն է։ Իրանի վրա դիտագծով նշենք 3,5 թիվը և նրա հետ համատեղենք շարժակի սանդղակի 2 թիվը։ Անցնենք անհայտ պարունակող հարաբերությանը։ Քանի որ իրանի 14 թվի դիմաց չկա շարժակի սանդղակը, մենք ստիպված ենք դիրքափոխել շարժակը։ Դիտագծով սևեռենք շարժակի սանդղակի սկիզբը։ Այնուհետև, չշարժելով վազկանը, դիտագծին մոտեցնենք սանդղակի ծայրը։ Այժմ կարելի է անցնել համեմատության անհայտ անդամը որոշելուն։ Իրանի D սանդղակի վրա դիտագծով նշենք 14 թիվը և նրա դիմաց շարժակի C սանդղակի վրա կարդանք պատասխանի թվանշանային կազմը՝ 8—0—0։

Պատասխան. 8։

Հաշվեքանոնով գտեք համեմատությունների անհայտ անդամները.

288. *ա)* $a:36=275:22$, *գ)* $\frac{3{,}02}{44{,}5}=\frac{2{,}13}{x}$,

բ) $645:540=x:288$, *դ)* $\frac{271}{376}=\frac{371}{b}$։

289. *ա)* $25:56=x:18$, *գ)* $52{,}5:21{,}5=a:61{,}5$,

բ) $a:125=50:6{,}75$, *դ)* $y:143=13{,}5:742$։

290. *ա)* $2{,}8:15=11{,}1:x$, *գ)* $112:x=30{,}6:2{,}5$,

բ) $b:1{,}28=103:33{,}3$, *դ)* $75:x=2350:188$։

291. *ա)* $b:34{,}2=2{,}54:1{,}39$, *գ)* $1{,}22:x=7{,}15:2{,}93$,

բ) $0{,}24:1{,}11=a:268$, *դ)* $y:82{,}5=4{,}2:23{,}1$։

§ 51. ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

Դիցուք պահանջվում է հաշվել a *և* b *երկու թվերի արտադրյալը, վերցնենք* $x=ab$։ *Այս հավասարությունը գրենք* $1\cdot x=a\cdot b$ *տեսքով, իսկ այնուհետև* $\frac{1}{b}=\frac{a}{x}$ *համեմատության տեսքով։ Մնում է գտնել համեմատության անհայտ անդամը։*

Օ ր ի ն ա կ։ Գտնել 15,1 և 3,76 թվերի արտադրյալը։

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ Ունենք՝ $x=15{,}1\cdot 3{,}76$ *կամ* $\frac{1}{15{,}1}=\frac{3{,}76}{x}$, *գտնենք x-ը։*

Դրա համար իրանի հիմնական սանդղակի վրա նշենք 15,1 թիվը և նրա հետ համատեղենք շարժակի սանդղակի սկիզբը։ Այնուհետև շարժակի սանդղակի վրա գիտագծով նշենք 3,76 թիվը և գիտագծի դիմաց իրանի հիմնական սանդղակի վրա կարդանք արդյունքը՝ 5—6—7 (նկ. 70)։ Հիշեցնենք, որ քանոնը մեզ տալիս է ոչ թե բուն պատասխանը, այլ նրա թվանշանային կազմը։ Այն կարող է նշանակել 567; 56700, 0,567; 5,67; 0,00567։ Պատասխանը ստանալու համար անհրաժեշտ է պարզել, թե որտեղ պետք է դնել ստորակետը։ Դրա համար մոտավոր հաշվում կատարենք՝ $15{,}1\cdot 3{,}76\approx 15\cdot 4=60$։ *Հետևաբար, պատասխանի ամբողջ մասում պետք է լինի երկու նիշ, այսինքն՝* $15{,}1\cdot 3{,}76=56{,}7$։

Մի շարք դեպքերում մենք բազմապատկումը կկատարենք որպես

$\frac{10}{10b} = \frac{a}{x}$ Համեմատության լուծման արդյունք, այսինքն b արտադրիչի

հետ կհամատեղենք C սանդղակի ոչ թե 1-ը, այլ 10-ը։

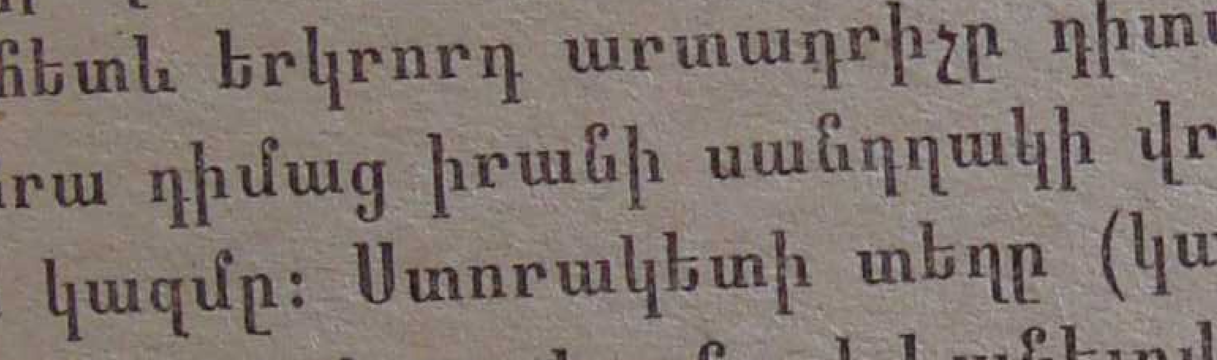
Օրինակ, դիցուք պետք է գտնել 5,42 և 4,3 թվերի արտադրյալը։
Իրանի D սանդղակի վրա գիտագծով նշենք առաջին արտադրիչը՝ 5,42-ը։
Եթե այժմ նրա հետ համատեղենք շարժակի սանդղակի 1-ը, ապա շար-
ժակի սանդղակի վրայի երկրորդ արտադրիչը դուրս կգա իրանի սահման-
ներից։ Ուստի մենք առաջին արտադրիչի հետ կհամատեղենք շարժակի
C սանդղակի 10 թիվը։ Տեղափոխելով վազկանը, այժմ 4,3 արտադրիչը
գիտագծով նշենք շարժակի C սանդղակի վրա։ Գիտագծի դիմաց իրանի
սանդղակի վրա կարդանք պատասխանի թվանշանային կազմը՝ 2—3—3
(Նկ. 71)։ Պատասխանում ստորակետի դիրքը որոշելու համար անենք մո-
տավոր հաշիվ։ Առաջին արտադրիչը կլորացնենք դարձնենք 5, իսկ երկ-
րորդ արտադրիչը՝ 4։ Կստանանք՝ 5.4=20։ Պատասխանի ամբողջ մասն
ունի երկու նիշ, հետևաբար, բազմապատկման արդյունքն այսպիսին է.

$$5,42.4,3=23,3։$$

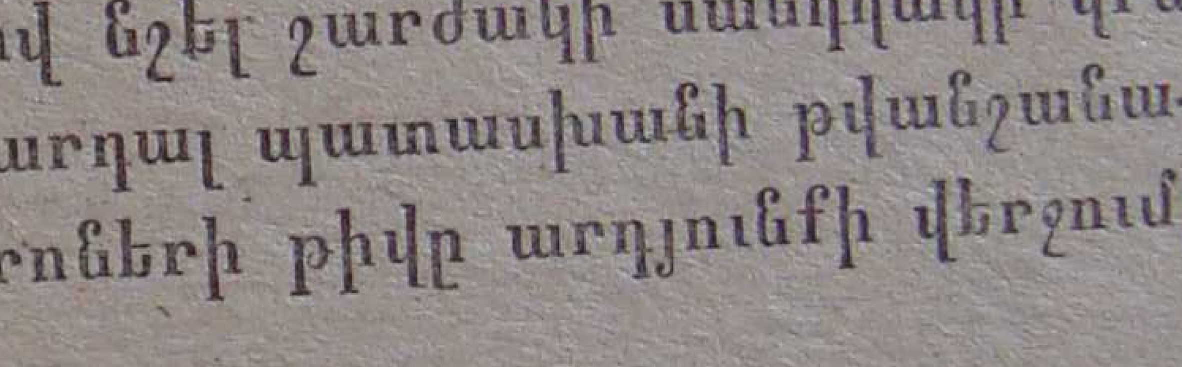
Այժմ ձևակերպենք բազմապատկման կանոնը.
Երկու թվեր հաշվեքանոնով բազմապատկելու համար պետք է ար-
տադրիչներից մեկի դիմաց, որը որ մեծ նշել են իրանի հիմնական սանդ-
ղակի վրա, տեղադրել շարժակի սանդղակի միավորը կամ տասը, այ-
նուհետև երկրորդ արտադրիչը գիտագծով նշել շարժակի սանդղակի վրա
և նրա դիմաց իրանի սանդղակի վրա կարդալ պատասխանի թվանշանա-
յին կազմը։ Ստորակետի տեղը (կամ զրոների թիվը արդյունքի վերջում)
որոշվում է մոտավոր հաշիվ անելով։

Հաշվեքանոնով աշխատելու հիմնական առավելությունը հաշվում-
ների կատարման արագությունն է։ Վերցնենք երկու թիվ՝ 286 և 193։ Կա-
տարելով սյունակային բազմապատկում, գտնենք դրանց արտադրյալը՝
55 198։

Եթե արտադրիչները ինչ-որ մեծությունների չափումից ստացված
մոտավոր արժեքներ են, ապա մենք արտադրյալը կկլորացնենք երեք
ավագ իմաստալից կարգերի ճշգրտությամբ՝ $55198 \approx 55200$։ Նույն այդ
թվերը բազմապատկելով հաշվեքանոնով, մենք կստանանք 5—5—2
թվանշանային կազմը և, հետևաբար, նաև նույն կլորացված պատասխա-
նը՝ 55200։



Նկ. 70



Նկ. 71.

Ինչպես տեսանք, քանոնով կատարվող հաշվումների ճշգրտությունը միանգամայն բարձր է։

Երբեմն հարկ է լինում գտնել երեք և ավելի արտադրիչների արտադրյալը։ Այդ դեպքում նախ բազմապատկում են առաջին երկու արտադրիչները։ Դիտագծի տակ ստացված արդյունքը (չկարդալով այն) բազմապատկում են երրորդ արտադրիչով, այսինքն դիտագծի հետ համատեղում են շարժակի C սանդղակի սկիզբը կամ ծայրը։ Նոր արդյունքը բազմապատկում են հաջորդ արտադրիչով և այդպես շարունակ։

Դիտարկենք մի օրինակ. $x=24,5\cdot 3,46\cdot 42,5$։

Իրանի սանդղակի վրա դիտագծով նշենք 24,5 թիվը, դիտագծի հետ համատեղենք շարժակի սանդղակի սկիզբը, շարժակի սանդղակի վրա դիտագծով նշենք երկրորդ արտադրիչը՝ 3,46-ը և, չկարդալով այդ երկու թվերի բազմապատկման արդյունքը, դիտագծի հետ համատեղենք շարժակի սանդղակի ծայրը, շարժակի C սանդղակի վրա դիտագծով նշենք երրորդ արտադրիչը՝ 42,5-ը և դիտագծի դիմաց իրանի սանդղակի վրա կարդանք ստացված արդյունքի թվանշանային կազմը՝ 3—6—0։ Անենք մոտավոր հաշիվ՝ $x\approx 25\cdot 3\cdot 40=3000$, հետևաբար, պատասխանի ամբողջ մասում պետք է լինի չորս թվանշան։ Ուստի $24,5\cdot 3,46\cdot 42,5=3600$։ Այստեղ հարկ եղավ պատասխանում ավելացնել չորրորդ նիշը՝ զրոն։

Վարժություններ

Թվերը բազմապատկեցեք հաշվեքանոնով և ստուգեցեք արդյունքները.

292. ա) $13,4\cdot 3,92=52,5$, գ) $3,92\cdot 7,22=28,3$,

բ) $14,86\cdot 19,05=283$, դ) $0.56\cdot 1,34=0,750$։

293. ա) $62,7\cdot 0,00345=0,530$, գ) $0,0267\cdot 32,7=0,873$,

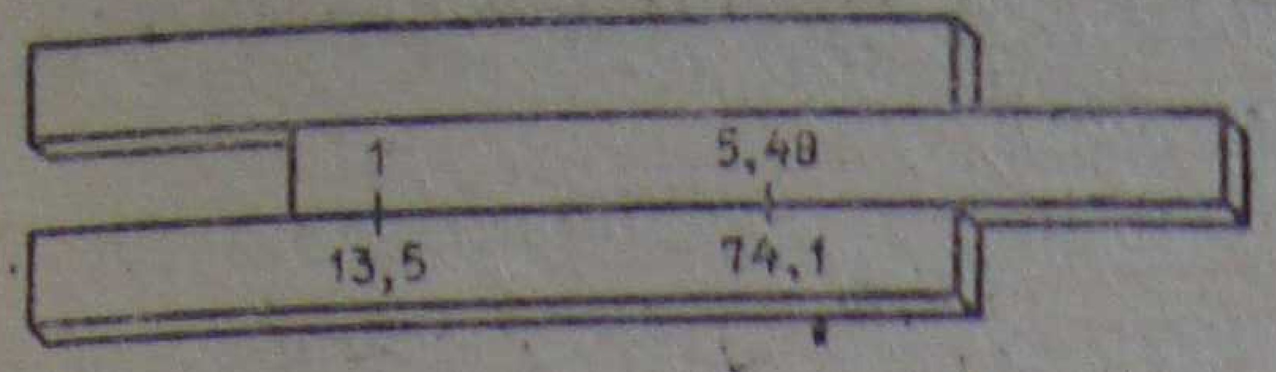
բ) $16 3\cdot 23,5\cdot 5,05=1934$, դ) $7,53\cdot 27,4\cdot 33,7=6950$։

§ 52. ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

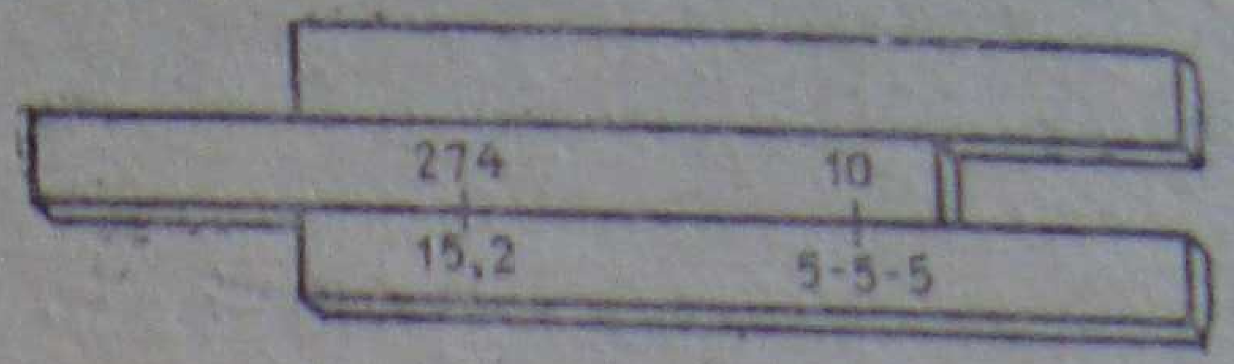
Դիցուք պահանջվում է հաշվել b թիվը a թվի բաժանման քանորդը, վերցնենք $x=\frac{b}{a}$։ Այս հավասարությունը գրենք $\frac{1}{x}=\frac{a}{b}$ համեմատության տեսքով և գտնենք որոնելի քանորդը։ Ինչպես և բազմապատկման դեպքում, երբ շարժակի դիրքափոխման անհրաժեշտություն է առաջանում, քանորդը ստացվում է $\frac{10}{10x}=\frac{a}{b}$ համեմատության միջոցով։

Ձևակերպենք թվերի բաժանման կանոնը.

Երկու թվեր հաշվեքանոնով բաժանելու համար պետք է բաժանելին



Նկ. 72



Նկ. 73

դիտագծով նշել իրանի հիմնական սանդղակի վրա, նրա դիմաց տեղադրել բաժանարարը՝ վերցված շարժակի սանդղակի վրա, շարժակի սանդղակի 1-ի դիմաց կամ նույն սանդղակի 10-ի դիմաց (երբ 1-ը դուրս է գալիս իրանի սահմաններից), իրանի սանդղակի դիմաց կարդալ քանորդի թվանշանային կազմը: Ստորակետի տեղը որոշվում է մոտավոր հաշիվ անելով:

Օրինակ: *Դիցուք պահանջվում է 74,1-ը բաժանել 5,48-ի։*

Իրանի սանդղակի վրա դիտագծով նշենք 74,1 թիվը։ Այժմ դիտագծի հետ համատեղենք շարժակի սանդղակի 5,48 թիվը։ Այդ դեպքում շարժակը կտեղափոխվի աջ և նրա սանդղակի 10 թիվը դուրս կգա իրանի սահմաններից։ Իրանի սանդղակի վրա շարժակի սանդղակի 1-ի դիմաց կարդանք պատասխանի թվանշանային կազմը՝ 1—3—5 (նկ. 72)։ Անենք մոտավոր հաշիվ՝ 70-ը բաժանած 5-ի կստացվի 14, այսինքն՝ պատասխանի ամբողջ մասն ունի երկու նիշ։ Հետևաբար, 74,1:5,48=13,5։

Լուծենք մի օրինակ ևս (նկ. 73)։

15,2 թիվը 274-ի բաժանելիս քանոնի շարժակը ձախ է գնում, և մենք քանորդի թվանշանային կազմը պետք է կարդանք շարժակի սանդղակի 10 թվի դիմաց՝ 5—5—5։ Մոտավոր հաշվումը տալիս է հետևյալ արդյունքը.

$$15,2 : 274 = 0,0555.$$

Վերջում քննարկենք այնպիսի հաշվումների օրինակներ, որտեղ պետք է կատարել և՛ բազմապատկման, և՛ բաժանման գործողությունները։ Դիցուք պետք է գտնել $x=\frac{6,5 \cdot 2,6 \cdot 15,2}{3,4 \cdot 30,6}$ *արտահայտության արժեքը։*

Արդյունքը կարելի է ստանալ երկու եղանակով.

1) Բազմապատկել համարիչի բոլոր թվերը, այնուհետև հայտարարի բոլոր թվերը և առաջին արդյունքը բաժանել երկրորդի վրա։

2) 6,5 թիվ բաժանել 3,4-ի, ստացված արդյունքը (չկարդալով այն) բազմապատկել 2,6-ով, նոր արդյունքը (դարձյալ չկարդալով) բաժանել 30,6-ի, իսկ այնուհետև բազմապատկել 15,2-ով։

Անկախ հաշվման եղանակից, մենք արդյունքում ստանում ենք x=2,47, բայց երկրորդ եղանակով հաշվելիս մենք ավելի քիչ ենք դիրքափոխում շարժակը և բացի այդ, հարկ չի լինում հիշել միջանկյալ արդյունքները։

Այսպիսով, զուգակցված հաշվումներ անելիս ավելի հարմար է գործողությունները կատարել հետևյալ սխեմայով.

$$x=(((a:d)\cdot b):e)\cdot c, \text{ եթե } x=\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e},$$

այսինքն՝ գործողությունները հերթափոխել՝ բաժանում, բազմապատկում, բաժանում և այլն։ Այսպիսի աշխատակարգը զգալիորեն արագացնում է հաշվումները, որովհետև հնարավորություն է ընձեռում կրճատել շարժակի դիրքափոխումների թիվը։

Օրինակ: $x=\frac{33{,}2\cdot 2{,}4}{56{,}5}$։

Իրանի սանդղակի վրա նշենք 33,2 թիվը։ Նրա հետ համատեղենք շարժակի սանդղակի 56,5 թիվը։ Շարժակը տեղից չշարժելով, նրա սանդղակի վրա դիտագծով նշենք 2,4 թիվը և իրանի սանդղակի վրա դիտագծի դիմաց կարդանք պատասխանի թվանշանային կազմը՝ 1—4—1։ Հաշվենք մոտավորապես՝ $\frac{30\cdot 2}{60}=1$, այսինքն՝ պատասխանի ամբողջ մասն ունի մեկ նիշ։ Հետևաբար, $x=1{,}41$։

Վարժություններ

Բաժանումը կատարեցեք հաշվեքանոնով և արդյունքները ստուգեցեք.

294. ա) $40{,}5:96=0{,}422$, գ) $71{,}4:131{,}7=0{,}542$,

բ) $15{,}9:0{,}241=66{,}0$, դ) $0{,}576:0{,}01486=38{,}8$։

295. ա) $19{,}3:0{,}58=33{,}3$, գ) $0{,}85:0{,}189=4{,}50$,

բ) $15250:69=221$, դ) $78{,}4:28{,}5=2{,}75$։

Հաշվեքանոնով գտեք հետևյալ արտահայտությունների արժեքները և արդյունքները ստուգեցեք.

296. ա) $\frac{5{,}83\cdot 0{,}472}{65{,}3}=0{,}0421$, գ) $\frac{15{,}8\cdot 0{,}309}{9{,}76}=0{,}500$,

բ) $\frac{0{,}867\cdot 12{,}7\cdot 43{,}8}{5{,}64\cdot 7{,}22\cdot 0{,}348}=34{,}1$, դ) $\frac{6{,}83\cdot 22{,}3\cdot 0{,}745}{43{,}7\cdot 2{,}08}=1{,}25$։

297. ա) $\frac{118{,}3\cdot 51{,}7}{3820\cdot 0{,}00236}=105$, գ) $\frac{0{,}1966\cdot 6{,}51}{2{,}1\cdot 14{,}4}=0{,}034$,

բ) $\frac{28{,}4\cdot 241}{1{,}69\cdot 4{,}53}=894$, դ) $\frac{31{,}5\cdot 0{,}99\cdot 31{,}7}{11{,}2\cdot 4{,}18\cdot 0{,}548}=38{,}5$։

Ինքնուրույն աշխատանք № 8

1. 1,273 և 6,5253 թվերը կլորացրեք 0,01 ճշգրտությամբ։ Հաշվեցեք յուրաքանչյուր մոտավորության բացարձակ և հարաբերական սխալները։

2. Գտեք թվերի մոտավոր արժեքների գումարը.

ա) $691{,}253+32{,}4256+1{,}13+26{,}124$,

բ) $0{,}36791+2{,}4+14{,}3229+0{,}67$։

3. Գտեք թվերի մոտավոր արժեքների արտադրյալը.

ա) $12{,}5\cdot 2{,}4237$, բ) $0{,}2523\cdot 0{,}45$։

4. Երկու անոթների ծավալները չափելիս ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

$$412<V_1<414,$$

$$150<V_2<151։$$

Այս երկու չափումներից ո՞րն է ավելի ճշգրիտ։

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ի՞նչ բան է տրված թվի մոտավոր արժեքը (մոտավորությունը)։ Ի՞նչն է կոչվում մոտավորության սխալ և մոտավորության բացարձակ սխալ։ Բերեք որևէ թվի և նրա որևէ մոտավորության օրինակ և հաշվեցեք այդ մոտավորության սխալն ու բացարձակ սխալը։

2. Ի՞նչն է կոչվում տրված թվի մոտավոր արժեքի հարաբերական սխալ։ Բերեք որևէ թվի և նրա որևէ մոտավորության օրինակ և հաշվեցեք այդ մոտավորության հարաբերական սխալը։

3. Հատվածի երկարությունը գտնվում է 3,2 սմ-ի և 3,5 սմ-ի միջև։ 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; 3,6 սմ մոտավոր արժեքներից որի՞ բացարձակ սխալն է ամենափոքր և ինչո՞ւ։

4. Ո՞ր դեպքում է a թիվը կոչվում x թվի մոտավորություն h ճշգրտությամբ։ Ի՞նչ բան է բացարձակ սխալի եզրը։

5. Ո՞ր դեպքում է a թիվը կոչվում x թվի մոտավորություն ε հարաբերական ճշգրտությամբ։ Ի՞նչ բան է հարաբերական սխալի եզրը։

6. Բացարձակ սխալի եզրը հավասար է 0,32-ի։ Կարելի՞ է արդյոք որպես եզրի այլ արժեքներ վերցնել 0,3-ը կամ 0,4-ը։ Ինչո՞ւ։

7. Հարաբերական սխալի եզրը հավասար է 1,6 %։ Կարելի՞ է արդյոք որպես եզրի այլ արժեքներ վերցնել 1,5 %-ը կամ 2 %-ը։ Ինչո՞ւ։

8. Ի՞նչ է նշանակում թիվը կլորացնել։ Ձևակերպեցեք թվերի կլորացման կանոնները (պակասորդով, հավելորդով, հիմնական կանոնը)։

9. Պահանջվում է 0,648 թիվը կլորացնել տասնորդական մասերի ճշգրտությամբ։ Աշակերտներից մեկը միանգամից կլորացրեց և ստացավ 0,6, իսկ մյուսը սխալ մտածելով կլորացրեց հարյուրերորդականի ճշգրտությամբ և ստացավ 0,65, բայց, սթափվելով, այդ պատասխանը կլորացրեց տասնորդականի ճշգրտությամբ և ստացավ 0,7։ Նրանցից ո՞րն է ճիշտը։ Նույն բանը ստուգեցեք 0,546; 0,345; 0,447; 0,249 թվերի համար։

10. Ի՞նչ բան է թվի տասնորդական նիշերը։ Ի՞նչ բան է թվի իմաստալից թվանշանները։ Բերեք օրինակներ։

11. Ինչպե՞ս են կատարվում թվերի մոտավոր արժեքների գումարումն ու հանումը։ Ձևակերպեցեք գումարի և տարբերության կլորացման կանոնը։

12. Ինչպե՞ս են կատարվում թվերի մոտավոր արժեքների բազմապատկումն ու բաժանումը։ Ձևակերպեցեք արտադրյալի և քանորդի կլորացման կանոնը։

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ: ԳԾԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

§ 53. ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Մինչև այժմ մենք մեկ փոփոխականով հավասարումները լուծում էինք, օգտագործելով թվերի հետ կատարվող թվաբանական չորս գործողությունների բաղադրիչների և արդյունքների միջև կախվածությունների վերաբերյալ գիտելիքները։ Յուրաքանչյուր այդպիսի հավասարման մեջ հայտնի էր գործողության արդյունքը (գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը, քանորդը) և բաղադրիչներից որևէ մեկը (գումարելին, նվազելին, հանելին, արտադրիչը, բաժանելին, բաժանարարը)։ Հետագայում հավասարումներ լուծելիս մենք օգտվեցինք նաև պարզագույն ձևափոխումներից՝ փակագծերի բացում և նման անդամների միացում (տե՛ս § 32—34)։ Սակայն բոլոր այդ հավասարումներում փոփոխականը, որի արժեքը փնտրվում էր, գտնվում էր միայն հավասարման մի մասում (սովորաբար ձախ մասում)։ Այժմ դիտարկենք այնպիսի հավասարումներ, որոնց երկու մասերն էլ կարող են փոփոխական պարունակել։ Դրանց լուծման համար կիրառվում են նոր հնարներ։

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$4x+10=5-6x \qquad (1)$$

Եթե (1) հավասարման երկու մասերին էլ ավելացնենք $6x$, ապա նման անդամների միացումից հետո աջ մասում չեն լինի փոփոխական պարունակող անդամներ՝ $4x+10+6x=5$։ Եթե ստացված հավասարման երկու մասերից էլ հանենք 10, ապա ձախ մասում կմնան միայն փոփոխական պարունակող անդամներ, իսկ աջ մասում՝ միայն փոփոխական չպարունակող անդամներ (հավասարման ազատ անդամներ).

$$4x+6x=5-10 \qquad (2)$$

Լուծենք (2) հավասարումը՝ $10x=-5$, $x=-\frac{1}{2}$։

Պատասխան. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$։

Համեմատելով (1) և (2) հավասարումները, նկատենք, որ $-6x$ գումարելին (1) հավասարման աջ մասից (2) հավասարման ձախ մասն է տեղափոխվել հակադիր նշանով՝ $+6x$, և 10 գումարելին (1) հավասարման ձախ մասից (2) հավասարման աջ մասն է տեղափոխվել հակադիր նշանով՝ -10։

Օրինակ 2։ *Լուծել հետևյալ հավասարումը.*

$$15x+28-3x=43-7x-72։ \quad (1)$$

$-7x$ գումարելին տեղափոխենք ձախ, իսկ 28 գումարելին՝ աջ, փոխելով յուրաքանչյուր տեղափոխվող գումարելիի նշանը.

$$15x-3x+7x=43-72-28։ \quad (2)$$

(2) հավասարման յուրաքանչյուր մասում պարունակվում են կամ միայն փոփոխականով անդամներ, կամ միայն ազատ անդամներ։ Հավասարման յուրաքանչյուր մասում առանձին-առանձին կատարելով նման անդամների միացում, կստանանք՝ $19x=-57$, $x=-3$։

Որպեսզի ստուգենք, թե հաշվումներում սխալներ չկա՞ն արդյոք, տրված (1) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք -3։ Կստանանք՝ $-45+28+9=43+21-72$, $-8=-8$։

Պատասխան. $\{-3\}$։

Այսպիսով, հավասարումներ լուծելիս կարելի է ցանկացած անդամ (ցանկացած գումարելին) հավասարման մի մասից տեղափոխել մյուս մասը՝ նշանը փոխելով հակադիրով:

Օրինակ 3։ *Լուծել հետևյալ հավասարումը.*

$$\frac{15}{7}x+\frac{6}{35}x=36+\frac{9}{5}x։ \quad (1)$$

1-ին լուծում։ $\frac{15}{7}x+\frac{6}{35}x-\frac{9}{5}x=36$, $\frac{75x+6x-63x}{35}=36$, $\frac{18}{35}x=36$, $x=36:\frac{18}{35}$, $x=70$։

Այս հավասարումը կարելի է լուծել այլ կերպ։

2-րդ լուծում։ *(1) հավասարման բոլոր անդամները բաժանենք 3-ի.*

$$\frac{5}{7}x+\frac{2}{35}x=12+\frac{3}{5}x։$$

Ստացված հավասարման բոլոր անդամները բազմապատկենք 35-ով.

$$25x+2x=420+21x։ \quad (2)$$

(2) Հավասարման մեջ x փոփոխականը արդեն չունի կոտորակային գործակիցներ։ Լուծենք (2)-ը.

$$25x+2x-21x=420,\ 6x=420,\ x=70;$$

Պ ա տ ա ս խ ա ն. {70}։

Այսպիսով, հավասարումներ լուծելիս կարելի է հավասարման բոլոր անդամները բազմապատկել կամ բաժանել զրոյից տարբեր միևնույն թվի վրա։

Ս ա հ մ ա ն ու մ. $ax=b$ տեսքի հավասարումը կոչվում է մեկ փոփոխականով գծային հավասարում. x-ը փոփոխականն է, a-ն՝ x փոփոխականի գործակիցը, b-ն՝ ազատ անդամը։

$ax=b$ *հավասարումը* $a\neq 0$ *դեպքում ունի մեկ արմատ՝* $x=\frac{b}{a}$։

Եթե գծային հավասարման մեջ $a=0$, *ապա հնարավոր է երկու դեպք.*

1) $a=0$, $b=0$։ *Հավասարումն ընդունում է* $0\cdot x=0$ *տեսքը։ Այդ հավասարման արմատ կարող է լինել ցանկացած թիվ։ Արմատների բազմությունը* $]-\infty;+\infty[$ *թվային ուղիղն է (տե՛ս § 27)։*

2) $a=0$, $b\neq 0$. *դիցուք, օրինակ,* $b=1$։ *Հավասարումն ընդունում է* $0\cdot x=1$ *տեսքը։ Հավասարումն արմատ չունի։ Արմատների բազմությունն է՝* $\varnothing$։ $ax=b$ *տեսքի գծային հավասարումները (պայմանով, որ* $a\neq 0$*) կոչվում են մեկ փոփոխականով առաջին աստիճանի հավասարումներ։*

Վարժություններ

Լուծեցեք հետևյալ հավասարումը.

298. ա) $15-3x=2x+5$, գ) $28-3y=40+3y$,

բ) $26a+32=4-2a$, դ) $17+12n=36-7n$։

299. ա) $5x+23=23-17x$, գ) $21-2k=5k+42$,

բ) $13a+65=a+5$, դ) $6y+25=11y+5$։

300. ա) $3(4a+3)=5(4a-3)$, գ) $9(3x+7)=4(10x-33)$,

բ) $2(2b+13)=3(67-b)$, դ) $6(12-y)=5(y-1)$,

301. ա) $\frac{5a-9}{10}-\frac{5-6a}{5}=\frac{10a-9}{14}-\frac{3-4a}{7}$,

բ) $\frac{3(b+2)}{2}-6=\frac{7b-2}{3}-0,8(3b-1)$,

302. ա) $\frac{2p-11}{3}+\frac{2p-5}{5}-\frac{p+8}{6}=p-7$,

բ) $\frac{2k+1}{7}-\frac{9k-24}{3}=\frac{3k-1}{8}-\frac{k+3}{6}$,

303. *Փոփոխականի ո՞ր արժեքի դեպքում են հետևյալ արտահայտությունները հավասար.*

ա) $\frac{12-2x}{3}$ և $\frac{3x-1}{4}$, գ) $\frac{2b+9}{5}$ և $\frac{1-3b}{7}$,

բ) $\frac{a+17}{4}$ և $\frac{3(10+a)}{5}$, դ) $\frac{2(y-2)}{9}$ և $\frac{3+y}{7}$։

304. *Փոփոխականի ո՞ր արժեքի դեպքում է.*

ա) $\frac{2-y}{5}$-ի և $\frac{3y+2}{7}$-ի գումարը հավասար զրոյի,

բ) $\frac{48+5a}{12}$-ի և $\frac{2a+6}{15}$-ի տարբերությունը հավասար 7-ի,

գ) $\frac{2-x}{6}$-ի և $\frac{x+7}{15}$-ի գումարը հավասար $\frac{8-x}{2}$-ի։

305. *Փոփոխականի ո՞ր արժեքի դեպքում է.*

ա) $\frac{4k+18}{9}$-ի և $\frac{30-7k}{15}$-ի տարբերությունը հավասար զրոյի,

բ) $\frac{2a-31}{9}$-ի և $\frac{36-5a}{16}$-ի գումարը հավասար —3-ի,

գ) $\frac{2x+1}{18}$-ի և $\frac{x+2}{9}$-ի տարբերությունը հավասար $\frac{x-6}{6}$-ի։

§ 54. ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ (սկիզբ)

Խնդիր 1: *Չորսուներից մեկը մյուսից կարճ է 1,36 մ-ով։ Փոքր չորսուի երկարությունը կազմում է մեծի երկարության $\frac{2}{3}$-ը։ Գտնել յուրաքանչյուր չորսուի երկարությունը։*

1-ին լուծում: *Փոքր չորսուի երկարությունը նշանակենք x-ով (արտահայտված մետրերով), այդ դեպքում մեծ չորսուի երկարությունը կլի-*

նի $x+1,36$։ Փոքր չորսուի երկարությունը կազմում է մեծ չորսուի երկարության $\frac{2}{3}$-ը։ Ուստի կարելի է կազմել հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{2}{3}(x+1,36)=x,$$

Մենք ստացանք հավասարում։ Լուծենք այն. $2x+2,72=3x$, $x=2,72$։ Այսպիսով, փոքր չորսուի երկարությունն է 2,72 մ, իսկ մեծ չորսուի երկարությունը՝ $2,72+1,36=4,08$ (մ)։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. 2,72 մ և 4,08 մ։

2-րդ լուծում: Մեծ չորսուի երկարությունը նշանակենք x-ով (արտահայտված մետրերով), այդ դեպքում փոքր չորսուի երկարությունը կլինի $x-1,36$։ Քանի որ փոքր չորսուի երկարությունը կազմում է մեծ չորսուի երկարության $\frac{2}{3}$-ը, ուստի կարելի է կազմել հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{2}{3}x=x-1,36,$$

Լուծենք ստացված հավասարումը. $2x=3x-4,08$, $x=4,08$։ Այսպիսով, մեծ չորսուի երկարությունը հավասար է 4,08 մ-ի, իսկ փոքրի երկարությունը՝ $4,08-1,36=2,72$ (մ)։

Խ ն դ ի ր 2. Հինգ օրում պահեստից ստացել են 3915 կգ վառելանյութ։ Ընդ որում, առաջին օրը ստացել են 2 անգամ շատ, քան երկրորդ օրը, երրորդ օրը՝ 3 անգամ շատ, քան առաջին օրը, չորրորդ օրը՝ 2 անգամ շատ, քան երրորդ օրը, իսկ հինգերորդ օրը՝ 4 անգամ շատ, քան առաջին օրը։ Որքա՞ն վառելանյութ են ստացել յուրաքանչյուր օրում։

Լ ու ծ ու մ։ Առաջին օրը ստացած վառելանյութի քանակը նշանակենք x-ով։ Այդ դեպքում 2-րդ օրը ստացվել է $\frac{1}{2}x$, 3-րդ օրը՝ $3x$, 4-րդ օրը՝ $6x$, իսկ 5-րդ օրը՝ $4x$։ Հինգ օրում պահեստից ստացել են $x+\frac{1}{2}x+3x+6x+4x$ քանակությամբ վառելանյութ, որը ըստ խնդրի պայմանի հավասար է 3915 կգ-ի։ Կազմենք հավասարումը.

$$x+\frac{1}{2}x+3x+6x+4x=3915,$$

Լուծենք՝ $14,5x=3915$, $x=270$։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. 270, 135, 810, 1620, 1080 կգ։

Խ ն դ ի ր 3: *10380 դետալ պատրաստելու առաջադրանքը կատարվել է 3 օրում։ Ընդ որում առաջին օրը 42 դետալ պակաս է պատրաստվել, քան երկրորդ օրը, իսկ երրորդ օրը՝ 156 դետալ պակաս՝ քան երկրորդ օրը։ Քանի՞ դետալ են պատրաստել յուրաքանչյուր օրում։*

Լ ու ծ ու մ։ 2-րդ օրը պատրաստված դետալների թիվը նշանակենք x*-ով։ 1-ին օրը պատրաստված դետալների թիվը կլինի* $x-42$*, իսկ 3-րդ օրը պատրաստվածներինը՝* $x-156$*։ Երեք օրում պատրաստվել է* $(x-42)+x+(x-156)$ *դետալ, որը ըստ խնդրի պայմանի հավասար է 10380-ի։ Կազմենք հավասարումը.*

$$(x-42)+x+(x-156)=10380$$

և լուծենք. $3x=10578$, $x=3526$*։ Այսպիսով, 2-րդ օրը պատրաստվել է 3526 դետալ, 1-ին օրը՝* $3526-42=3484$*, իսկ 3-րդ օրը՝* $3526-156=3370$*։*

Պ ա տ ա ս խ ա ն. 3484, 3526, 3370 դետալ։

Խ ն դ ի ր 4: *Երկնիշ թվի տասնավորների թիվը երեք անգամ մեծ է միավորների թվից։ Եթե թվի թվանշանների տեղերը փոխենք, ապա կստացվի մի թիվ, որը 54-ով փոքր է որոնելի թվից։ Գտեք այդ թիվը։*

Լ ու ծ ու մ։ Եթե որևէ թվի միավորների թիվը նշանակենք m*-ով, իսկ տասնավորների թիվը՝* k*-ով, ապա այդ երկնիշ թիվը կարելի է գրել* $10k+m$ *տեսքով, իսկ եթե թվանշանների տեղերը փոխենք, ապա կստացվի մի նոր թիվ, որը կունենա* $10m+k$ *տեսքը։*

Որոնելի թվի միավորների թիվը նշանակենք x*-ով։ Այդ դեպքում տասնավորների թիվը կլինի* $3x$*, իսկ որոնելի թիվը՝* $10\cdot3x+x$*, այսինքն՝* $31x$*։ Այն թիվը, որը գրվում է նույն այդ թվանշանով, բայց վերցրած հակառակ կարգով, կունենա* $10\cdot x+3x$*, այսինքն՝* $13x$ *տեսքը։ Ըստ պայմանի այդ թվերի տարբերությունը հավասար է 54-ի։ Կազմենք հավասարում և լուծենք.*

$$31x-13x=54,\quad 18x=54,\quad x=3$$

Այսպիսով, միավորների թիվը հավասար է 3-ի, հետևաբար տասնավորների թիվը կլինի 9։ Որոնելի թիվը 93-ն է, իրոք, $93-39=54$*։*

Պ ա տ ա ս խ ա ն. 93։

Խ ն դ ի ր 5: *Երեք արկղում կար 23 կգ խնձոր, ընդ որում 1-ին արկղում կար 3-կգ-ով քիչ, քան 2-րդում, իսկ 3-րդում՝ 16 կգ-ով քիչ, քան 2-րդում։ Որքա՞ն խնձոր կար 2-րդ արկղում։*

Լ ու ծ ու մ։ 2-րդ արկղի խնձորների զանգվածը (կգ-երով) նշանակենք x*-ով, այդ դեպքում 1-ին արկղի խնձորների զանգվածը կլինի* $x-3$*, իսկ 3-րդ արկղինը՝* $x-16$*։ Կազմենք հավասարում՝*

$$(x-3)+x+(x-16)=23$$

և լուծենք՝ $3x-19=23$, $3x=42$, $x=14$։ Այսպիսով, երկրորդ արկղում կար 14 կգ խնձոր։ Խնդիրը կարծես թե լուծվեց։ Սակայն, եթե երկրորդ արկղում կար 14 կգ, ապա առաջին արկղում պետք է լինի $14-3=11$ (կգ), իսկ երրորդ արկղում՝ $14-16=-2$ (կգ)։ Բայց չէ որ դա չի կարող իրական լինել։

Այսպիսով, հավասարման արմատի ստուգումը խնդրի բոլոր պայմանների բավարարելու առումով, հանգեցնում է այսպիսի պատասխանի՝ խնդիրը լուծում չունի։

Այս խնդիրը ցույց է տալիս, որ եթե ըստ խնդրի կազմած հավասարման արմատի ստուգումը ցանկալի է (հաշվումների ճշտությունը ստուգելու համար), ապա խնդրի պատասխանի ստուգումը նրա բոլոր պայմանների բավարարելու առումով՝ անհրաժեշտ է (համոզվելու համար, որ խնդիրն իմաստ ունի)։

Վարժություններ

Լուծեցեք հետևյալ խնդիրները.

806. Երկու թվերի տարբերությունը հավասար է 705-ի։ Գտեք այդ թվերը, եթե դրանցից մեկը մյուսից մեծ է 4 անգամ։

807. Գտեք երկու թիվ, որոնց հարաբերությունը լինի $\frac{2}{3}$, իսկ տարբերությունը՝ 6,21։

808. Երկու թվերի հարաբերությունը հավասար է $\frac{6}{7}$-ի։ Գտեք այդ թվերը, եթե դրանցից մեկը մյուսից փոքր է 5,43-ով։

809. Թվերից մեկը կազմում է մյուսի 140 %-ը։ Գտեք այդ թվերը, եթե դրանց տարբերությունը հավասար է 37-ի։

810. Գտեք երկու թիվ, որոնցից մեկը մյուսից փոքր լինի 102,4-ով և կազմի մյուսի $\frac{5}{18}$-ը։

311. Գրադարաններից մեկում 834 գիրք ավելի կա, քան մյուսում։ Քանի՞ գիրք կա յուրաքանչյուր գրադարանում, եթե երկրորդի գրքերի թիվը կազմում է առաջին գրադարանի գրքերի թվի 62,5 %-ը։

812. Ձողերից մեկի երկարությունը կազմում է մյուսի երկարության $\frac{13}{16}$-ը։ Գտեք յուրաքանչյուր ձողի երկարությունը, եթե դրանցից մեկը մյուսից կարճ է 45-սմ-ով։

813. Երկու թվերի գումարը հավասար է 16,2-ի։ Մի թիվը մյուսից մեծ է 4 անգամ։ Գտեք այդ թվերը։

814. 540 մ երկարությամբ լարը կտրատեցին երեք մասի այնպես, որ առաջին մասը երկրորդից մեծ լինի երեք անգամ, իսկ երրորդը առաջինից՝ երկու անգամ։ Գտեք յուրաքանչյուր մասի երկարությունը։

315. *Քառանկյան անկյունների մեծությունների գումարը հավասար է 360°-ի։ Գտեք յուրաքանչյուր անկյան մեծությունը, եթե դրանցից առաջինը 3 անգամ մեծ է երկրորդից, երրորդը 8 անգամ մեծ է երկրորդից, իսկ չորրորդը 2 անգամ մեծ է առաջինից։*

316. *Եռանկյան պարագիծը հավասար է 669 սմ-ի։ Գտեք եռանկյան կողմերի երկարությունները, եթե դրանցից մեկը 23 սմ-ով կարճ է մյուսից և 41 սմ-ով երկար՝ երրորդից։*

317. *Երեք դարակում կա 1621 գիրք, ընդ որում առաջինում 87 գիրք քիչ կա, քան երկրորդում, իսկ երրորդում՝ 19 գիրք շատ, քան երկրորդում։ Քանի՞ գիրք կա յուրաքանչյուր դարակում։*

Ինքնուրույն աշխատանք № 9

1. Խնդիր: *Գնացքը կազմված է երկսռնի և քառասռնի վագոններից։ Յուրաքանչյուր տիպի վագոնից քանի՞ հատ կա, եթե գնացքը կազմված է 68 վագոնից և դրանք բոլորը միասին ունեն 218 սռնի։*

2. *Լուծեցեք հետևյալ հավասարումը.*

$$\frac{7}{12}k+\frac{2-k}{4}-1=\frac{5k-6}{9}-0{,}5.$$

3. *Փոփոխականի որ արժեքի դեպքում է* $\frac{y-3}{2}$ *և* $\frac{y-4}{3}$ *արտահայտությունների գումարը հավասար* $\frac{y+3}{6}$ *և* $\frac{5-y}{4}$ *արտահայտությունների տարբերությանը։*

§ 55. ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ (ավարտ)

Շարունակենք հավասարում կազմելու միջոցով լուծվող խնդիրների քննարկումը, որ սկսել էինք նախորդ պարագրաֆում։

Խնդիր 1: *Երկու թվերի գումարը հավասար է 179-ի։ Առաջին թիվը երկրորդի վրա բաժանելիս քանորդում ստացվում է 13 և 11 մնացորդ։ Գտնել այդ թվերը։*

Լուծում։ Հայտնի է, որ բաժանելին հավասար է բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին՝ գումարած մնացորդը։ Դիցուք բաժանելին է x, *իսկ բաժանարարը՝* 179—x*։ Հավասարումը կլինի՝*

$$x=(179-x)\cdot 13+11.$$

Լուծելով հավասարումը, գտնում ենք՝ $x=167$*։ Այսպիսով, բաժանելին է 167, իսկ բաժանարարը՝ 179—167=12։*

Ստուգում. $167=12\cdot 13+11$, $167=167$.

Պատասխան. 167; 12։

Լուծենք մի քանի խնդիր մարմնի ուղղագիծ հավասարաչափ շարժման վերաբերյալ։ Այդ խնդիրներում օգտագործվում է $v=\frac{s}{t}$ հիմնական բանաձևը, որտեղ s-ը անցած ճանապարհն է (կմ-երով), t-ն՝ ժամանակը (ժ-երով), v-ն՝ շարժման արագությունը (կմ/ժ-երով)։ Այդ բանաձևից հետևում է, որ $s=vt$ և $t=\frac{s}{v}$։

Խ ն դ ի ր 2։ A և B քաղաքների միջև հեռավորությունը հեծանվորդը անցավ 3 ժ-ում։ Եթե նա գնար 2 կմ/ժ-ով ավելի մեծ արագությամբ, ապա նա այդ նույն ճանապարհը կանցներ 2 ժ 30 ր-ում։ Գտնել քաղաքների հեռավորությունը և հեծանվորդի արագությունը։

1-ին լուծում։ Որոնելի հեռավորությունը նշանակենք x-ով։ Առաջին դեպքում հեծանվորդը x կմ-ն անցել է 3 ժ-ում, ուստի նրա արագությունը եղել է $\frac{x}{3}$ կմ/ժ։ Մյուս դեպքում նա այդ նույն x կմ-ն կանցներ $2\frac{1}{2}$ ժ-ում և նրա արագությունը կլիներ $(x:\frac{5}{2})$, այսինքն՝ $\frac{2x}{5}$ կմ/ժ։ Քանի որ երկրորդ արագությունը առաջինից մեծ է 2 կմ/ժ-ով, ուստի կարելի է կազմել հավասարում, որը կունենա հետևյալ երեք տեսքերից որևէ մեկը.

$$1)\ \frac{x}{3}+2=\frac{2x}{5},\quad 2)\ \frac{2x}{5}-2=\frac{x}{3},\quad 3)\ \frac{2x}{5}-\frac{x}{3}=2։$$

Լուծելով հավասարումը, գտնում ենք՝ $x=30$, $\frac{x}{3}=10$։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. 30 կմ, 10 կմ/ժ։

2-րդ լուծում։ Սկզբնական արագությունը նշանակենք x-ով։ Առաջին դեպքում հեծանվորդը 3 ժ գնացել է x կմ/ժ արագությամբ, ուստի ամբողջ ճանապարհը 3x կմ է։ Երկրորդ դեպքում նա նույն այդ 3x կմ-ը կանցներ $2\frac{1}{2}$ ժամում, և այդ պատճառով նրա արագությունը կլիներ $(3x:2\frac{1}{2})$, այսինքն՝ $\frac{6}{5}x$ կմ/ժ։ Քանի որ երկրորդ արագությունը առաջինից մեծ է 2 կմ/ժ-ով, ուստի կարելի է կազմել հավասարում, որը կունենա հետևյալ երեք տեսքերից որևէ մեկը.

$$1)\ x+2=\frac{6}{5}x,\quad 2)\ \frac{6}{5}x-2=x,\quad 3)\ \frac{6}{5}x-x=2։$$

Լուծելով հավասարումը, գտնում ենք՝ $x=10$, $3x=30$։

Պատասխանը նույնն է։

Նման խնդիրներ լուծելիս շատ արդյունավետ է s, v և t մեծությունների կախվածության աղյուսակից օգտվելը։

Այս խնդրի երկու լուծումների երկու աղյուսակները հետևյալն են.

1-ին լուծում

	s	v	t
I	x	$\frac{x}{3}$	3
II	x	$\frac{2x}{5}$	$\frac{5}{2}$

2-րդ լուծում

	s	v	t
I	3x	x	3
II	3x	$\frac{6x}{5}$	$\frac{5}{2}$

Այսպիսի սխեմաները հեշտացնում են խնդիրների հավասարումներ կազմելը։

Խնդիր 3: *Ավտոբուսը A վայրից B վայրը մեկնեց 36 կմ/ժ արագությամբ։ 2 ժ հետո B վայրից նրան ընդառաջ դուրս եկավ մարդատար մեքենան, որի արագությունն է 52 կմ/ժ։ A-ից B հեռավորությունը 336 կմ է։ A-ից ի՞նչ հեռավորության վրա նրանք կհանդիպեն։*

Լուծում։ Մեքենաների հանդիպման վայրը նշանակենք C-ով (նկ. 74), իսկ A-ից C հեռավորությունը՝ x-ով։ Ավտոբուսը x կմ ճանապարհը 36 կմ/ժ արագությամբ կանցնի $\frac{x}{36}$ ժ-ում, իսկ մարդատար մեքենան (336—x) կմ ճանապարհը 52 կմ/ժ արագությամբ կանցնի $\frac{336-x}{52}$ ժ-ում։

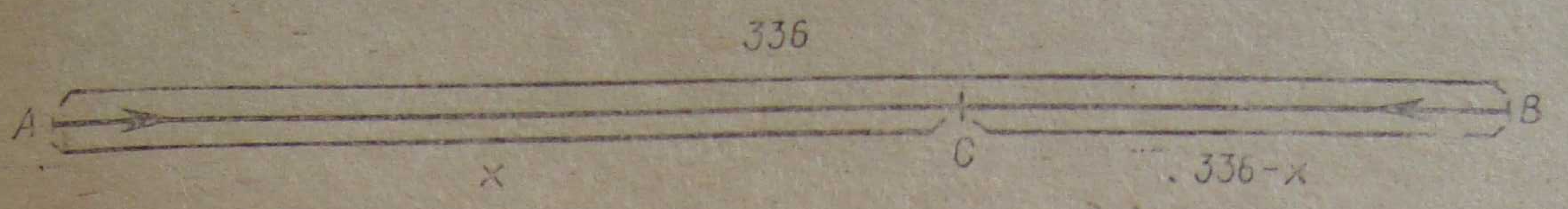
Կազմենք աղյուսակ.

	s	v	t
Ավտոբուս	x	36	$\frac{x}{36}$
Մարդատար մեքենա	336—x	52	$\frac{336-x}{52}$

Քանի որ մարդատար մեքենան ճանապարհն անցել է 2 ժ-ով քիչ ժամանակում, ապա հավասարումը կարելի է կազմել՝ հավասարեցնելով մեքենաների շարժման ժամանակները.

$$\frac{x}{36}-\frac{336-x}{52}=2.$$

Լուծենք հավասարումը. $13x-9(336-x)=2\cdot4\cdot9\cdot13$, $13x-3024+9x=936$, $22x=3960$, $x=180$։



Նկ. 74

Ստուգենք խնդրի լուծումը։ Ավտոբուսը՝ 180 կմ-ը 36 կմ/ժ արագությամբ անցել է $\frac{180}{36}$ ժ-ում, այսինքն՝ 5 ժ-ում։ Մարդատար մեքենան 336—180, այսինքն՝ 156 կմ-ն 52 կմ/ժ արագությամբ անցել է $\frac{156}{52}$ ժ-ում, այսինքն՝ 3 ժ-ում, 5—3=2։ Ճիշտ է։

Պատասխան. 180 կմ։

Խնդիր 4։ Միմյանցից 36 կմ հեռավորության վրա գտնվող A և B վայրերից միաժամանակ նույն ուղղությամբ թռան երկու ուղղաթիռ։ Առաջին ուղղաթիռի արագությունն է 158 կմ/ժ, իսկ երկրորդինը՝ 170 կմ/ժ։ Որքա՞ն ժամանակ հետո երկրորդ ուղղաթիռը կհասնի առաջինին։

Լուծում։ Ուղղաթիռների հանդիպման վայրը նշանակենք C-ով (նկ. 75), իսկ A-ից C հեռավորությունը (կմ-ով)՝ x-ով։ Խնդիրը կլուծվի ավելի պարզ, եթե x-ով նշանակենք ոչ թե որոնելի ժամանակը, այլ հենց AC ճանապարհի երկարությունը. գիտենալով AC հեռավորությունը, հեշտ է հաշվել նաև որոնելի ժամանակը։

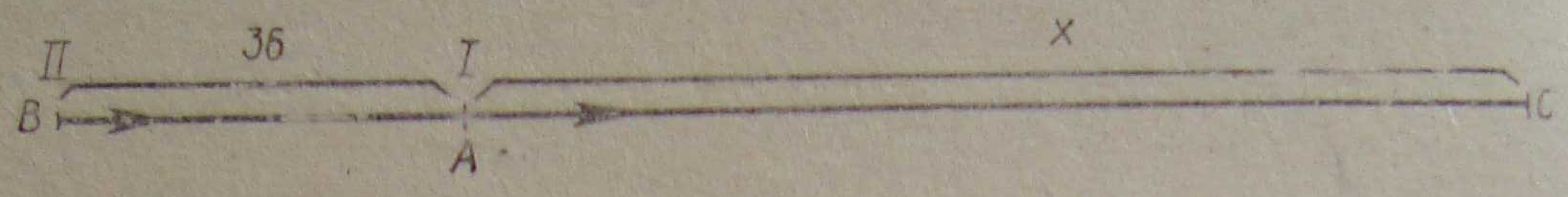
Առաջին ուղղաթիռը (A-ից) x կմ ճանապարհը 158 կմ/ժ արագությամբ թռչում է $\frac{x}{158}$ ժ-ում, իսկ երկրորդը (B-ից)(x+36) կմ ճանապարհը ավելի մեծ՝ 170 կմ/ժ արագությամբ թռչում է $\frac{x+36}{170}$ ժ-ում։

Կազմենք աղյուսակ.

	s	v	t
I (A-ից)	x	1 8	$\frac{x}{158}$
II (B-ից)	x+36	170	$\frac{x+36}{170}$

Քանի որ ուղղաթիռները թռել են միաժամանակ, ապա մինչև հանդիպելը նրանք ճանապարհին եղել են նույնքան ժամանակ։ Ուրեմն հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x}{158}=\frac{x+36}{170},$$



Նկ. 75

Լուծենք հավասարումը. $170x=158x+158\cdot36$, $12x=158\cdot36$, $x=158\cdot3$, $x=474$։ Այսպիսով, AC հեռավորությունը 474 կմ է։ Թռիչքի տևողությունը հավասար է $\frac{474}{158}$ ժ-ի, կամ $\frac{510}{170}$ ժ-ի, այսինքն՝ 3 ժ-ի։

Խնդիր 5։ Երկու փականագործ միասին աշխատելով կարող են առաջադրանքը կատարել 10 օրում։ Աշխատելով մենակ, նույն այդ առաջադրանքը առաջին փականագործը կարող է կատարել 22,5 օրում։ Աշխատելով մենակ, այդ առաջադրանքը որքա՞ն ժամանակում կարող է կատարել երկրորդ փականագործը։

Լուծում։ Առաջին փականագործը կարող է ամբողջ առաջադրանքը կատարել 22,5 օրում։ Հետևաբար, մեկ օրում նա կկատարի աշխատանքի $\frac{1}{22,5}=\frac{10}{225}=\frac{2}{45}$ մասը։

Որոնելի ժամանակը (օրերով) նշանակենք x-ով, հետևաբար երկրորդ փականագործը մեկ օրում կկատարի աշխատանքի $\frac{1}{x}$ մասը։ Երկու փականագործները միասին աշխատելով կարող են առաջադրանքը կատարել 10 օրում, ուստի մեկ օրում նրանք կկատարեն ամբողջ աշխատանքի $\frac{1}{10}$ մասը։ Այժմ կարելի է կազմել հավասարումը՝

$$\frac{2}{45}+\frac{1}{x}=\frac{1}{10}։$$

Լուծենք. $\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\frac{2}{45}$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{18}$, $x=18$։

Պատասխան. 18 օր։

Խնդիր 6։ Անտառահատների բրիգադը առաջադրանքը պետք է կատարեր 18 օրում։ Ամեն օր նորմայից ավելի կատարելով 14 $м^3$, բրիգադը ժամկետից 2 օր շուտ առաջադրանքը գերակատարեց 74 $м^3$-ով։ Որքա՞ն է բրիգադի օրական նորման ըստ պլանի։

Լուծում։ Պլանով նախատեսված օրական նորման նշանակենք x $м^3$։ Պլանը պետք է կատարվեր 18 օրում, ուստի աշխատանքի ամբողջ ծավալը ($м^3$-երով), կազմում է 18x։ Բրիգադը, փաստորեն, 16 օր աշխատելով, օրական կատարել է (x+14) $м^3$ նորմա, ուստի կատարված

ամբողջ աշխատանքի ծավալը հավասար է 16 (x+14) $մ^3$-ու: Կազմենք աղյուսակ.

	Նորմա	Օրերի թիվը	Աշխատանքի ծավալը
Ըստ պլանի	x	18	18x
Փաստացի	x+14	16	16(x+14)

Քանի որ աշխատանքը գերակատարվել է 74 $մ^3$-ով, ուստի հավասարումը կլինի.

$$16(x+14)-18x=74:$$

Լուծենք. $16x+224-18x=74, \quad x=75$:

Պատասխան. օրական 75 $մ^3$:

Մենք արդեն լուծել ենք բավարար քանակությամբ հավասարումներ, իսկ վերջիններիս միջոցով՝ նաև խնդիրներ, ուստի կարելի է անել որոշ հետևություններ:

Հավասարումներ լուծելիս անհրաժեշտ է. ազատվել կոտորակային արտադրիչներից, դրանք փոխարինելով ամբողջ արտադրիչներով, բացել փակագծերը, եթե հավասարման բոլոր անդամներն ունեն ընդհանուր արտադրիչ, ապա հավասարումը անդամ առ անդամ բաժանել այդ արտադրիչի վրա, փոփոխական պարունակող բոլոր անդամները տանել հավասարման մի մասը, իսկ բոլոր ազատ անդամները՝ մյուս մասը, հավասարման յուրաքանչյուր մասում կատարել նման անդամների միացում, ազատ անդամը բաժանել փոփոխականին կից արտադրիչի վրա և ստանալ հավասարման արմատը:

Հավասարման լուծումը ստուգելու համար անհրաժեշտ է փոփոխականի գտած արժեքը տեղադրել սկզբնական հավասարման մեջ:

Խնդիրները լուծելիս անհրաժեշտ է. լավ պարզաբանել խնդրի բովանդակությունը, որևէ մեծություն ընտրել որպես որոնելի և այն նշանակել ինչ-որ տառով, օրինակ x-ով, խնդրի պայմանում տրված բոլոր մեծությունները արտահայտել այդ մեծությամբ, (այս գործը բավական հեշտանում է, եթե կազմում ենք աղյուսակներ, վերջիններս բավական արդյունավետ են այն դեպքում, երբ խնդրում դիտարկվում են երկու մեծություններ և դրանց հարաբերություններ՝ ճանապարհ-ժամանակ-արագություն, զանգված-ծավալ-խտություն, աշխատանքի ծավալ-ժամանակ-արտադրողականություն, համախառն բերք-ցանքի մակերես-բերքատվություն), կազմել հավասարում, որի համար պետք է նախ հստակ պարզել,

թե մեծությունների համապատասխանող արժեքներից որն է մեծ կամ փոքր մյուսից, և դրանից հետո միայն ձեռնամուխ լինել հավասարում կազմելուն, լուծել կազմած հավասարումը, ստուգել արմատը, գտնել պայմանով պահանջվող բոլոր որոնելի մեծությունների արժեքները (եթե այդ մեծությունները մեկից շատ են կամ եթե որպես փոփոխական է ընտրված որևէ օժանդակ մեծություն)։

Լուծելով կազմված հավասարումը, հարկավոր է պարզել, թե նրա արմատը բավարարում է արդյոք խնդրի պայմանին։ Անհրաժեշտ է նաև ստուգել՝ խնդրի իմաստին բավարարո՞ւմ են արդյոք նրա լուծման ընթացքում կազմված արտահայտությունները (խնդիր 5-րդ, § 54)։ Խնդիրը համարվում է լուծված, եթե գտնվել է նրա լուծումը կամ ապացուցվել է, որ լուծում չունի։

Վարժություններ

Լուծեցեք հավասարումը.

318. ա) $\frac{6y-11}{7}+\frac{42-y}{2}=\frac{68+4y}{5}+1,5y$,

բ) $\frac{4t+27}{4}-\frac{5t+16}{3}=\frac{3t+1}{4}-2t$։

319. ա) $\frac{3y-27}{2}-\frac{6y+13}{7}=1,5(y+1)-\frac{4y+84}{5}$,

բ) $\frac{2b-23}{4}-2b=\frac{5b-18}{6}-\frac{5b+12}{3}$։

320. ա) $\frac{1+8x}{11}+\frac{3x+2}{2}=10$, բ) $\frac{a-3}{8}+\frac{3a-37}{2}=\frac{25-a}{4}+\frac{a-6}{3}$։

321. ա) $\frac{3b+6}{5}-\frac{5b-8}{4}=-2$, բ) $x+2,5=\frac{3+4x}{4}+\frac{3x-2}{8}$։

322. ա) $\frac{2x-7}{6}+\frac{x+1}{4}=\frac{7-2x}{3}+\frac{7x-13}{4}-x$,

բ) $\frac{a-5}{5}+\frac{3a-5}{10}=\frac{2a-1}{3}-7$։

323. ա) $\frac{a+5}{5}-a+4=\frac{a+4}{3}-\frac{a-1}{2}$,

բ) $\frac{2z-14}{3}-15=\frac{3z-46}{11}-\frac{59-z}{5}$,

324. ա) $\frac{3(t-9)}{4}=\frac{3(t+3)}{5}-\frac{2(2t-1)}{11}$,

բ) $\frac{2(x-3)}{3}+\frac{3x+16}{8}=\frac{3(2x-1)}{5}-7$։

Լուծեցեք խնդիրները.

325. Երկու դարակում կար 492 գիրք։ Երբ առաջին դարակից 72 գիրք դրեցին երկրորդի վրա, երկրորդում գրքերի թիվը դարձավ 3 անգամ շատ, քան առաջինում։ Նախապես քանի՞ գիրք կար յուրաքանչյուր դարակում։

326. Պահեստներից մեկում 5052 տ քարածուխ շատ կար, քան մյուսում։ Երբ առաջին պահեստ բերեցին 2632 տ, իսկ երկրորդ պահեստ՝ 421 տ, ապա առաջին պահեստի քարածխի քանակը դարձավ 4 անգամ շատ երկրորդ պահեստում եղածից։ Որքա՞ն քարածուխ կար յուրաքանչյուր պահեստում նախապես։

327. Մի նավակայանից կատերը մյուսը գնաց 12 կմ/ժ արագությամբ և անմիջապես վերադարձավ, արագությունը մեծացնելով մինչև 15 կմ/ժ։ Գտեք նավակայանների հեռավորությունը, եթե այդ ամբողջ ճանապարհը կատերը գնաց և ետ դարձավ 9 ժ-ում։

328. Ուղղաթիռը A վայրից B վայրը թռավ 150 կմ/ժ արագությամբ։ Ետ դառնալիս նրա արագությունը 180 կմ/ժ էր։ Հաշվեցեք A և B վայրերի հեռավորությունը, եթե ուղղաթիռը այդ տարածությունը կտրեց և ետ դարձավ 2 ժ 12 ր-ում։

329. Հացահատիկ բարձած մեքենան կոլտնտեսությունից ալրաղաց գնաց 40 կմ/ժ արագությամբ և նույն ճանապարհով ետ դարձավ 50 կմ/ժ արագությամբ։ Գտեք կոլտնտեսության և ալրաղացի հեռավորությունը, եթե ամբողջ ուղերթը մեքենան կատարեց $4\frac{3}{4}$ ժ-ում, որից 15-ը ծախսվեց հացահատիկի բեռնաթափման վրա։

330. Ճանապարհի մեկ երրորդ մասը ավտոբուսն անցավ 32 կմ/ժ արագությամբ, իսկ մնացած մասը՝ 48 կմ/ժ արագությամբ։ Որքա՞ն ճանապարհ անցավ ավտոբուսը, եթե նրա ընթացքը տևեց 4 ժ 40 ր։

331. Ճանապարհի մեկ չորրորդ մասը մեքենան անցավ 45 կմ/ժ արագությամբ, ճանապարհի մեկ երրորդը՝ 60 կմ/ժ արագությամբ, իսկ մնացած մասը՝ 50 կմ/ժ արագությամբ։ Որքա՞ն է ամբողջ ճանապարհը, եթե մեքենան այն անցավ 7 ժ-ում։

12—509

332. Ավտոբուսը քաղաքից օդանավակայան հասավ 1 ժ 30 ր-ում։ Ետդարձի ճանապարհին նա արագությունը մեծացրեց 10 կմ/ժ-ով, ուստի ետդարձը տևեց 1 ժ 15 ր։ Որոշեցեք ավտոբուսի սկզբնական արագությունը և քաղաքի հեռավորությունը օդանավակայանից։

333. Տուրիստը դուրս եկավ A վայրից և ուղևորվեց վերջինից 145 կմ հեռավորության վրա գտնվող B վայրը, օրական անցնելով 20 կմ։ Երկու օր հետո B-ից A ուղևորվեց երկրորդ տուրիստը, օրական անցնելով 15 կմ։ Իր դուրս գալուց քանի՞ օր հետո առաջին տուրիստը կհանդիպի երկրորդին։

334. Երկու քաղաքներից, որոնց հեռավորությունը 370 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ դուրս եկան երկու ավտոմեքենաներ։ Դրանցից մեկի արագությունը 4 կմ/ժ-ով փոքր է մյուսի արագությունից։ Գտնել յուրաքանչյուր ավտոմեքենայի արագությունը, եթե իրենց դուրս գալուց 4 ժ հետո դեռ 18 կմ մնում էր, որ հանդիպեն։

335. Բեռնատար մեքենան գյուղից քաղաք մեկնեց 32 կմ/ժ արագությամբ։ 45 ր հետո նրա ետևից մեկնեց մարդատար մեքենան՝ 42 կմ/ժ արագությամբ։ Իր դուրս գալուց որքան ժամանակ հետո մարդատար մեքենան կհասնի բեռնատարին։

336. Երկու վայրերից, որոնց հեռավորությունը 750 մ է, միաժամանակ միևնույն ուղղությամբ մեկնեցին երկու հեծանվորդներ։ Առաջինի արագությունը 15 կմ/ժ է, իսկ երկրորդինը՝ 12 կմ/ժ։ Որքա՞ն ժամանակ հետո առաջին հեծանվորդը կհասնի երկրորդին։

337. Առաջադրանքը ժամանակին կատարելու համար բանվորը պետք է օրական պատրաստեր 63 դետալ։ Ամեն օր նա պատրաստեց 17 դետալ ավելի, ուստի ժամկետից երկու օր առաջ նրան մնում էր պատրաստելու ընդամենը 24 դետալ։ Քանի՞ օր էր նախատեսված առաջադրանքը կատարելու համար։

338. Ինքնաթափերից մեկի բեռնատարողությունը 1,5 անգամ մեծ է մյուսի բեռնատարողությունից։ Քարածխի ամբողջ պաշարը պահեստից տեղափոխելու համար ինքնաթափերից յուրաքանչյուրը կատարեց 30 ուղերթ։ Յուրաքանչյուրը քանի՞ ուղերթում կարող էր տեղափոխել այդ քարածուխը, եթե աշխատեր մենակ։

339. Երկու մեքենագրուհիներ միասին տպեցին 78 էջ։ Առաջինն աշխատեց 4 ժ, իսկ երկրորդը՝ 6 ժ, ընդ որում առաջինը մեկ ժամում երկու էջ ավելի էր տպում, քան երկրորդը։ Քանի՞ էջ էր տպում յուրաքանչյուր մեքենագրուհին մեկ ժամում։

340. Երկու բանվորներ միասին աշխատելով կարող են առաջադրանքն ավարտել 12 ժ-ում։ Միայն առաջին բանվորից ամբողջ առաջադրանքը կատարելու համար կպահանջվեր 28 ժ։ Որքա՞ն ժամանակում

կարող էր կատարել այդ առաջադրանքը երկրորդ բանվորը, եթե աշխատեր մենակ։

§ 56. ԳԾԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Սահմանում: $y=ax+b$ բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ a-ն և b-ն թվեր են, իսկ x-ն ու y-ը՝ փոփոխականներ, կոչվում է գծային ֆունկցիա:

Եթե գծային ֆունկցիան նշանակենք f-ով, ապա այդ բանաձևը կարելի է գրել այսպիսի տեսքով՝ $f(x)=ax+b$ (տե՛ս § 41)։

Օրինակ 1: *Տրված է $y=2x-5$ գծային ֆունկցիան ($a=2$, $b=-5$)։ Գտնել y փոփոխականի այն արժեքները, որոնք համապատասխանում են x փոփոխականի հետևյալ արժեքներին. -3; 0; 1; $2{,}5$; 4; 5։*

Լուծում։ Սկզբնական հավասարման մեջ x փոփոխականի փոխարեն տեղադրենք իր արժեքները և հաշվենք y փոփոխականի համապատասխան արժեքները։ Օրինակ, $x=-3$ դեպքում $y=2\cdot(-3)-5=-11$։ Թվերի $(-3; -11)$ զույգը x և y փոփոխականների համապատասխան արժեքների զույգի օրինակ է (տես § 30, 37)։ Կազմենք x-ի և y-ի համապատասխան արժեքների աղյուսակը.

x	−3	0	1	2,5	4	5
y	−11	−5	−3	0	3	5

Եթե ֆունկցիայի սկզբնական բանաձևը գրենք $f(x)=2x-5$ տեսքով, ապա աղյուսակից երևում է, օրինակ, որ $f(-3)=-11$, $f(0)=-5$, $f(4)=3$ և այլն։

Քանի որ x փոփոխականի ցանկացած արժեքին համապատասխանում է y փոփոխականի միանգամայն որոշակի արժեք, ուստի գծային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր թվերի բազմությունն է:

Օրինակ 2: *Տրված է $y=-3x+6$ գծային ֆունկցիան ($a=-3$, $b=6$)։ x փոփոխականի ո՞ր արժեքների դեպքում է y փոփոխականը ընդունում հետևյալ արժեքները. 9, 6, 4, 0, -3, -6։*

Լուծում։ Ֆունկցիայի բանաձևում y փոփոխականի փոխարեն տեղադրենք իր արժեքները, այնուհետև լուծենք x փոփոխականով հավասարումը։ Դրանով իսկ կգտնենք x փոփոխականի այն արժեքները, որոնց համապատասխանում են y փոփոխականի տրված արժեքները։

Օրինակ, $y=9$ դեպքում՝ $-3x+6=9$, $x=-1$, իսկ $y=0$ դեպքում՝ $-3x+6=0$, $x=2$։ Թվերի $(-1; 9)$ և $(2; 0)$ զույգերը x և y փոփոխական-

ների համապատասխան արժեքների զույգերի օրինակներ են։ Կազմենք աղյուսակը.

x	−1	0	$\frac{2}{3}$	2	3	4
y	9	6	4	0	−3	−6

Եթե ֆունկցիայի բանաձևը գրենք $f(x)=-3x+6$ տեսքով, ապա աղյուսակը ցույց է տալիս, որ, օրինակ, $9=f(-1)$, $6=f(0)$, $4=f\left(\frac{2}{3}\right)$, $0=f(2)$ և այլն։

y փոփոխականի ամեն մի տրված արժեքի համար (որտեղ $y=ax+b$) կարելի է գտնել x փոփոխականի համապատասխան արժեք, եթե միայն $a\neq 0$։ Ուստի $a\neq 0$ դեպքում $y=ax+b$ **գծային ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը, ինչպես և որոշման տիրույթը, բոլոր թվերի բազմությունն է։**

Այժմ դիտարկենք գծային ֆունկցիայի երկու մասնավոր օրինակ։

1) Դիցուք $b=0$ $(a\neq 0)$։ $y=ax+b$ բանաձևն ընդունում է $y=ax$ տեսքը։ Սա ուղիղ համեմատականության բանաձևն է։

2) Դիցուք $a=0$։ $y=ax+b$ բանաձևն ընդունում է $y=0\cdot x+b$, այսինքն՝ $y=b$ տեսքը։ $y=b$ բանաձևով տրված ֆունկցիան կոչվում է **հաստատուն ֆունկցիա**։ x փոփոխականի ցանկացած արժեքի դեպքում y փոփոխականը ընդունում է միևնույն b արժեքը, այսինքն՝ հաստատուն արժեք։

Բերենք գծային ֆունկցիայի երկու օրինակ։

Մենք գիտենք, որ ուղղագիծ հավասարաչափ շարժման դեպքում, այսինքն այնպիսի շարժման դեպքում, որի արագությունը հաստատուն մեծություն է, անցած ճանապարհը և այն անցնելու համար ծախսված ժամանակն ուղիղ համեմատական են. $v=\frac{s}{t}$, $s=vt$։ Սակայն այդ ճիշտ է լոկ այն դեպքում, երբ ուղիղ գծով շարժվող մարմինը (օրինակ, մետաղե փոքրիկ գնդիկը), շարժումը սկսելու պահին $(t=0)$ գտնվել է ճիշտ և ճիշտ հաշվարկի սկզբնակետում $(s=0)$։

Դիցուք $t=0$ սկզբնական պահին մարմինը (գնդիկը) գտնվել է 0 սկզբնակետից $s_0=2$ մ հեռավորության վրա և դիցուք նրա արագությունն է $v=3\,\frac{մ}{վ}$։ $t=2$ վ պահին գնդիկն անցել է 6 մ և 0 կետից հեռացել է 8 մ։ Ընդհանրապես t վ-ում գնդիկը 3 մ/վ արագությամբ կանցնի $3t$ մ ճանապարհ, իսկ կոորդինատների սկզբնակետից կգտնվի $(3t+2)$ մ հեռավորության վրա։ Ուստի ստանում ենք $s=3t+2$ բանաձևը։

Այսպիսով, ուղղագիծ հավասարաչափ շարժման դեպքում ճանապարհը գծային ֆունկցիա է ժամանակից՝

$$s = s_0 + vt.$$

Որպես երկրորդ օրինակ դիտարկենք ջերմաստիճանային երկու սանդղակների՝ Ցելսիուսի (°C) և Ֆարենգեյթի (°F) ջերմաստիճանների միջև կապը։

Սառույցի հալման կետը Ցելսիուսի սանդղակում նշված է 0°C-ով, իսկ Ֆարենգեյթի սանդղակում՝ 32° F-ով։ Ջրի եռման կետը Ցելսիուսի սանդղակում նշված է 100°C-ով, իսկ Ֆարենգեյթի սանդղակում՝ 212°F-ով։

Այսպիսով, այս երկու կետերի միջև գտնվող հատվածը Ցելսիուսի սանդղակում բաժանված է 100 մասի, իսկ Ֆարենգեյթի սանդղակում՝ 180 մասի։ Ուստի 1°C-ին համապատասխանում է 1,8°F։

Եթե x-ով նշանակենք Ցելսիուսի աստիճաններով չափվող ջերմությունը, իսկ y-ով՝ Ֆարենգեյթի, ապա երկու ջերմաստիճանների միջև կապը կարտահայտվի

$$y = 1{,}8x + 32$$

գծային ֆունկցիայի տեսքով։

Բերենք այդ երկու ջերմաստիճանային սանդղակների որոշ համապատասխան արժեքների աղյուսակը.

°C	160	100	80	37	0	−10	−20	−40	−60
°F	320	212	176	98,6	32	14	−4	−40	−76

Վարժություններ

Լրացրեք աղյուսակը և արտագրեցեք x և y=f(x) փոփոխականների համապատասխան արժեքների զույգերը.

341. $f(x) = -2x + 3$

x	−2	−1	0	1,5	3	4
f(x)						

342. $f(x) = 2x - 3$

x						
f(x)	−7	−5	−3	0	3	5

343. *Լրացրեք աղյուսակը.*

s	t = 0	1	2	3	4
$3t+2$					
$3t-6$					
$-2t+4$					
$-2t-3$					

344. *Լրացրեք ջերմաստիճանային երկու սանդղակների համապատասխան արժեքների աղյուսակը.*

°C	150		−5	
°F		122		−58

§ 57. ԳԾԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿԸ

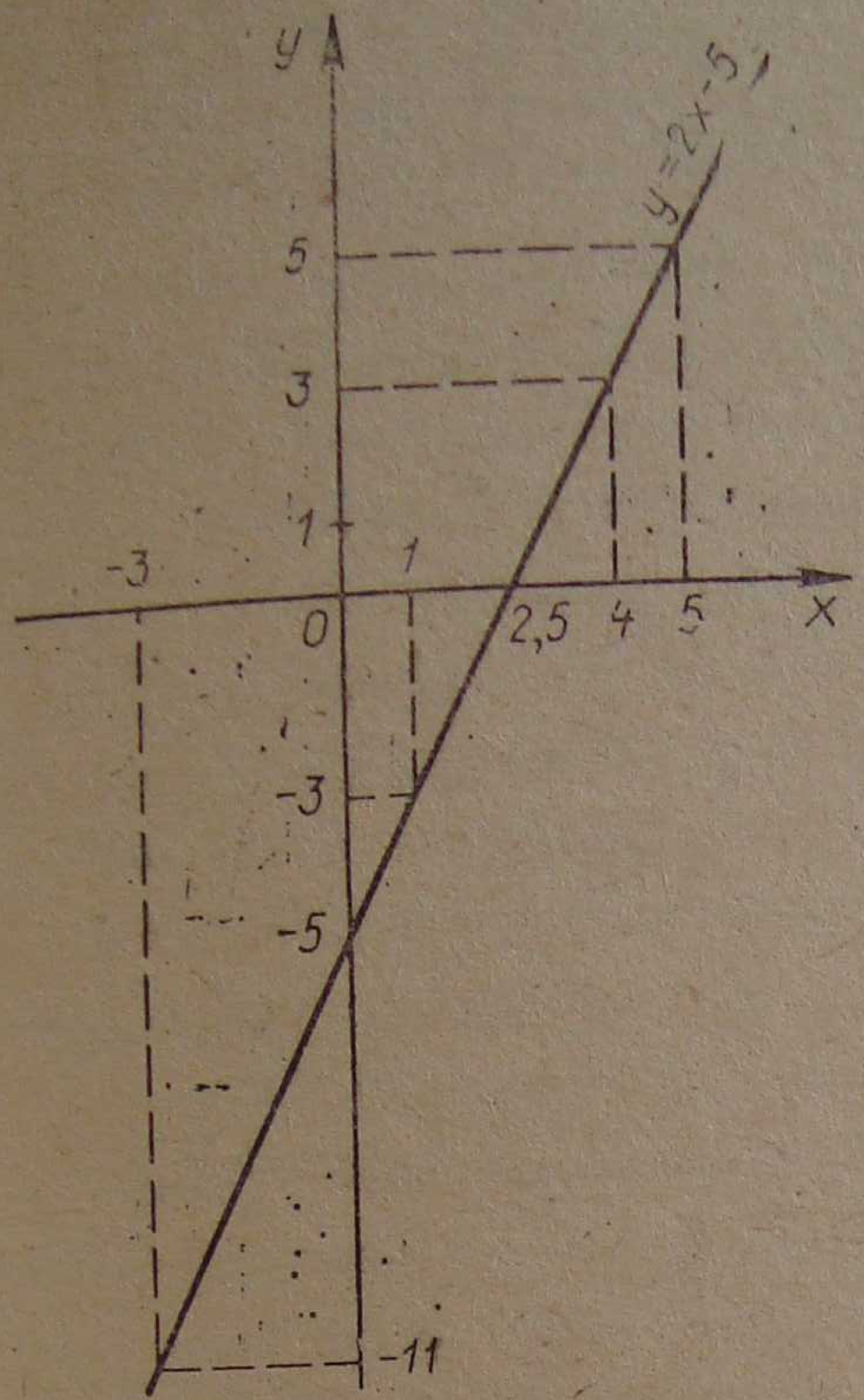
Անցնենք $y=ax+b$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցմանը: x փոփոխականին տանք մի քանի արժեքներ և հաշվենք y փոփոխականի համապատասխան արժեքները: x և y փոփոխականների համապատասխան արժեքների յուրաքանչյուր զույգ դիտարկենք որպես կոորդինատային հարթության կետի աբսցիս ու օրդինատ և կառուցենք բոլոր այդ կետերը:

Օրինակ 1: Կառուցել $y=2x-5$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (տես § 56-ի 1-ին օրինակը): Oxy հարթության վրա նշենք $(-3; -11)$, $(0; -5)$, $(1; -3)$, $(2{,}5; 0)$, $(4; 3)$, $(5; 5)$ կետերը:

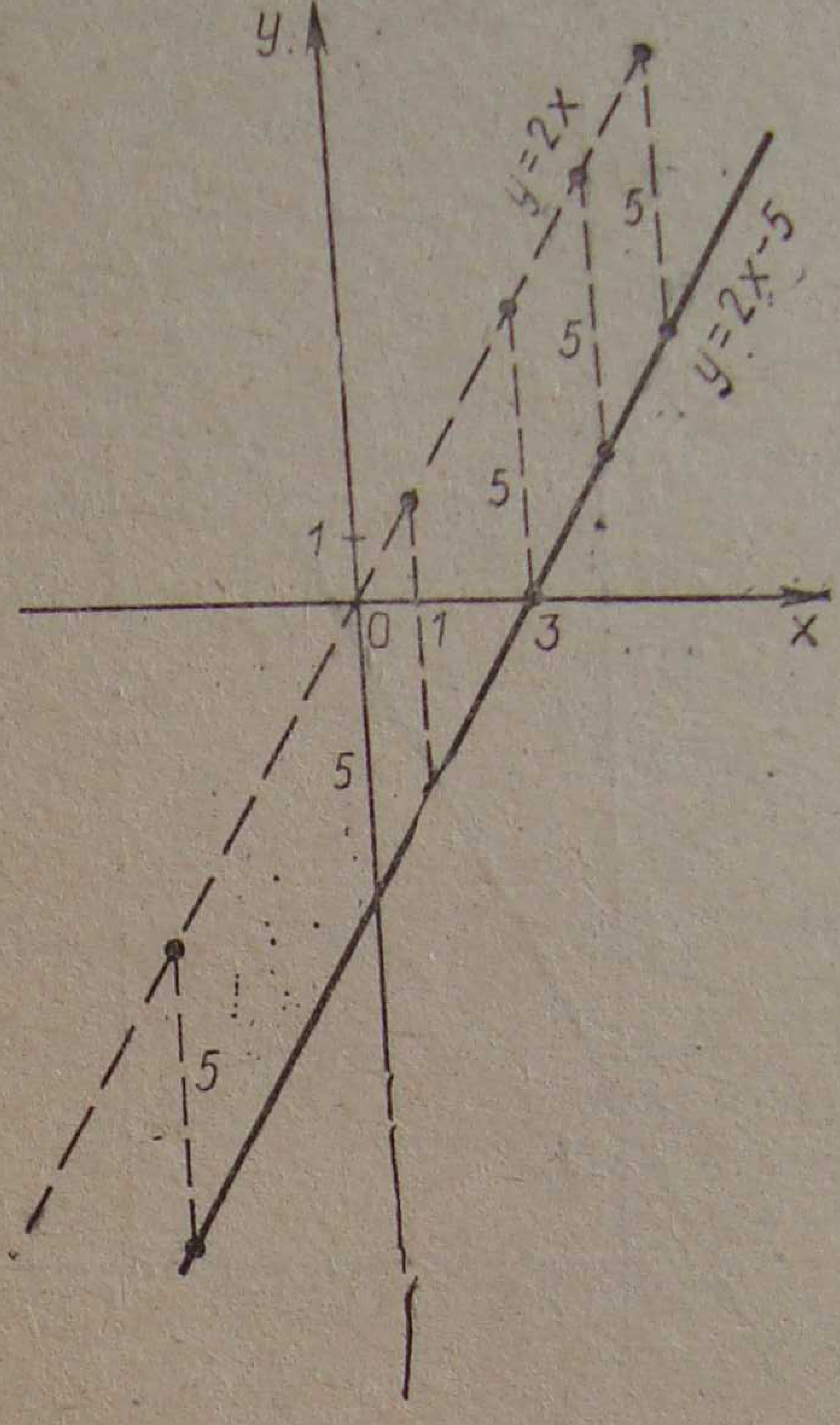
Կարելի է նկատել, որ բոլոր այդ կետերը պատկանում են միևնույն ուղղին: Այդ ուղիղը $y=2x-5$ ֆունկցիայի գրաֆիկն է (նկ. 76):

Կարելի է այլ կերպ կառուցել $y=2x-5$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Համեմատենք տրված ֆունկցիայի և $y=2x$ ֆունկցիայի փոփոխականների համապատասխան արժեքները: x փոփոխականի միևնույն արժեքի դեպքում $2x-5$ արտահայտության արժեքը $2x$ արտահայտության արժեքից փոքր է ուղիղ 5 միավորով: Այդ պատճառով կարելի է նախ կառուցել $y=2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, իսկ այնուհետև գրաֆիկի յուրաքանչյուր կետ ներքև իջեցնել 5 միավորով: Միացնելով բոլոր տեղաշարժված կետերը, կստանանք $y=2x-5$ ֆունկցիայի որոնելի գրաֆիկը (նկ. 77):

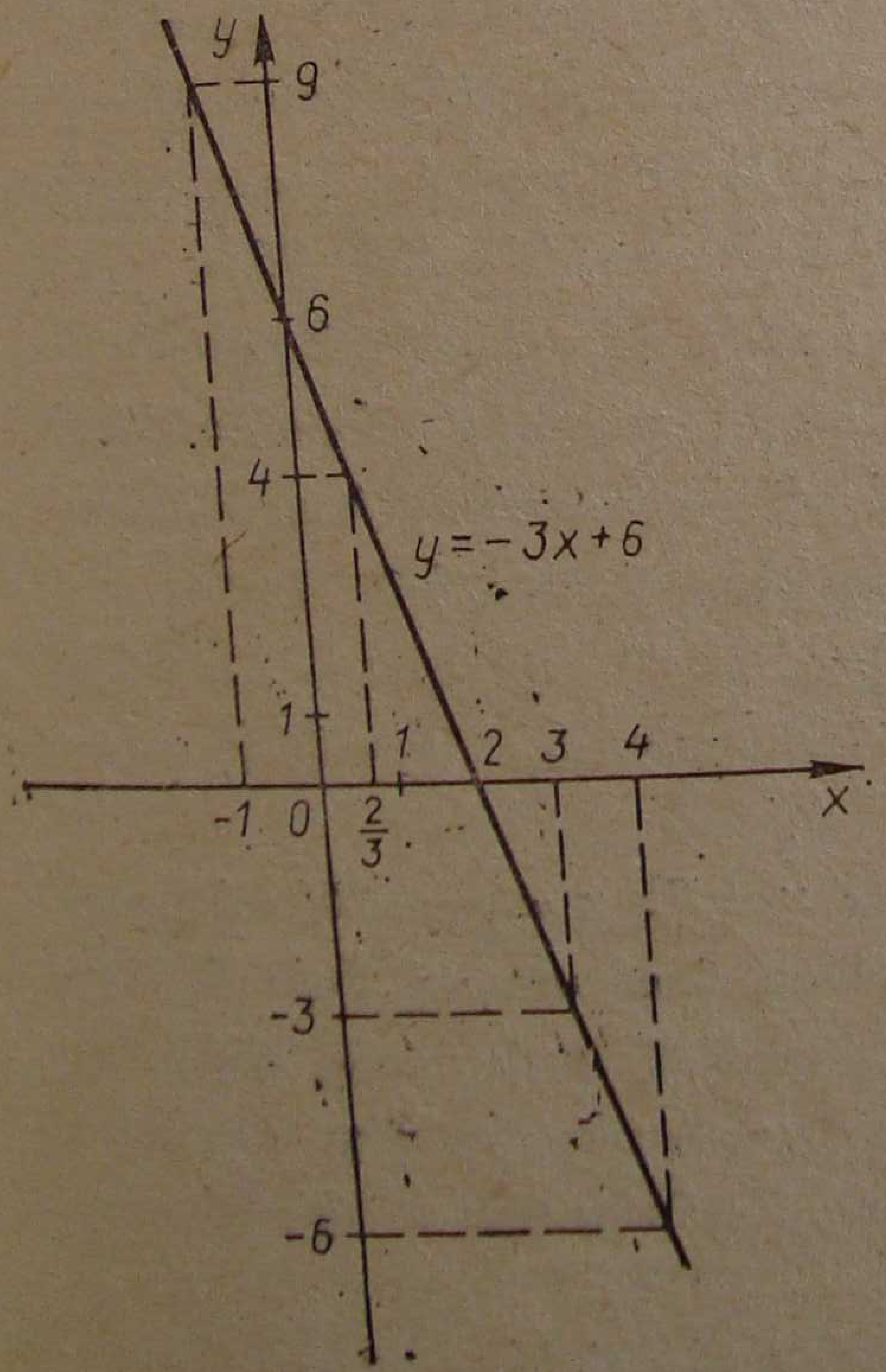
Օրինակ 2: Կառուցել $y=-3x+6$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:



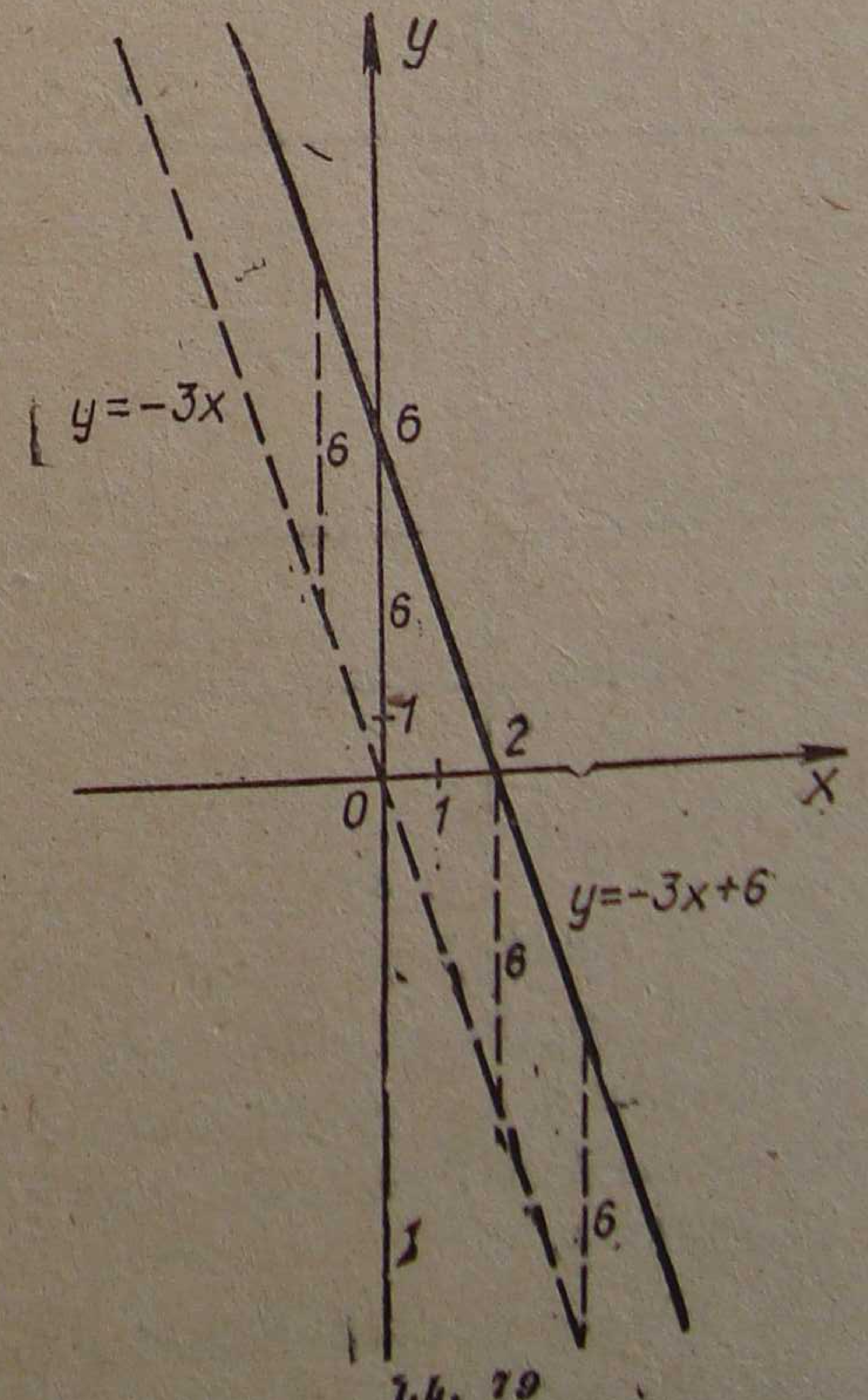
Նկ. 76



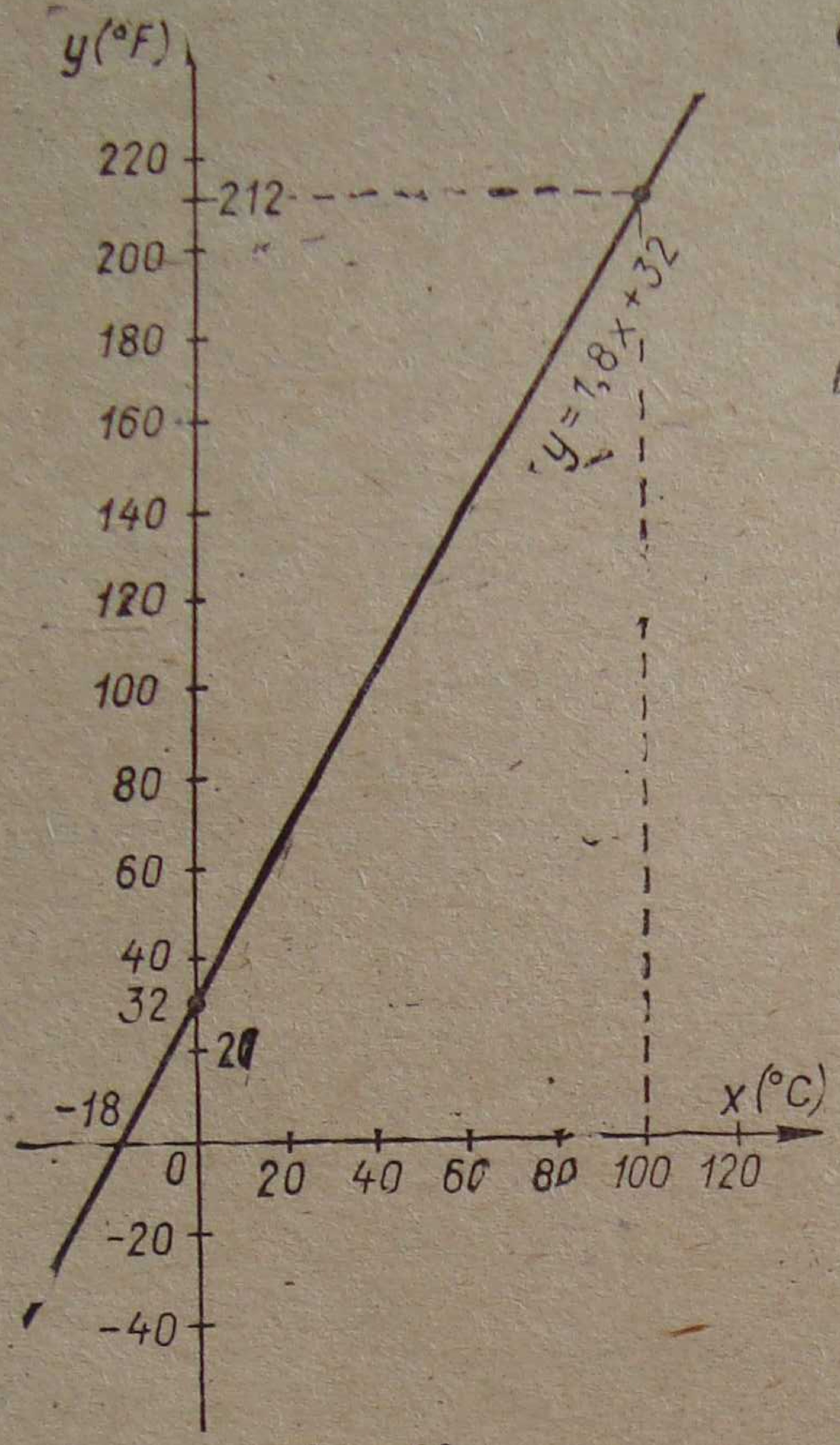
Նկ. 77



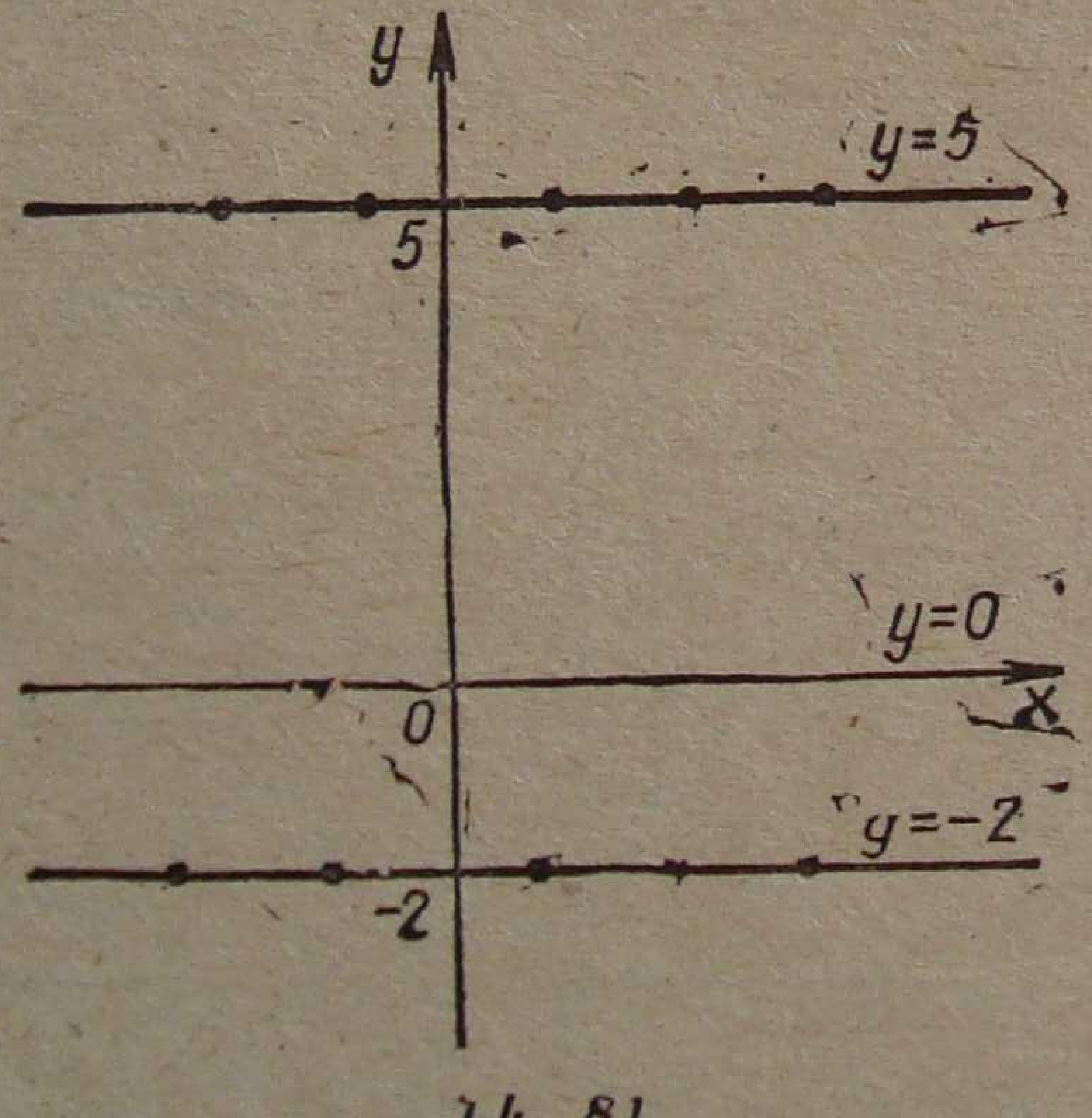
Նկ. 78



Նկ. 79



Նկ. 80



Նկ. 81

Oxy հարթության վրա նշենք $(-1;\ 9)$, $(0;\ 6)$, $(\frac{2}{3};\ 4)$, $(2;\ 0)$, $(3;\ -3)$, $(4;\ -6)$ կետերը (տես § 56-ի 2-րդ օրինակը)։ Դրանք պատկանում են միևնույն ուղղին՝ $y=-3x+6$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 78)։

Կարելի էր կառուցել օժանդակ գրաֆիկ՝ $y=-3x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և այնուհետև 6 միավորով վեր բարձրացնել նրա յուրաքանչյուր կետը։ Միացնելով բոլոր տեղաշարժված կետերը, դարձյալ կստանայինք $y=-3x+6$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 79)։

Նախորդ պարագրաֆում մենք արտածեցինք երկու ջերմաստիճանային սանդղակների միջև կապ հաստատող $y=1{,}8x+32$ բանաձևը, որտեղ x-ն արտահայտում է Ցելսիուսի աստիճաններով չափված ջերմությունը, իսկ y-ը՝ Ֆարենգեյթի։ Մենք նաև կազմեցինք x և y փոփոխականների մի քանի համապատասխան արժեքների զույգերի աղյուսակ։ Այժմ կարելի է կառուցել նաև ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 80)։

Այսպիսով, գծային ֆունկցիան կարելի է տալ տարբեր եղանակներով՝ բանաձևով, աղյուսակով և գրաֆիկով։

Դիտարկենք $y=ax+b$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $a=0$ դեպքում, այսինքն՝ $y=b$ հաստատունի գրաֆիկը (տես § 56)։

Դիցուք $y=5$։ x արգումենտի ցանկացած արժեքի դեպքում ֆունկցիայի արժեքը հավասար է 5-ի։ 5-ի հավասար օրդինատ ունեցող կետերը պատկանում են այն ուղիղ գծին, որը զուգահեռ է աբսցիսների Ox առանցքին և այդ առանցքից վեր է գտնվում մասշտաբի 5 միավորի չափով (նկ. 81). դա էլ հենց $y=5$ ֆունկցիայի գրաֆիկն է։

Դիցուք $y=-2$։ Դատելով հանգունորեն, գտնում ենք, որ այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը այն ուղիղն է, որը զուգահեռ է աբսցիսների Ox առանց-

քին և այդ առանցքից ներքև է գտնվում մասշտաբի 2 միավորի չափով (նկ. 81)։

Դիցուք $y=0$։ Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը համընկնում է $0x$ առանցքի հետ (նկ. 81)։

$y=ax+b$ ֆունկցիայի գրաֆիկը այնպիսի ուղիղ գիծ է, որը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին։

Մասնավորապես, $b=0$ դեպքում գրաֆիկն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, $a=0$ դեպքում գրաֆիկը զուգահեռ է աբսցիսների առանցքին, $a=b=0$ դեպքում համընկնում է աբսցիսների առանցքի հետ։

Վարժություններ

Կառուցենք հետևյալ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը.

345. ա) $y=3x+4$, բ) $y=7-2x$, գ) $y=3$, դ) $y=-5x$։

346. ա) $y=5x-2$, բ) $y=-5-x$, գ) $y=-2$, դ) $y=2x$։

347. ա) $3y=2x-6$, բ) $2y=-4x+5$։

348. ա) $2y=-5x-4$, բ) $3y=9x+5$։

349. Կոորդինատների միևնույն համակարգում կառուցեք հետևյալ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y=ax+2$, երբ $a=-2, -1, 0, 1, 2$,

բ) $y=-2x+b$, երբ $b=-3, -2, 0, 1, 3$։

350. $y=0{,}5x+b$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $A(2; 7)$ կետով։ Գտեք b-ի արժեքը և կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը։

351. $y=ax-3$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $M(-2; 1)$ կետով։ Գտեք a-ի արժեքը և կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը։

352. $y=-3x+7$ ֆունկցիայի գրաֆիկին պատկանո՞ւմ են արդյոք $A(-3; 1)$, $B(5; -4)$, $C(-1; 10)$ կետերը։

353. Առանց կառուցումներ կատարելու գտեք կոորդինատների առանցքների հետ $y=2x+3$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հատման կետերի կոորդինատները։

354. Ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով որոշեցեք x փոփոխականի այն արժեքների բազմությունը, որոնց դեպքում y փոփոխականը ընդունում է դրական (բացասական) արժեքներ, երբ.

ա) $y=-2x+4$, բ) $y=3x-6$։

Ինքնուրույն աշխատանք № 10

1. Խ ն դ ի ր ։ Ժամը 7-ին նավակայանից գետով դեպի ներքև շարժվեց լաստը, ժամը 12 անց 25 ր-ին նրա հետևից մեկնեց կատերը։ Նավակայանից ի՞նչ հեռավորության վրա կատերը կհասնի լաստին, եթե գետի հոսանքի արագությունը 3 կմ/ժ է, իսկ կատերի սեփական արագությունը (արագությունը կանգնած ջրում)՝ 13 կմ/ժ։

2. a փոփոխականի ո՞ր արժեքի դեպքում է $\frac{5-11a}{7}$ և $\frac{3a+22}{2}$ արտահայտությունների գումարը երկու անգամ մեծ $\frac{-2-5a}{3}$ արտահայտությունից։

3. Կառուցեք $y=-\frac{1}{3}x+2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Այդ գրաֆիկին պատկանո՞ւմ են արդյոք $A(9; -1)$, $B(-6; 4)$, $C(-2; 3)$ կետերը։

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ո՞ր տեսքի հավասարումն է կոչվում մեկ փոփոխականով գծային հավասարում։

2. Բացատրեցեք մեկ փոփոխականով գծային հավասարման լուծման պլանը։

3. Տրված խնդրի համար կազմվել է հավասարում և լուծվել։ Ինչպե՞ս է ստուգվում հավասարման արմատը և ինքը՝ խնդիրը։

4. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում գծային ֆունկցիա։ Ո՞րն է նրա որոշման տիրույթը։ Ո՞րն է նրա արժեքների տիրույթը։

5. Գծային ֆունկցիայի համար ի՞նչն է ծառայում որպես գրաֆիկ։

6. Գծային ֆունկցիայի ի՞նչ մասնավոր դեպքեր գիտեք։ Կոորդինատային հարթության վրա ինչպե՞ս են դասավորված դրանց գրաֆիկները։

Գլուխ VIII

ԱՄԲՈՂՋ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 58. ԲՆԱԿԱՆ ՑՈՒՑԻՉՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆ

Աստիճանի հասկացությանը մենք հանդիպել ենք բնական թիվը պարզ արտադրիչների վերլուծելու հարցն ուսումնասիրելիս (տե՛ս § 8), բացասական հիմք ունեցող աստիճանների արժեքները հաշվելիս (տե՛ս § 23)։

Հիշեցնենք բնական ցուցիչով աստիճանի սահմանումը և ապացուցենք հիմնական հատկությունները։ Դիցուք n*-ը բնական թիվ է՝* $n \in N$*, որտեղ* N*-ով, ինչպես միշտ, նշանակվում է բոլոր բնական թվերի բազմությունը։*

Սահմանում 1. **a-ի հավասար n արտադրիչների արտադրյալը կոչվում է a թվի n-րդ աստիճան։**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots a}_{n \text{ անգամ}} \quad (n > 1,\ n \in N)։$$

a *թիվը կոչվում է* **աստիճանի հիմք,** *իսկ* n*-ը՝* **աստիճանի ցուցիչ։**

Օրինակներ: $2^6 = 64$, $(-2)^6 = 64$, $5^3 = 125$, $(-5)^3 = -125$։

Մենք նշեցինք, որ $n > 1$*, քանի որ արտադրյալը չի կարող բաղկացած լինել մեկ արտադրիչից։ Բայց և այնպես, հարմար է մուծել այսպիսի սահմանում։*

Սահմանում 2. **a թվի առաջին աստիճան կոչվում է a թիվն ինքը.**

$$a^1 = a։$$

2-րդ սահմանումը ձևակերպելուց հետո աստիճանի հասկացությունը սահմանվում է արդեն բոլոր $n \in N$*-երի համար։*

Ապացուցենք բնական ցուցիչով աստիճանի հիմնական հատկությունները արտահայտող երեք թեորեմ։

Թեորեմ 1. **Միևնույն հիմքն ունեցող երկու աստիճանների արտադրյալը հավասար է նույն հիմքով այնպիսի աստիճանի, որի ցուցիչը հավասար է տրված աստիճանների գումարին:**

Ապացուցում։ Տրված են երկու աստիճաններ՝ a^m *և* a^n $(m, n \in N)$։

Ունենք.

$$a^m\cdot a^n=\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\ \text{անգամ}}\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\ \text{անգամ}}=\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{(m+n)\ \text{անգամ}}=a^{m+n}։$$

Այսպիսով, $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$։ (1)

Օրինակ։ $a^5\cdot a^4=(a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)(a\cdot a\cdot a\cdot a)=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^{5+4}=a^9$։

1-ին թեորեմը ճիշտ է նաև երեք աստիճանների արտադրյալի համար։ Դիցուք տրված են a^m, a^n, a^p *աստիճանները* ($m, n, p\in N$)։ *Ունենք՝* $a^m\cdot a^n\cdot a^p=(a^m\cdot a^n)\cdot a^p$։ *Համաձայն 1-ին թեորեմի, փակագծերի արտահայտությունը հավասար է* a^{m+n}*-ի, ուստի՝* $a^m\cdot a^n\cdot a^p=a^{m+n}\cdot a^p$։

Համաձայն նույն այդ թեորեմի, վերջին հավասարության աջ մասում գրված արտահայտությունը հավասար է $a^{(m+n)+p}$։ *Այսպիսով,*

$$a^m\cdot a^n\cdot a^p=a^{m+n+p}։$$

Դատելով հանգունորեն, կարելի է ցույց տալ, որ 1-ին թեորեմը ճիշտ է բնական ցուցիչով աստիճանների ցանկացած թվի համար։

Օրինակներ։ *1)* $3^5\cdot3^2\cdot3^6\cdot3\cdot3^3=3^{17}$, *2)* $x^4\cdot x\cdot x^6\cdot x^5\cdot x^2=x^{18}$։

1-ին թեորեմը կարելի է ձևակերպել և հետևյալ կերպ. նույն հիմքով աստիճանները բազմապատկելիս ցուցիչները գումարվում են, իսկ հիմքը մնում է նույնը։

Թեորեմ 2. Աստիճանի աստիճանը հավասար է նույն հիմքով այնպիսի աստիճանի, որի ցուցիչը հավասար է տրված աստիճանների ցուցիչների արտադրյալին։

Ապացուցում։ Տրված է $(a^m)^n$ *աստիճանը* ($m, n\in N$)։

Ունենք.

$$(a^m)^n=\overbrace{a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}^{n\ \text{անգամ}}=a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\ \text{անգամ}}}=a^{mn}։$$

Այսպիսով, $(a^m)^n=a^{mn}$։ (2)

Օրինակներ։ *1)* $(a^5)^4=a^5\cdot a^5\cdot a^5\cdot a^5=a^{4\cdot5}=a^{20}$։

2) $(7^4)^6=7^4\cdot7^4\cdot7^4\cdot7^4\cdot7^4\cdot7^4=7^{6\cdot4}=7^{24}$։

2-րդ թեորեմը կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ կերպ. աստիճանը բարձրացնելիս ցուցիչները բազմապատկվում են, իսկ հիմքը մնում է նույնը։

Թեորեմ 3. Երկու արտադրիչների արտադրյալի աստիճանը հավասար է արտադրիչների նույն ցուցիչով աստիճանների արտադրյալին։

Ապացուցում։ Տրված է $(ab)^n$ աստիճանը, $n \in N$։ Կիրառելով թվերի բազմապատկման տեղափոխական և զուգորդական օրենքները (տես § 31), կստանանք.

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ անգամ}} = \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ անգամ}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n \text{ անգամ}} = a^n\cdot b^n;$$

Այսպիսով, $(ab)^n = a^n b^n$։ (3)

Օրինակներ. $(5\cdot 7)^3 = 5^3\cdot 7^3$, $5^4\cdot 2^4 = (5\cdot 2)^4 = 10^4$։

3-րդ թեորեմը ճիշտ է նաև երեք արտադրիչների համար։ Դիցուք տրված է $(abc)^n$ աստիճանը, $n \in N$։

Ունենք.

$$(abc)^n = ((ab)\cdot c)^n = (ab)^n\cdot c^n = a^n\cdot b^n\cdot c^n.$$

Կարելի է դատել նաև այսպես.

$$(abc)^n = \underbrace{(abc)(abc)\cdots(abc)}_{n \text{ անգամ}} = \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ անգամ}}\underbrace{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n \text{ անգամ}}\underbrace{(c\cdot c\cdot\ldots\cdot c)}_{n \text{ անգամ}} = a^n b^n c^n.$$

Դատելով հանգունորեն, կարելի է ցույց տալ, որ 3-րդ թեորեմը ճիշտ է ցանկացած թվով արտադրիչների արտադրյալի աստիճանի համար։

3-րդ թեորեմը հարմար է ձևակերպել նաև այսպես. մի քանի արտադրիչների արտադրյալը աստիճան բարձրացնելիս կարելի է յուրաքանչյուր արտադրիչը բարձրացնել այդ նույն աստիճանը և ստացված աստիճանները բազմապատկել։

Վարժություններ

355. Աստիճանների արտադրյալը ներկայացրեք աստիճանի տեսքով.

ա) $4^3\cdot 4^5$, $8^3\cdot 8^5$, $(-9)^2\cdot(-9)^3\cdot(-9)^9$, $(-6)^4\cdot(-6)^4\cdot(-6)^2\cdot(-6)^6$, $(-10)^9\cdot(-10)^7\cdot(-10)^2$,

բ) $x^5\cdot x^3$, $y^4\cdot y^4$, $u^6\cdot u^3\cdot u^2$, $v^4\cdot v\cdot v^3$։

356. Պարզեցրեք արտահայտությունը (աստիճանը աստիճան բարձրացրեք).

ա) $(5^4)^3$, $(6^3)^5$, $(8^2)^7$, $(10^3)^3$, $(12^4)^6$,

բ) $(a^3)^5$, $(b^7)^2$, $(m^4)^4$, $(n^5)^6$, $(p^6)^5$։

357. Արտադրյալի աստիճանը ներկայացրեք աստիճանների արտադրյալի տեսքով.

ա) $(2\cdot7)^5$, $((-3)\cdot6)^4$, $((-5)\cdot9)^5$, $((-5)(-7))^6$, $((-6)\cdot(-9))^7$, $(4\cdot5\cdot13)^9$,

բ) $(mn)^4$, $(pq)^3$, $(klm)^5$, $(uvw)^6$,

358. *Նույն ցուցիչով աստիճանների արտադրյալը ներկայացրեք աստիճանի տեսքով.*

ա) $6^3\cdot12^3$, $(-5)^{10}\cdot(-3)^{10}$, $(-18)^7$, $(-3)^7$, $3^8\cdot(-5)^8$, $(-4)^5\cdot(-23)^5$, $(-7)^4\cdot(-11)^4\cdot13^4$,

բ) a^6b^6, c^7d^7, $p^3q^3r^3$, $m^5n^5p^5$,

§ 59. ԱՄԲՈՂՋ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ՄԻԱՆԴԱՄՆԵՐ

Սահմանում: Թվեր և փոփոխականներ պարունակող արտահայտությունը կոչվում է ամբողջ արտահայտություն, եթե փոփոխականների հետ կատարվում են միայն գումարման, հանման, բազմապատկման և բնական ցուցիչով աստիճան բարձրացման գործողություններ:

Ամբողջ արտահայտությունների օրինակներ. $2a-3b+8$, $2a^2b$, z, -1, $-\frac{x^2}{2}$, ax^2+bx+c, $(3x^2-4y^3)^2+(2x^2-5)^3+3$։

Ամբողջ չեն այնպիսի արտահայտությունները, ինչպիսիք են, օրինակ՝

$$\frac{2a-5b}{7a+3b},\quad \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \frac{1}{x},\quad \frac{5(x+y)}{3z^2}.$$

Ամբողջ արտահայտության պարզագույն օրինակներ են միանդամները։

Թվեր և փոփոխականներ պարունակող արտահայտությունը կոչվում է միանդամ, եթե փոփոխականների հետ կատարվում են միայն բազմապատկման և բնական ցուցիչով աստիճան բարձրացման գործողություններ։

Միանդամի օրինակներ՝

$$2x^2y^3,\quad -\frac{3}{8}a^2bca^3c^2,\quad 1,\quad y,\quad a^3.$$

Միանդամ չեն այնպիսի ամբողջ արտահայտությունները, ինչպիսիք են, օրինակ՝

$$5a+3b,\quad 3(2x-5y)^2,\quad a(b+c),\quad 5ab(a-2)+3ab.$$

Դիտարկենք

$$2x^2\cdot a\cdot(-3)\cdot y^2\cdot x^3\cdot a^2$$

միանդամը։

ա) $(2\cdot7)^5$, $((-3)\cdot6)^4$, $((-5)\cdot9)^5$, $((-5)(-7))^6$, $((-6)\cdot(-9))^7$, $(4\cdot5\cdot13)^9$,

բ) $(mn)^4$, $(pq)^3$, $(klm)^5$, $(uvw)^6$։

858. *Նույն ցուցիչով աստիճանների արտադրյալը ներկայացրեք աստիճանի տեսքով.*

ա) $6^3\cdot12^3$, $(-5)^{10}\cdot(-3)^{10}$, $(-18)^7\cdot(-3)^7$, $3^8\cdot(-5)^8$, $(-4)^5\cdot(-23)^5$, $(-7)^4\cdot(-11)^4\cdot13^4$,

բ) a^6b^6, c^7d^7, $p^3q^3r^3$, $m^5n^5p^5$։

§ 59. ԱՄԲՈՂՋ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ ՄԻԱՆԴԱՄՆԵՐ

Սահմանում։ Թվեր և փոփոխականներ պարունակող արտահայտությունը կոչվում է ամբողջ արտահայտություն, եթե փոփոխականների հետ կատարվում են միայն գումարման, հանման, բազմապատկման և բնական ցուցիչով աստիճան բարձրացման գործողություններ։

Ամբողջ արտահայտությունների օրինակներ. $2a-3b+8$, $2a^2b$, z, -1, $-\frac{x^2}{2}$, ax^2+bx+c, $(3x^2-4y^3)^2+(2x^2-5)^3+3$։

Ամբողջ չեն այնպիսի արտահայտությունները, ինչպիսիք են, օրինակ՝

$$\frac{2a-5b}{7a+3b},\quad \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \frac{1}{x},\quad \frac{5(x+y)}{3z^2}.$$

Ամբողջ արտահայտության պարզագույն օրինակներ են միանդամները։

Թվեր և փոփոխականներ պարունակող արտահայտությունը կոչվում է միանդամ, եթե փոփոխականների հետ կատարվում են միայն բազմապատկման և բնական ցուցիչով աստիճան բարձրացման գործողություններ։

Միանդամի օրինակներ՝

$$2x^2y^3,\quad -\frac{3}{8}a^2bca^3c^2,\quad 1,\quad y,\quad a^3.$$

Միանդամ չեն այնպիսի ամբողջ արտահայտությունները, ինչպիսիք են, օրինակ՝

$$5a+3b,\quad 3(2x-5y)^2,\quad a(b+c),\quad 5ab(a-2)+3ab.$$

Դիտարկենք

$$2x^2\cdot a\cdot(-3)\cdot y^2\cdot x^3\cdot a^3$$

միանդամը։

Օգտվելով բազմապատկման տեղափոխական օրենքից, արտադրիչները դասավորենք այնպես, որ առջևում լինեն թվային արտադրիչները, այնուհետև՝ փոփոխականները, գրված, օրինակ, այբբենական կարգով։ Կստանանք․

$$2 \cdot (-3) \cdot a \cdot a^2 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot y^2,$$

Կիրառելով բազմապատկման զուգորդական օրենքը, միևնույն հիմքերով աստիճանները խմբավորենք առանձին խմբերով, իսկ թվային արտադրիչները բազմապատկենք։ Կստանանք՝ $-6(aa^2)(x^2x^3)y^2$,

Փակագծերում գրված աստիճանների արտադրյալները ձևափոխենք աստիճանների։ Կստանանք՝ $-6a^3x^5y^2$,

Տրված միանդամի այսպիսի տեսքը կոչվում է նրա ստանդարտ տեսք։ -6 թվային արտադրիչը այդ միանդամի գործակիցն է։

Ստանդարտ տեսքով գրված միանդամի թվային արտադրիչը կոչվում է միանդամի գործակից։

1 գործակիցը չի գրվում, իսկ -1 գործակցի փոխարեն ձախից առաջին արտադրիչի առջևում գրվում է մինուս նշան։

Օ ր ի ն ա կ ն ե ր։ *Հետևյալ միանդամները բերել ստանդարտ տեսքի.*

1) $\frac{1}{3}a^2b \cdot 3b^2 = 1 \cdot a^2b^3 = a^2b^3$,

2) $\frac{2}{5}x \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)x^2y = -1 \cdot x^3y = -x^3y$,

3) $2a^2b^3c^4 \cdot 4ac = 8a^3b^3c^5$,

Այսպիսով, միանդամը ստանդարտ տեսքի բերելու համար անհրաժեշտ է այն գրել ձախից առաջին տեղում գտնվող թվային արտադրիչի և տարբեր փոփոխականների աստիճանների արտադրյալի տեսքով։

Երկու (կամ մի քանի) միանդամները կոչվում են նման միանդամներ, եթե նրանք տարբերվում են միայն գործակիցներով։ Միևնույն միանդամները նույնպես համարվում են նման։

Պարզելու համար, թե տրված միանդամները նման են, թե ոչ, կարելի է նախապես դրանցից յուրաքանչյուրը բերել ստանդարտ տեսքի։

$5a^2x^3$, $-a^2x^3$, $-3{,}2a^2x^3$, a^2x^3, $\frac{2}{7}a^2x^3$ *միանդամները նման են։*

Դրանց գործակիցներն են համապատասխանաբար՝ $5; -1; -3{,}2; 1; \frac{2}{7}$,

$3a^4b^2d^3$ *և* $5a^4b^2cd^3$ *միանդամները նման չեն, քանի որ դրանցից մեկում կա երեք տարբեր փոփոխական, իսկ մյուսում՝ չորս։* $3a^4b^2d^3$ *և* $5a^4b^3d^3$ *միանդամները նույնպես նման չեն, չնայած դրանցից յուրա-*

քանչյուրն ունի երեք փոփոխական, բայց b արտադրիչը մեկում կրկնվում է երկու անգամ, իսկ մյուսում՝ երեք անգամ։

Դիցուք տրված են երեք նման միանդամներ՝ $5x^2y$, $-7x^2y$ և $8x^2y$։ Կազմենք դրանց գումարը, այսինքն՝ միանդամները միացնենք գումարման նշանով.

$$5x^2y+(-7x^2y)+8x^2y։$$

Օգտվելով գումարման նկատմամբ բազմապատկման բաշխական օրենքից, ստացված գումարը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$(5+(-7)+8)x^2y։$$

Այլ կերպ ասած, մենք x^2y արտադրյալը փակագծից դուրս բերեցինք (տես § 33)։ Քանի որ $5+(-7)+8=6$, ուստի նախորդ արտահայտությունը ընդունում է $6x^2y$ տեսքը։ Այսպիսով, երեք նման միանդամների գումարը մենք ձևափոխեցինք գումարելիներին նման միանդամի.

$$5x^2y+(-7x^2y)+8x^2y=5x^2y-7x^2y+8x^2y=6x^2y։$$

Այսպիսի ձևափոխությունը կոչվում է նման անդամների միացում (տես § 34)։

Երբեմն նման միանդամների գումարը դառնում է ոչ թե գումարելիներին նման միանդամ, այլ զրո։ Բերենք օրինակ։

Կատարենք նման անդամների միացում.

$$4a^2(b^2)^3a^5+3a^4(ab^2)^3-7a^3(a^2b^3)^2=4a^2b^6a^5+3a^4a^3b^6-7a^3a^4b^6=$$

$$=4a^7b^6+3a^7b^6-7a^7b^6=(4+3-7)a^7b^6=0\cdot a^7b^6=0։$$

Վարժություններ

Պարզեցրեք արտահայտությունը (միանդամները բերեք ստանդարտ տեսքի և միացրեք)։

359. ա) $9a^4b^5-2b(a^2b^2)^2+3a^2b(ab^2)^2$,

բ) $3x^{11}y^{15}+(2x^5y^7)^2xy-5x(x^2y^3)^5$։

360. ա) $2n(m^8n^9)^2-(2m^5n^6)^3mn+11n^3(m^4n^4)^4$,

բ) $(5p^{10}q^9)^2-q^3(2p^4q^3)^5+4p^2(p^2q^2)^9$։

361. ա) $7a^9b^4+3a(a^4b^2)^2-5a(a^2b)^4$,

բ) $6x^{16}y^7-(2x^6y^2)^3xy+9y(x^8y^3)^2$։

362. ա) $m(2m^4n^9)^2-(3m^3n^6)^3+20m^4n^3(mn^3)^5$,

բ) $(2p^8q^9)^2-p(3p^5q^6)^3+27p^6q^3(pq^3)^5$։

§ 60. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ: ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԸ ԵՎ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամբողջ արտահայտությունների պարզագույն օրինակներ են միանդամները: Այլ օրինակներ են բազմանդամները:

Բազմանդամ է կոչվում միանդամների գումարը:

Բազմանդամը, որը պարունակում է երկու գումարելի, կոչվում է երկանդամ, երեք գումարելի՝ եռանդամ, չորս գումարելի՝ քառանդամ և այլն:

Գումարը չի կարող կազմված լինել մեկ գումարելիից, բայց և այնպես, հարմար է միանդամը համարել բազմանդամի մասնավոր դեպք (միայն մեկ անդամ պարունակող):

Բազմանդամների օրինակներ՝ 1) $4a^2-3bc^3$ *(երկանդամ), 2)* $3a^2x^3-\frac{2}{5}bx^2y+17$ *(եռանդամ):*

Դիցուք տրված է հետևյալ բազմանդամը.

$$8ab\cdot 2aba+3x^2(-5xy)-2a^2bab+2xy\cdot x^2:$$

Բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամը բերենք ստանդարտ տեսքի.

$$16a^3b^2-15x^3y-2a^3b^2+2x^3y:$$

Միացնելով նման անդամները, կստանանք՝

$$14a^3b^2-13x^3y:$$

Տրված բազմանդամի այսպիսի տեսքը կոչվում է նրա **ստանդարտ տեսք:**

Բազմանդամը ստանդարտ տեսքի բերելու համար անհրաժեշտ է նրա բոլոր անդամները բերել ստանդարտ տեսքի և կատարել նման անդամների միացում:

Դիցուք տրված է երկու բազմանդամ.

$$2abc-3ab^2c \text{ և } 5abc^2-2abc-7a^2bc:$$

Կազմենք դրանց գումարը.

$$(2abc+3ab^2c)+(5abc^2-2abc-7a^2bc):$$

Օգտվելով առջևում պլյուս նշան ունեցող փակագծերի բացման կանոնից (տես § 32), այդ գումարը ձևափոխենք բազմանդամի.

$$\underline{2abc}-3ab^2c+5abc^2-\underline{2abc}-7a^2bc:$$

Միացնելով նման անդամները, կստանանք.

$$(2abc-3ab^2c)+(5abc^2-2abc-7a^2bc)=-7a^2bc-3ab^2c+5abc^2:$$

Այժմ ձևափոխենք տրված նույն այդ երկու բազմանդամների տարբերությունը.

$$(2abc-3ab^2c)-(5abc^2-2abc-7a^2bc)։$$

Կիրառելով առջևում մինուս նշան ունեցող փակագծերի բացման կանոնը, այդ տարբերությունը ձևափոխենք բազմանդամի.

$$\underline{2abc}-3ab^2c-5abc^2+\underline{2abc}+7a^2bc։$$

Նման անդամները միացնելուց հետո կստանանք, $(2abc-3ab^2c)-$ $-(5abc^2-2abc-7a^2bc)=7a^2bc-3ab^2c-5abc^2+4abc։$

Թվային արտահայտությունների համանմանությամբ կարելի է ասել, որ մենք նախ կատարեցինք տրված երկու բազմանդամների գումարում, այնուհետև՝ հանում։ Բայց ըստ էության մենք նախ երկու բազմանդամների գումարը, այնուհետև տարբերությունը ձևափոխեցինք ստանդարտ տեսքի բազմանդամի։ Այդ ձևափոխությունը նույնական է. a, b, c փոփոխականների ցանկացած արժեքների դեպքում ստացված հավասարությունների աջ և ձախ մասերը ընդունում են միևնույն արժեքները (տես § 30)։

Օ ր ի ն ա կ։ *Բազմանդամների գումարը և տարբերությունը բերել ստանդարտ տեսքի բազմանդամի.*

$$(6a^2+5ab-3c^2)+(-4a^2+3bc-5b^2)-(-3b^2+4ac+7c^2)։$$

Բացելով փակագծերը և միացնելով նման անդամները, կստանանք.

$$(6a^2+5ab-3c^2)+(-4a^2+3bc-5b^2)-(-3b^2+4ac+7c^2)=$$
$$=6a^2+5ab-3c^2-4a^2+3bc-5b^2+3b^2-4ac-7c^2=$$
$$=2a^2-2b^2-10c^2+5ab-4ac+3bc։$$

Վարժություններ

Պարզեցրեք արտահայտությունները (բացեք փակագծերը և միացրեք նման անդամները).

363. *ա)* $5x-(7y-2xy-2x+3y-10y+5xy+7x)$,

բ) $2a^3-3a^2+(2a-5a^3-2a+3a^2+3a^3)$։

364. *ա)* $3xy-5y+(2x-7xy+5y+4xy-3x)$,

բ) $3x-5x^2+(7x^3-9x-7x^3+5x^2+6x)$։

Պարզեցրեք արտահայտությունները և հաշվեցեք դրանց արժեքները փոփոխականների տրված արժեքների դեպքում.

365. ա) $3ab^3+7ab^3-5ab^3+9ab^3-4ab^3$, երբ $a=-3$, $b=-2$,

բ) $3m^2-6m-9m+5m^2+8m-4m^2$, երբ $m=5$։

366. ա) $8x^5y-7x^5y+3x^5y-9x^5y,+11x^5y$, երբ $x=-1$, $y=-5$,

բ) $6k-5k^3-2k^3+12k+10k^3$, $-15k$, երբ $k=4$։

367. ա) $\frac{2}{3}x^2y-\frac{3}{4}xy-\frac{1}{2}xy-\frac{5}{6}x^2y+xy$, երբ $x=-4$, $y=6$,

բ) $1{,}27ax+2{,}55a^2-0{,}73ax-5a^2-2{,}81x^2+2{,}45a^2-$
$-0{,}54ax+1{,}81x^2$, երբ $a=0{,}12$, $x=0{,}3$։

368. ա) $1{,}4y-0{,}3xy-0{,}2x^2-0{,}5x^2-2{,}3xy$, երբ $x=3$, $y=-0{,}5$,

բ) $\frac{3}{4}a^2b-\frac{1}{2}ab^2-\frac{3}{8}a^2b-\frac{7}{8}ab^2+\frac{1}{2}ab^2$, երբ $a=4$, $b=-6$։

Բազմանդամների գումարը ձևափոխեցեք ստանդարտ տեսքի բազմանդամի.

369. ա) $(9x^4+5x^3y-7x^2y^2-xy^3)+(2x^3y+11x^2y^2+12xy^3-3y^4)$,

բ) $(5x^4-7ax^3+3a^2x^2-4a^3x)+(3x^4+2ax^3-5a^2x^2+11a^3x)+$
$+(4ax^3-8a^2x^2-7a^3x-3a^4)$։

370. ա) $(8a^5-3a^4+7a^3+14a^2)+(3a^5-12a^3+11a^2-6a)$,

բ) $(2{,}9x^3y^2+2{,}6x^2y^3-4{,}2xy^4-2{,}9y^5)+(3{,}7x^3y^2-2{,}6x^2y^3+$
$+5{,}7xy^4+9{,}2y^5)$։

Բազմանդամների տարբերությունը ձևափոխեցեք ստանդարտ տեսքի բազմանդամի.

371. ա) $(7a^5-3a^4b+6a^3-2ab^3-b^4)-(5a^5+5a^3+3ab^3-7b^4)$,

բ) $(12x^4+3x^2-2y^2-6x)-(7x^4-5x^2+3x-5y+2)$։

372. ա) $(4x^9-5x^8+3x^7y+2xy^3+y^5)-(8x^8-6x^7y-5xy^3+5y^5)$,

բ) $(0{,}6m^5-2{,}7m^4+3{,}2m^3-0{,}12m^2)-(3{,}2m^4+1{,}3m^3+$
$+2{,}6m^2-3{,}7m)$։

Լուծեցեք հավասարումը.

373. ա) $(2a-4)-(3+8a)=(a+3)-(4a-2)$,

բ) $(2m+7)-(5-3m)-(2+7m)+(5m-9)=0$։

374. ա) $(8t-19)+(3t-8)-(12-7t)-(9t+15)=0$,

բ) $(5-8x)-(4-2x)=(x-8)-(6x-1)$։

375. ա) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}y\right)=\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{2}-2y\right)$,

բ) $\left(2{,}5x-1\frac{1}{3}\right)-\left(3{,}25-\frac{1}{3}x\right)=8{,}625-(-1-x)$,

376. ա) $\left(0{,}3-\frac{7}{12}y\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}y\right)=5{,}8-\left(\frac{2}{3}y+\frac{3}{5}\right)$,

բ) $\left(\frac{9}{14}m+\frac{1}{36}\right)-\left(\frac{41}{42}m+\frac{7}{9}\right)=-\frac{11}{12}$։

Բազմանդամների գումարը կամ տարբերությունը ձևափոխեցեք ստանդարտ տեսքի բազմանդամի.

377. ա) $(3p-2q+1{,}2pq+6p^2)-(7q-2p^2+9{,}3pq-2{,}1p)+$ $+(1{,}3p^2+5q-2{,}8pq-6p)$,

բ) $(12x-7xy+7xy^2-5y)+(2xy-5xy^2+7y-9)-$ $-(11xy^2-12y+7-3x)$։

378. ա) $(8a-3b^2+a^2-5ab)+(16ab-2a^2+3a+2b^2)-$ $-(3a^2+5a-6b^2-3ab)$,

բ) $(4m^3-5m^2+3m-7)-(8m^4+3m^3+7m^2-5m)+$ $+(6m^3+12m^2-7m+12)$։

379. ա) $(13a^2b-6ab^2+3a^3-5b^3)+(-18ab^2-5a^2b-8a^3+3b^3)-$ $-(11ab^2+7a^2b-4a^3-b^3)$,

բ) $(2{,}6x^2y^3-1{,}7xy^2+3{,}5y^3-1{,}9)-(3{,}2+5{,}7y^3-2{,}8xy^2-$ $-3{,}1x^2y^3)-(1{,}6xy^2-3{,}7x^2y^3-2{,}3+5{,}6y^3)$։

380. ա) $(5xy^2-21x^3y+17x^2y-12xy^3)-(37x^2y-43x^3y-$ $-10xy^3-5xy^2)+(3xy^3-23x^3y+21x^2y-9xy^2)$,

բ) $(5{,}3a^3b-2{,}7ab^2+3{,}1a^2b^3-0{,}6)-(-2{,}1ab^2+3{,}6a^3b-$ $-2{,}8a^2b^3+6{,}3)-(3{,}7a^2b^3-1{,}9-1{,}3ab^2+0{,}7a^3b)$,

Լուծեցեք խնդիրները.

381. *Եռանկյան անկյուններից մեկի մեծությունը 45°-ով մեծ է մյուսի մեծությունից և 18°-ով փոքր՝ երրորդի մեծությունից։ Գտեք յուրաքանչյուր անկյան մեծությունը։*

382. *Եռանկյան կողմերից մեկի երկարությունը 38 սմ-ով փոքր է*

մյուսի երկարությունից և 45-սմ-ով մեծ՝ երրորդի երկարությունից։ Եռանկյան պարագիծը հավասար է 419 սմ-ի։ Գտեք յուրաքանչյուր կողմի երկարությունը։

383. Քառանկյան կողմերից մեկը 19 սմ-ով կարճ է մյուսից, 18 սմ-ով երկար՝ երրորդից և 2 անգամ կարճ՝ չորրորդից։ Գտեք քառանկյան կողմերի երկարությունները, եթե նրա պարագիծը հավասար է 336 սմ-ի։

384. Քառանկյան անկյուններից մեկի մեծությունը երեք անգամ փոքր է երկրորդի մեծությունից, երրորդ անկյան մեծությունը 39°-ով մեծ է երկրորդի մեծությունից և 38°-ով մեծ՝ չորրորդի մեծությունից։ Գտեք քառանկյան յուրաքանչյուր անկյան մեծությունը։

385. Չորս թվերի գումարը հավասար է 461,3-ի։ Այդ թվերից մեկը 41,6-ով մեծ է երկրորդից, 31,8-ով փոքր՝ երրորդից և 4 անգամ փոքր՝ չորրորդից։ Գտեք այդ թվերը։

386. Թվերից մեկը երեք անգամ փոքր է երկրորդից, 57,2-ով փոքր՝ երրորդից և 23,5-ով մեծ՝ չորրորդից։ Գտեք այդ թվերը, եթե դրանց գումարը հավասար է 275,2-ի։

387. Չորս թվերի գումարը հավասար է 40-ի։ Երկրորդ թիվը 2-ով մեծ է առաջինից, երրորդը 6-ով մեծ՝ երկրորդից, իսկ չորրորդը 18-ով մեծ՝ երրորդից։ Գտեք այդ թվերը։

388. Տրված է չորս թիվ. դրանցից երկրորդը 18-ով փոքր է առաջինից, երրորդը 6-ով փոքր՝ երկրորդից, իսկ չորրորդը 8-ով փոքր՝ երկրորդից։ Գտեք այդ թվերը, եթե դրանց գումարը հավասար է 40-ի։

389. Առաջին դարակում գրքերը 5 անգամ շատ են, քան երկրորդում։ Երրորդ դարակում գրքերը 27-ով քիչ են, քան առաջինում, իսկ չորրորդում՝ 31-ով շատ, քան առաջինում։ Քանի՞ գիրք կա յուրաքանչյուր դարակում, եթե կա ընդամենը 340 գիրք։

390. Չորս ավանում ապրում է ընդամենը 2180 բնակիչ։ Երկրորդ ավանի բնակիչները 3 անգամ շատ են առաջինից։ Երրորդ ավանում 108 բնակիչ ավելի է, քան երկրորդում, իսկ չորրորդում՝ 78 բնակիչ պակաս, քան երկրորդում։ Քանի՞ բնակիչ ունի յուրաքանչյուր ավանը։

391. 274 մ երկարությամբ հաղորդալարը կտրեցին չորս մասի այնպես, որ առաջին մասը չորս անգամ երկար ստացվեց երկրորդից, երրորդը՝ 17 մ-ով կարճ առաջինից, իսկ չորրորդը՝ 35 մ-ով երկար երրորդից։ Գտեք յուրաքանչյուր մասի երկարությունը։

392. 772 մ երկարությամբ ճոպանը կտրեցին չորս մասի այնպես, որ երկրորդ մասը 6 անգամ երկար ստացվեց առաջինից, երրորդը՝ 83 մ-ով երկար երկրորդից, իսկ չորրորդը՝ 97 մ-ով կարճ երրորդից։ Գտեք յուրաքանչյուր մասի երկարությունը։

Ինքնուրույն աշխատանք № 11

1. Խնդիր: *Բանվորն առաջին օրը նորմայից պակաս պատրաստեց 16 դետալ, իսկ երկրորդ օրը՝ 8 դետալ ավելի, քան առաջին օրը։ Երրորդ և չորրորդ օրերին նա նորմայից ավելի պատրաստեց համապատասխանաբար 17 և 29 դետալ։ Որքա՞ն է բանվորի օրական նորման, եթե նա առաջին օրը 884 դետալ պակաս պատրաստեց, քան հաջորդ երեք օրերում։*

2. Գտեք արտահայտության արժեքը.

$$5a^4b^5-(2a^2)^2b^5+7(ab)^4b-6b(a^2b^2)^2, \text{ երբ } a=2,\ b=-1,$$

§ 61. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ

Տրված է երկու միանդամ՝ $3a^2bc^4$ *և* $5ab^3$*։ Դրանց արտադրյալը հավասար է* $3a^2bc^4\cdot 5ab^3$*։ Սա հենց միանդամ է, որը ստանդարտ տեսքի բերելուց հետո կստանանք.*

$$3a^2bc^4\cdot 5ab^3=15a^3b^4c^4,$$

*Այսպիսով, **երկու միանդամների արտադրյալը** կարելի է ձևափոխել ստանդարտ տեսքի միանդամի։ Նույն բանը վերաբերում է նաև մեծ թվով միանդամների արտադրյալին։*

Դիտարկենք միանդամի և երկանդամի

$$2a^3b^2(5ac^2+3b^2)$$

արտադրյալը։

Կիրառելով գումարման նկատմամբ բազմապատկման բաշխական օրենքը, տրված արտադրյալը նախ ներկայացնենք երկանդամի տեսքով, իսկ այնուհետև բերենք ստանդարտ տեսքի.

$$2a^3b^2(5ac^2+3b^2)=2a^3b^2\cdot 5ac^2+2a^3b^2\cdot 3b^2=10a^4b^2c^2+6a^3b^4,$$

*Այսպիսով, **միանդամի և երկանդամի արտադրյալը** մենք ներկայացրինք ստանդարտ տեսքի երկանդամի ձևով։*

Դիցուք տրված է միանդամի և եռանդամի

$$3x^4y^3(2x^2y^3+5y^4-4x^3)$$

արտադրյալը։ Դատելով հանգունորեն, կստանանք.

$$3x^4y^3(2x^2y^3+5y^4-4x^3)=3x^4y^3\cdot 2x^2y^3+3x^4y^3\cdot 5y^4+3x^4y^3\cdot(-4x^3)=$$
$$=6x^6y^6+15x^4y^7-12x^7y^3,$$

*Այսպիսով, **միանդամի և եռանդամի արտադրյալը** մենք ներկայացրինք ստանդարտ տեսքի եռանդամի ձևով։*

1. Խնդիր: *Բանվորն առաջին օրը նորմայից պակաս պատրաստեց 16 դետալ, իսկ երկրորդ օրը՝ 8 դետալ ավելի, քան առաջին օրը։ Երրորդ և չորրորդ օրերին նա նորմայից ավելի պատրաստեց համապատասխանաբար 17 և 29 դետալ։ Որքա՞ն է բանվորի օրական նորման, եթե նա առաջին օրը 884 դետալ պակաս պատրաստեց, քան հաջորդ երեք օրերում։*

2. Գտեք արտահայտության արժեքը.

$$5a^4b^5-(2a^2)^2b^5+7(ab)^4b-6b(a^2b^2)^2, \text{ *երբ* } a=2, \ b=-1,$$

§ 61. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ

Տրված է երկու միանդամ՝ $3a^2bc^4$ և $5ab^3$։ Դրանց արտադրյալը հավասար է $3a^2bc^4 \cdot 5ab^3$։ Սա հենց միանդամ է, որը ստանդարտ տեսքի բերելուց հետո կստանանք.

$$3a^2bc^4 \cdot 5ab^3=15a^3b^4c^4,$$

Այսպիսով, **երկու միանդամների արտադրյալը** *կարելի է ձևափոխել ստանդարտ տեսքի միանդամի։ Նույն բանը վերաբերում է նաև մեծ թվով միանդամների արտադրյալին։*

Դիտարկենք միանդամի և երկանդամի

$$2a^3b^2(5ac^2+3b^2)$$

արտադրյալը։

Կիրառելով գումարման նկատմամբ բազմապատկման բաշխական օրենքը, տրված արտադրյալը նախ ներկայացնենք երկանդամի տեսքով, իսկ այնուհետև բերենք ստանդարտ տեսքի.

$$2a^3b^2(5ac^2+3b^2)=2a^3b^2 \cdot 5ac^2+2a^3b^2 \cdot 3b^2=10a^4b^2c^2+6a^3b^4,$$

Այսպիսով, **միանդամի և երկանդամի արտադրյալը** *մենք ներկայացրինք ստանդարտ տեսքի երկանդամի ձևով։*

Դիցուք տրված է միանդամի և եռանդամի

$$3x^4y^3(2x^2y^3+5y^4-4x^3)$$

արտադրյալը։ Գործելով հանգունորեն, կստանանք.

$$3x^4y^3(2x^2y^3+5y^4-4x^3)=3x^4y^3 \cdot 2x^2y^3+3x^4y^3 \cdot 5y^4+3x^4y^3 \cdot (-4x^3)=$$
$$=6x^6y^6+15x^4y^7-12x^7y^3,$$

Այսպիսով, **միանդամի և եռանդամի արտադրյալը** *մենք ներկայացրինք ստանդարտ տեսքի եռանդամի ձևով։*

Միանդամի և բազմանդամի արտադրյալը հավասար է միանդամի և բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամի արտադրյալների գումարին:

Դիցուք տրված է երկու երկանդամների

$$(3x^2-2y)(5x+4y^3)$$

արտադրյալը:

Այս արտադրյալը ձևափոխենք բազմանդամի: Մտցնենք նոր փոփոխական. արտադրիչներից մեկը, օրինակ՝ երկրորդը, նշանակենք c տառով: Արտադրյալը կընդունի $(3x^2-2y)\cdot c$ տեսքը, այդ դեպքում՝

$$(3x^2-2y)c=3x^2c-2yc:$$

c փոփոխականի փոխարեն տեղադրենք երկրորդ արտադրիչը.

$$3x^2(5x+4y^3)-2y(5x+4y^3)=15x^3+12x^2y^3-10xy-8y^4,$$

այսինքն՝ $(3x^2-2y)(5x+4y^3)=15x^3+12x^2y^3-10xy-8y^4$:

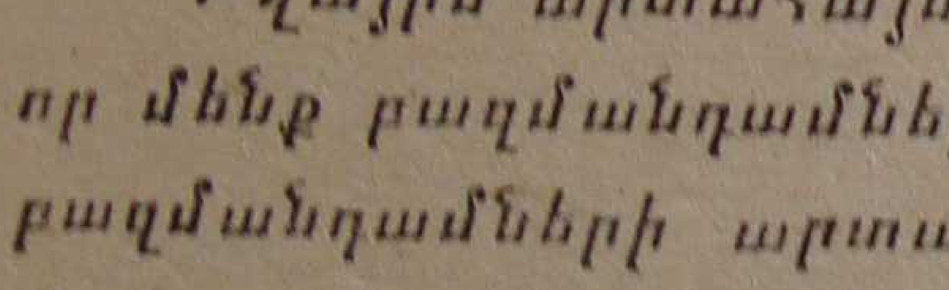
Այսպիսով, երկու երկանդամների արտադրյալը մենք ձևափոխեցինք ստանդարտ տեսքի բազմանդամի:

Երկու բազմանդամների արտադրյալը հավասար է առաջին բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամի և երկրորդ բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամի արտադրյալների գումարին:

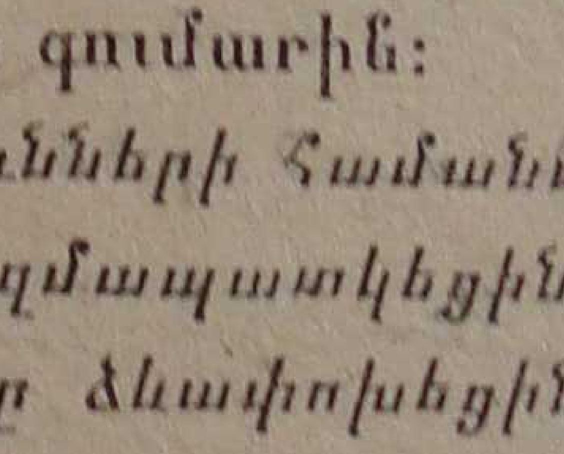
Թվային արտահայտությունների համանմանությամբ կարելի է ասել, որ մենք բազմանդամները բազմապատկեցինք: Բայց ըստ էության մենք բազմանդամների արտադրյալը ձևափոխեցինք ստանդարտ տեսքի բազմանդամի. դա նույնական ձևափոխություն է:

Ենթադրենք, թե a, b, c, m, n, p փոփոխականները ընդունում են միայն դրական արժեքներ: Այդ դեպքում դրանք կարող են արտահայտել որոշ հատվածների երկարություններ: Միանդամի և բազմանդամի արտադրյալը կամ բազմանդամների արտադրյալը բազմանդամի ձևափոխելու կանոնները կարող են ներկայացվել պարզ նկարներով, եթե հիշենք, որ ուղղանկյան մակերեսը հավասար է հիմքի երկարության և բարձրության արտադրյալին:

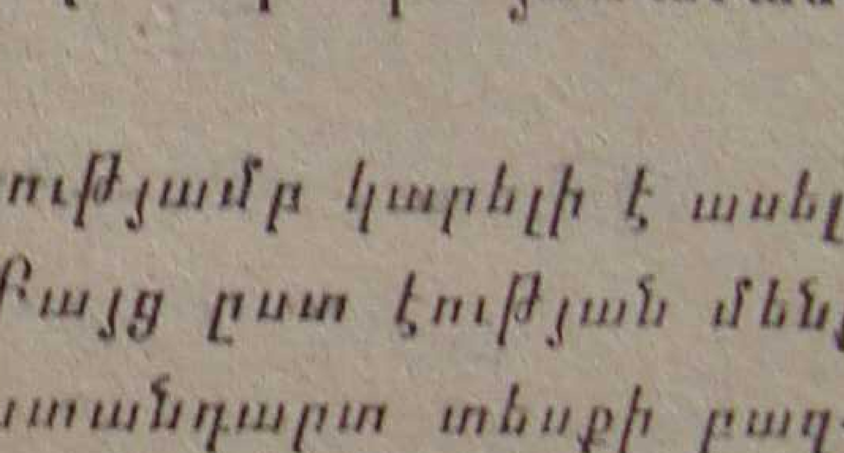
Այսպես, 82—84-րդ նկարներում ներկայացված են հետևյալ նույնությունները.



Նկ. 82



Նկ. 83



Նկ. 84

$(a+b+c)m=am+bm+cm,$

$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn,$

$(a+b+c)(m+n)=am+an+bm+bn+cm+cn։$

Վարժություններ

Արտահայտությունը ձևափոխեցեք ստանդարտ տեսքի բազմանդամի.

393. ա) $3(a-7)$, բ) $5m(2m+11)$,

394. ա) $5(b+3)$, բ) $3k(k-9)$։

395. ա) $x^2(5-6x^3)$, բ) $x^5(4x^5-6x^3+5x-1)$,

396. ա) $a^2(a^4+7)$, բ) $x^7(-2x^3+3x^2-7x+5)$,

Լուծեցեք հավասարումը.

397. ա) $a(a-5)=a(a+3)-64$,

բ) $3x(x+2)=x(2+3x)-20$,

գ) $y(2y-7)+3=6-2y(5-y)$,

դ) $b(5+2b)-2b(b+3)=2$,

398. ա) $x(2x-3)=2x(x+2)+14$,

բ) $5b(2-b)+b(5b-3)+14=0$,

գ) $a(a+7)=a(a-2)+27$,

դ) $8y(y-5)=y(25+8y)-325$։

Բազմանդամի և միանդամի արտադրյալը ձևափոխեցեք ստանդարտ տեսքի բազմանդամի.

399. ա) $(a+3)2ab$, գ) $(3x-7)5xy$,

բ) $(3x+5y)7xy^2$, դ) $(4a+5b)3a^3b$,

400. ա) $(7a^9+4a^7-6a^5+a^3)\cdot 2ab^2$,

բ) $(6a^2b^2-3a^3b^3+5a^4b^7)(-ab^5)$,

գ) $(12x^4-3x^3+5x^2-4)\cdot 2x^3y$,

դ) $(3a^4b-2a^3b^2+7ab^5)\cdot(-a^3b)$,

Լուծեցեք հավասարումը.

401. ա) $x(x-7)=x(x+2)-27$,

բ) $3z(2z-3)+2z(5z-3)=4z(4z-5)-25$,

գ) $10y(y+2)-2y(5y-3)=8(3y+8)-84$,

դ) $10a(a-2)+5a(5-2a)-90=0$։

402. ա) $z(z-7)+z(2z-3)=z(3z-5)+50$,

բ) $x(x+3)=x(x-3)-12$,

գ) $2y(4y+7)-y(8y+3)=66$,

դ) $5a(2a+3)+2a(7-5a)-87=0$,

403. ա) $y(4y-5)+15=4y(y+3)+5(2y+3)$,

բ) $3x(x-2)+8x=x(3x+2)-5$,

գ) $a(5a-2)+26=5a(a-3)+13(a+2)$,

դ) $2(3m-2)=3m(2m+5)+2m(5-3m)+91$,

Բազմանդամների արտադրյալը ձևափոխեցեք ստանդարտ տեսքի բազմանդամի.

404. ա) $(a+b)\ b+c)$, բ) $(a-2b)(a+3c)$,

405. ա) $(1-a)(b-c)$, բ) $(a-b)(1-c)$,

406. ա) $(4z^5-3)(6z^2+5)$, բ) $(9+3x-x^2)(x-7)$։

407. ա) $(4x^3+7)(2x^3-9)$, բ) $(y^2+2y+4)(2-y)$,

408. ա) $(9x^2-15x+25)(3x+5)$, բ) $(12a^7-11)(3-2a^7)$,

409. ա) $(3y^5-8y^9)(8y^9+3y^5)$, բ) $(25p^2+30p+36)(5p-6)$,

410. ա) $(4b^2+6ab+9b^2)(2a-3b)$,

բ) $(9x^2-6xy+4y^2)(3x+2y)$։

411. ա) $(9x^2+16y^2+12xy)(3x-4y)$,

բ) $(25a^2+4b^2-10ab)(5a+2b)$։

412. ա) $(8x^4+3x^3-9x^2+5x-1)(x+3)$,

բ) $(4m+3m^2+5m^3-2m^4)(6-5m^2)$,

գ) $(3a^3-5^2b+7ab^2-2b^3)(3a-2b)$,

դ) $(0,04x^2-0,02x+0,01)(0,2x+0,1)$։

413. ա) $(0,16+0,12a+0,09a^2)(0,4-0,3a)$,

բ) $(5x^4+2x^3-9x^2+2x+7)(2-x)$,

գ) $(4x^3-5x^2y+3xy^2-y^3)(2x+7y)$,

դ) $(2a^2-3a^4+6a^6-7a^8)(2a^2-5)$,

Ապացուցեք, որ հետևյալ արտահայտությունների արժեքները կախված չեն փոփոխականների արժեքներից.

414. *ա)* $(m+7)(m-7)-(m+3)(m-3)$,

բ) $(b-9)(9+b)+(8-b)(b+8)$,

415. *ա)* $(a-2)(a+2)+(5-a)(a+5)$,

բ) $(x+11)(11-x)-(4-x)(x+4)$,

Լուծեցեք հավասարումը.

416. *ա)* $(3y-7)(y-1)=(5+y)(3y-14)$,

բ) $(m+33)(12+m)=(m+17)(18+m)$,

գ) $(b+15)(4-b)=(8+b)(5-b)$,

դ) $(21+a)(6-a)=(11-a)(6+a)$,

417. *ա)* $(20-x)(x-6)=(x-8)(24-x)$,

բ) $(25+z)(z+13)=(z+19)(15+z)$,

գ) $(6a+57)(a+10)=(2a+23)(3a+26)$,

դ) $(b+5)(b+4)=(b-1)(20+b)$,

418. *ա)* $(k+65)(1-k)=(7-k)(17+k)$,

բ) $(24-y)(3-y)=(8-y)(9-y)$,

գ) $(2x+12)(12x-15)=(4x+3)(6x-4)$,

դ) $(12+q)(2-q)=(4-q)(q+10)$,

§ 62. ԳՈՒՄԱՐԻ ՔԱՌԱԿՈՒՍՈՒ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ԳՈՒՄԱՐԻ

Դիտարկենք երկու գումարելիների գումարի քառակուսին:

Ունենք. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$,

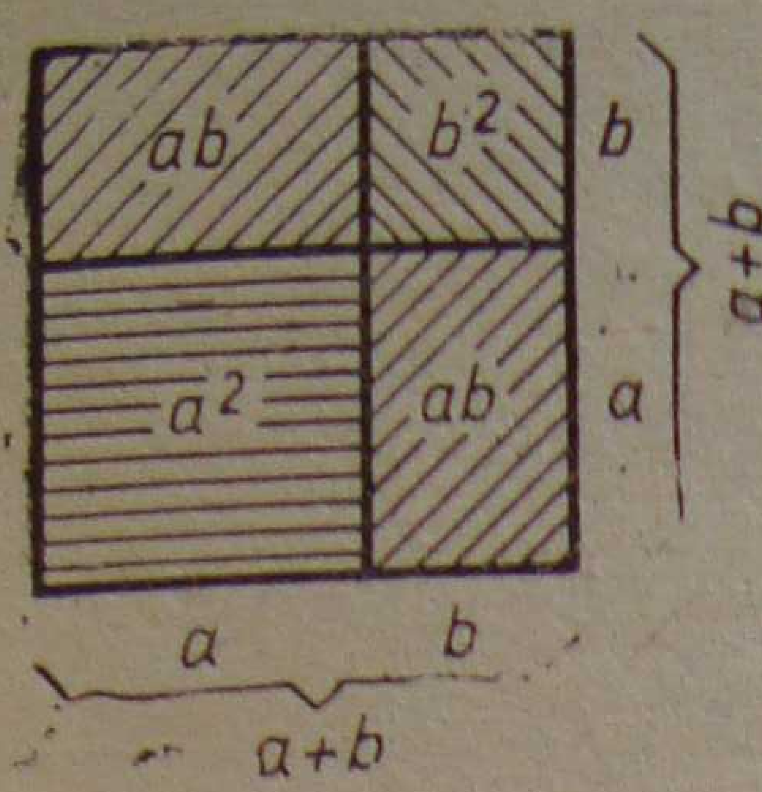
Այսպիսով, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

Եվ այսպես, երկու գումարելիների գումարի քառակուսին հավասար է առաջին գումարելիի քառակուսու, այդ գումարելիների կրկնապատիկ արտադրյալի և երրորդ գումարելիի քառակուսու գումարին:

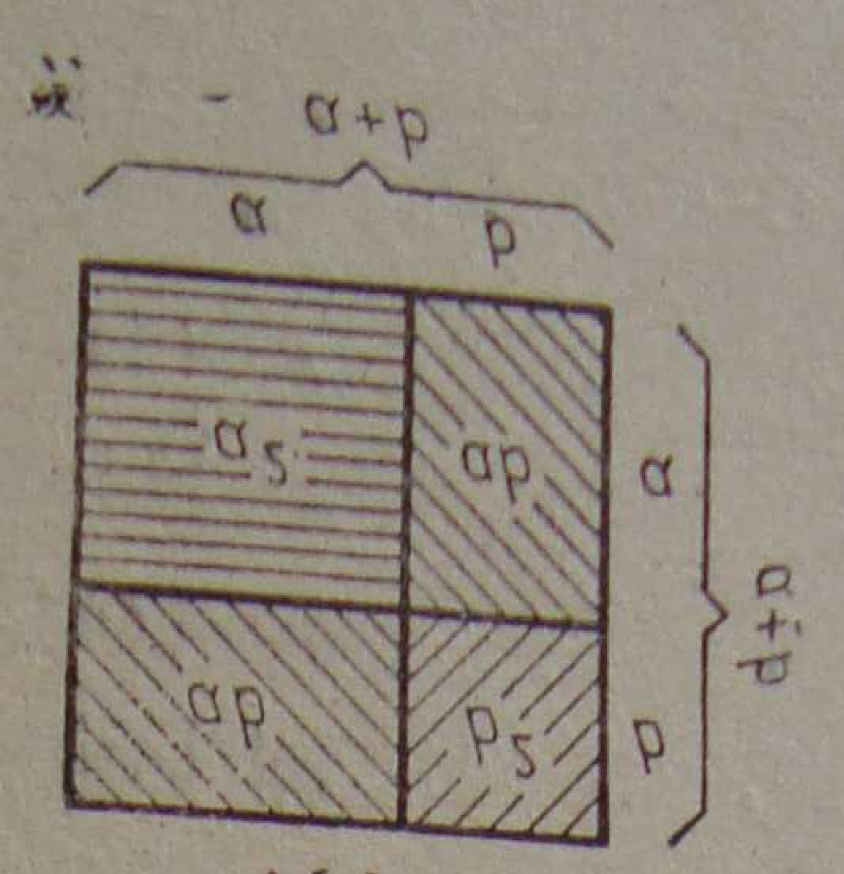
Համանման ձևով ստացվում է տարբերության քառակուսու համար: Քանի որ $a-b=a+(-b)$, *ապա* $(a-b)^2=(a+(-b))^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2$,

Այսպիսով, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,

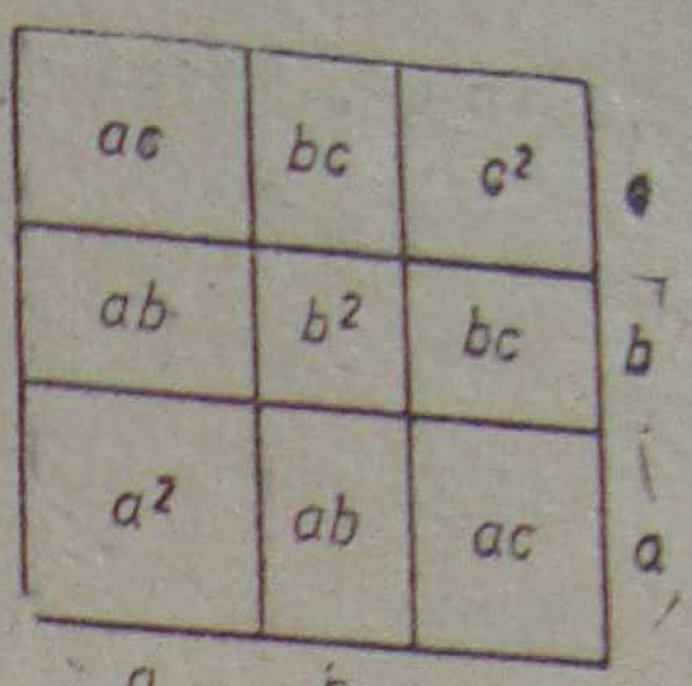
$(-a-b)^2$ *արտահայտությունը ձևափոխենք գումարի.* $(-a-b)^2=((-a)+(-b))^2=(-a)^2+2(-a)(-b)+(-b)^2=a^2+2ab+b^2$,



Նկ. 85



Նկ. 86



Նկ. 87

Կարելի է դատել և այսպես.

$$(-a-b)^2=((-1)(a+b))^2=(-1)^2(a+b)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

Օ ր ի ն ա կ 1: $(2a^3b+3c^4)^2=(2a^3b)^2+2\cdot 2a^3b\cdot 3c^4+(3c^4)^2=$
$=4a^6b^2+12a^3bc^4+9c^8$:

Օ ր ի ն ա կ 2: $\left(\frac{6}{5}x^2y^3-\frac{10}{9}x^3y^4\right)^2=\left(\frac{6}{5}x^2y^3\right)^2-2\cdot\frac{6}{5}x^2y^3\cdot\frac{10}{9}x^3y^4+$
$+\left(\frac{10}{9}x^3y^4\right)^2=\frac{36}{25}x^4y^6-\frac{8}{3}x^5y^7+\frac{100}{81}x^6y^8,$

Օ ր ի ն ա կ 3: $73^2=(70+3)^2=4900+420+9=5329,$

Օ ր ի ն ա կ 4: $58^2=(60-2)^2=3600-240+4=3364,$

Ենթադրենք, որ a *և* b *փոփոխականները ընդունում են դրական արժեքներ։ Այդ դեպքում գումարի քառակուսու բանաձևը կարելի է ներկայացնել նկարով (նկ. 85)։ Եթե* $a>b$, *ապա նկարով կարելի է ներկայացնել նաև տարբերության քառակուսու բանաձևը (նկ. 86)։*

Եթե a, b, c *փոփոխականները ընդունում են դրական արժեքներ, ապա երեք գումարելիների գումարի քառակուսու բանաձևը կարելի է ներկայացնել նկարով (նկ. 87).*

$$(a+b+c)^2=((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+b^2+c^2+$$
$$+2(ab+ac+bc),$$

Վարժություններ

Գումարի կամ տարբերության քառակուսին ձևափոխեցեք գումարի.

419. *ա)* $(a+x)^2$, *բ)* $(3+n)^2$,

420. *ա)* $(b+k)^2$, *բ)* $(a+2)^2$,

421. *ա)* $(a^5+5)^2$, *բ)* $(x^2+y)^2$,

422. *ա)* $(3+x^7)^2$, *բ)* $(a+b^4)^2$,

423. *ա)* $(x-6)^2$, *բ)* $(2x-3y)^2$,

424. *ա)* $(5-y)^2$, *բ)* $(4a-3b)^2$,

425. $(2a^2b-10c^3)^2$, *բ)* $(11p^2q+2p^2)^2$,

426. *ա)* $(3xy^2+5z)^2$, *բ)* $(7a^2b+4ab^2)^2$,

427. *ա)* $(0{,}3a^3+5b)^2$, *բ)* $(a^2b^3+3a^3b^2)^2$,

428. *ա)* $(0{,}2a^5+3b^2)^2$, *բ)* $(1{,}5x^2-4x^5)^2$,

429. *ա)* $(4a^2-7a^3b^4)^2$ *բ)* $(0{,}7m^2k^5-0{,}3n)^2$,

430. *ա)* $(2x^3y^7+5z^3)^2$, *բ)* $\left(\frac{2}{3}m^2n^3-\frac{3}{4}n\right)^2$:

Լուծեցեք հավասարումը.

431. *ա)* $(5x+3)^2=(7-5x)^2+10$,

բ) $(8y-3)^2+(16y-3)(5-4y)=-94$:

432. *ա)* $(3x-7)^2=(2-3x)^2+135$,

բ) $(6y+5)^2=(4y-3)(9y+5)-27$:

433. *ա)* $(7x-5)^2+19=(9-8x)^2-15x^2$,

բ) $(5-4a)(a+1)+(3+2a)^2=3a+14$:

434. *ա)* $(5y-8)^2+115y=(3+4y)^2+9y^2$,

բ) $(1+5a)(2a-5)-(7-3a)^2=a^2+3$:

§ 63. ԵՐԿՈՒ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ԵՎ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻՆԵՐԻ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ

Ունենք. $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$:

Այսպիսով, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$:

Եվ այսպես, երկու արտահայտությունների գումարի և տարբերության արտադրյալը հավասար է այդ արտահայտությունների քառակուսիների տարբերությանը:

Օրինակ 1: $(2a^2x^3+3b^5y^4)(2a^2x^3-3b^5y^4)=(2a^2x^3)^2-(3b^5y^4)^2=$
$=4a^4x^6-9b^{10}y^8$:

Օրինակ 2: $92\cdot 88=(90+2)\cdot(90-2)=8100-4=8096$:

Եթե a և b փոփոխականները ընդունում են դրական արժեքներ և ընդորում $a>b$, ապա ստացված բանաձևը կարելի է ներկայացնել նկարով (Նկ. 88)։

Վարժություններ

Արտադրյալը ձևափոխեցեք քառակուսիների տարբերության.

435. ա) $(a-3)(a+3)$, բ) $(2a-3b)(2a+3b)$։

436. ա) $(b+7)(b-7)$, բ) $(3x-5y)(3x+5y)$։

437. ա) $(a^5-b^5)(a^5+b^5)$, բ) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$։

438. ա) $(5a^4+7b^3)(7b^3-5a^4)$, բ) $(3x^2-2y^3)(2y^3+3x^2)$։

Լուծեցեք հավասարումը.

439. ա) $(3-x)(x+3)+(x-2)^2=1$,

բ) $(x-7)(x+7)=(5+x)(x-5)$։

440. ա) $(4a-7)^2=(4a+3)(4a-3)+58$,

բ) $(3x-5)(3x+5)=9(x-4)(x+4)$։

§ 64. ԳՈՒՄԱՐԻ ԽՈՐԱՆԱՐԴԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ ԳՈՒՄԱՐԻ.

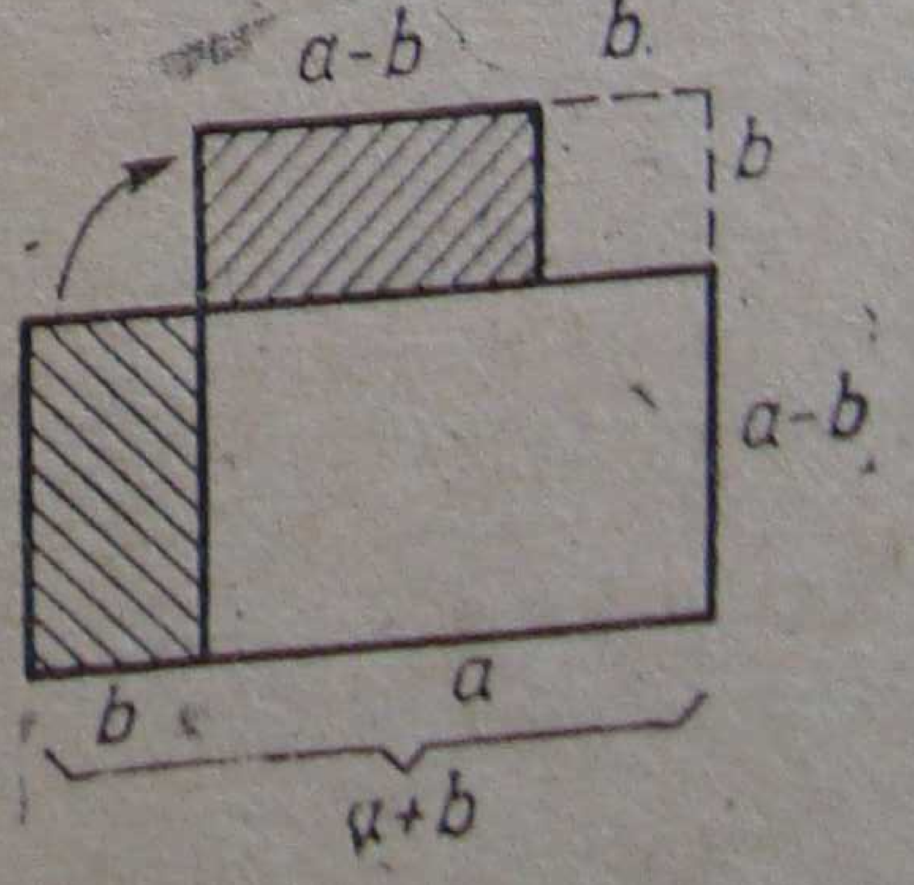
Դիտարկենք երկու գումարելիների գումարի խորանարդը։

Ունենք, $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$։

Այսպիսով,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3։$$

Եվ այսպես, երկու գումարելիների գումարի խորանարդը հավասար է առաջին գումարելիի խորանարդի, առաջինի քառակուսու և երկրորդի եռապատիկ արտադրյալի, առաջինի և երկրորդի քառակուսու եռապատիկ արտադրյալի և երրորդ գումարելիի խորանարդի գումարին։



Նկ. 88

Համանման բանաձև ստացվում է նաև տարբերության խորանարդի համար։ Քանի որ $a-b=a+(-b)$, ապա $(a-b)^3=(a+(-b))^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,

Ստացված գումարում + և — նշանները հերթով փոխվում են։ Գումարի խորանարդի բանաձևը երբեմն կիրառվում է այս տեսքով.

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)։$$

Օրինակ 1: $(x^2y^4-2p^3y)^3$ խորանարդը ներկայացնել բազմանդամի տեսքով։

Հաջորդաբար ստացվում է՝ $(x^2y^4)^3=x^6y^{12}$, $3(x^2y^4)^2\cdot 2p^3y=6p^3x^4y^9$, $3x^2y^4\cdot(2p^3y)^2=12p^6x^2y^6$, $(2p^3y)^3=8p^9y^3$, $(x^2y^4-2p^3y)^3=x^6y^{12}-6p^3x^4y^9+12p^6x^2y^6-8p^9y^3$։

Օրինակ 2: $(-a-b)^3$ արտահայտությունը ձևափոխեցեք գումարի։

Ունենք. $(-a-b)^3=((-a)+(-b))^3=(-a)^3+3(-a)^2(-b)+3(-a)(-b)^2+(-b)^3=-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$։

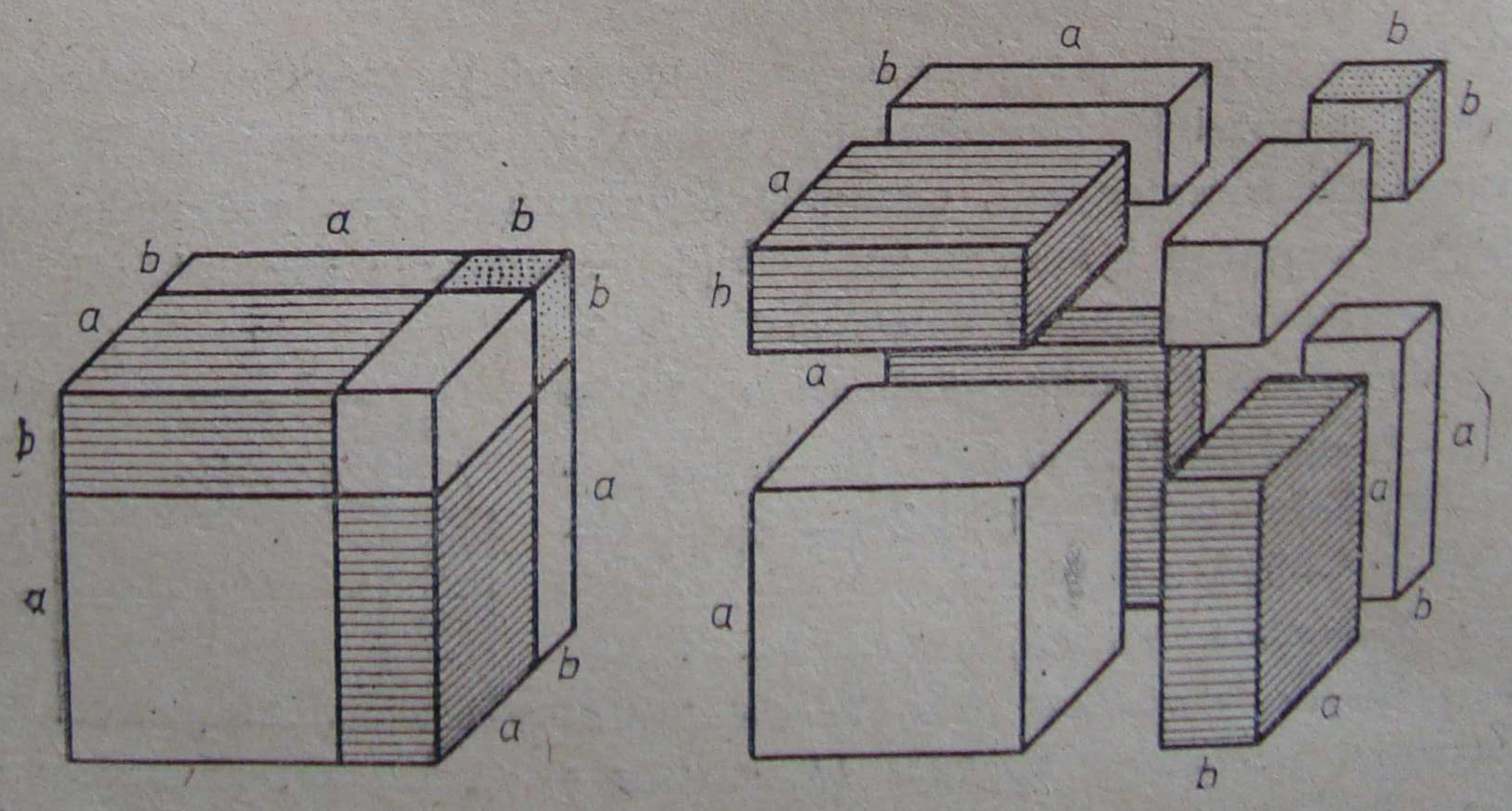
Կարելի է դատել և այսպես. $(-a-b)^3=((-1)(a+b))^3=(-1)^3(a+b)^3=-(a+b)^3=-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$։

Եթե a և b փոփոխականները ընդունում են դրական արժեքներ, ապա գումարի խորանարդի բանաձևը կարելի է ներկայացնել նկարով (Նկ. 89)։

Հիշեցնենք, որ խորանարդի ծավալը հավասար է իր կողի երկարության խորանարդին, իսկ ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծավալը հավասար է իր երեք կողերի երկարությունների արտադրյալին կամ հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին։

$(a+b)$ կողով խորանարդն ունի $(a+b)^3$ ծավալ։ Խորանարդը կտրատվում է 8 մասի. a կողով և a^3 ծավալով խորանարդ, երեք ուղղանկյուն զուգահեռանիստ՝ յուրաքանչյուրը a^2b ծավալով, երեքն էլ՝ յուրաքանչյուրը ab^2 ծավալով, և վերջապես, b կողով և b^3 ծավալով խորանարդ։ Այստեղից էլ զուտ երկրաչափորեն ստացվում է.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3։$$



Նկ. 89

Վարժություններ

Ներկայացրեք բազմանդամի տեսքով.

441. *ա)* $(x+2)^3$, *բ)* $(2a+3)^3$,

442. *ա)* $(3+a)^3$, *բ)* $(3a+2)^3$,

443. *ա)* $(a^3+b^2)^3$, *բ)* $(m^2+k^5)^3$,

444. *ա)* $(x^4+y^5)^3$, *բ)* $(p^5+q^8)^3$,

445. *ա)* $(a^3-b^2)^3$, *բ)* $(2p^2-q^9)^3$,

446. *ա)* $(4n^5-k^7)^3$, *բ)* $(2a^5-3a)^3$,

447. *ա)* $(0{,}1x^7+x^3y)^3$, *բ)* $(m^5n^7-0{,}3m^6)^3$,

448. *ա)* $(a^9+a^{13}b)^3$, *բ)* $(a^3b^4-0{,}1a^8)^3$,

449. *ա)* $(2a^2-3a^4b^2)^3$, *բ)* $(4x^5-x^3y)^3$,

450. *ա)* $(3a^7b^6+2a^4)^3$, *բ)* $\left(\frac{3}{4}a^4b^7-\frac{2}{3}c^5\right)^3$։

Լուծեցեք հավասարումը.

451. *ա)* $(x-2)^3-(x-3)^3=3x^2+4$,

բ) $(2a-3)^3+27=2a(4a^2-18a)$։

452. *ա)* $(x-1)^3=(x-4)^3+9(x^2+2)$,

բ) $(4y-3)^3+16y^2(9-4y)-27=0$։

§ 65. ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ՝ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԱՐՏԱԴՐԻՉԸ ՓԱԿԱԳԾԻՑ ԴՈՒՐՍ ԲԵՐԵԼՈՒ ԵՂԱՆԱԿՈՎ

Մինչև հիմա մենք զբաղվել ենք արտահայտությունների արտադրյալը գումարի ձևափոխելու խնդրով։ Այժմ անցնենք հակադարձ խնդրի լուծմանը, այն է՝ ամբողջ արտահայտությունները, և մասնավորապես բազմանդամները, արտադրյալի ձևափոխելուն։ Այդ ձևափոխությունը կոչվում է **վերլուծում արտադրիչների**: Մենք կսկսենք ընդհանուր արտադրիչը փակագծից դուրս բերելու եղանակից (տես § 61-ում լուծված խնդրի հակադարձն է)։

Քննարկենք օրինակներ։

Օրինակ 1: $35a^5b^4+28a^2b^6$ երկանդամը ձևափոխել արտադրյալի (վերլուծել արտադրիչների)։

Լուծում։ 35 և 28 գործակիցներն ունեն ընդհանուր արտադրիչ՝ 7։ Այնուհետև, a^5 արտադրիչը կարելի է գրել $a^2\cdot a^3$ տեսքով, իսկ b^6 արտադրիչը՝ $b^4\cdot b^2$ տեսքով։

Երկանդամը գրենք այսպես.

$$5 \cdot 7a^2 \cdot a^3 \cdot b^4 + 4 \cdot 7a^2 \cdot b^4 \cdot b^2,$$

Գումարելիներն ունեն ընդհանուր արտադրիչներ՝ 7, a^2 և b^4։ Կիրառելով գումարման նկատմամբ բազմապատկման բաշխական օրենքը, գտնում ենք որոնելի արտադրյալը.

$$35a^5b^4 + 28a^2b^6 = 7a^2b^4(5a^3 + 4b^2),$$

Օրինակ 2: $6x^7y^8 - 8x^3y^5 + 4x^6y^2$ եռանդամը վերլուծել արտադրիչների (ձևափոխել արտադրյալի)։

Լուծում։ Գործակիցներն ունեն ընդհանուր արտադրիչ՝ 2։ x և y փոփոխականների ամենափոքր ցուցիչներն են համապատասխանաբար 3 և 5, այսինքն՝ x^3 և y^5 արտադրիչները ընդհանուր են բոլոր երեք անդամների համար։

Եռանդամը գրենք այսպես.

$$2 \cdot 3x^3y^5 \cdot x^4y^3 - 2 \cdot 4x^3y^5 + 2 \cdot 2x^3 \cdot y^5x^3 \cdot y^4,$$

Ընդհանուր արտադրիչները փակագծից դուրս բերենք և գտնենք որոնելի վերլուծումը.

$$6x^7y^8 - 8x^3y^5 + 4x^6y^9 = 2x^3y^5(3x^4y^3 - 4 + 2x^3y^4),$$

Օրինակ 3։ Հետևյալ ամբողջ արտահայտությունը ձևափոխել արտադրյալի.

$$7a(3x - 2y^2) + 8b(2y^2 - 3x) + 5c(3x - 2y^2),$$

Երկրորդ գումարելին ձևափոխենք հետևյալ կերպ. $8b(2y^2 - 3x) = (-8b)(-2y^2 + 3x) = -8b(3x - 2y^2)$,

Տրված արտահայտությունը արտադրենք այսպես.

$$7a(3x - 2y^2) - 8b(3x - 2y^2) + 5c(3x - 2y^2),$$

Հիմա $3x - 2y^2$ երկանդամ արտադրիչը ընդհանուր է բոլոր երեք գումարելիների համար։ Այն փակագծից դուրս բերելով ստացվում է որոնելի արտադրյալը.

$$(3x - 2y^2)(7a - 8b + 5c),$$

Տրված ամբողջ արտահայտությունը ձևափոխվեց երկու բազմանդամների արտադրյալի։

Օրինակ 4: $3x(a-b)^2 - 5y(b-a)^2$ արտահայտությունը վերլուծել արտադրիչների։

Ունենք. $(b-a)^2 = ((-1)(a-b))^2 = (-1)^2(a-b)^2 = (a-b)^2$,

Ուստի $3x(a-b)^2-5y(b-a)^2=3x(a-b)^2-5y(a-b)^2=(3x-$ $-5y)(a-b)^2$։

Օրինակ 5: $2a(x-y)^3-7b(y-x)^3$ *արտահայտությունը վերլուծել արտադրիչների։*

Ունենք. $(y-x)^3=((-1)(x-y))^3=(-1)^3(x-y)^3=-(x-y)^3$,

Ուստի $2a(x-y)^3-7b(y-x)^3=2a(x-y)^3+7b(x-y)^3=(2a+$ $+7b)(x-y)^3$,

Վարժություններ

Վերլուծել արտադրիչների.

453. ա) $6m+9n$, գ) $8a-12b$,

բ) $21a-14b$, դ) $63x^2+27y$։

454. ա) m^3-mn, գ) $ab-b^2$,

բ) x^3+x^4y, դ) $50x^2-2y^2$։

455. ա) $8k^3+12k^2$, գ) $6a^2b^3-8a^4$,

բ) $24m^7n^6+8m^5n^2$, դ) $26m^9n^{18}+39m^{10}n^2$։

456. ա) $x(y+2)-y(y+2)$, գ) $m(1+k)+n(1+k)$,

բ) $a(x+y)+b(x+y)$, դ) $p(a+b)+q(a+b)$։

457. ա) $a(b-c)+(b-c)$, գ) $x(y+z)-(y+z)$,

բ) $(a-b)-c(a-b)$, դ) $(y+x)-z(x+y)$։

458. ա) $x(x-y)-a(y-x)$, գ) $a(b-2)+3(2-b)$,

բ) $y(x-1)-z(1-x)$, դ) $n(m-k)-t(k-m)$։

459. ա) $m(k-3)-(3-k)$, գ) $a(b-c)+(c-b)$,

բ) $x^2(a-b)-(b-a)$, դ) $m(5-k)-(k-5)$։

460. ա) $x(x-a)+5(a-x)$, գ) $25(n-k)-m^2(n-k)$,

բ) $y(a-b)-8(b-a)$, դ) $a(x-b)-9(b-x)$։

461. ա) $(a+b)^2+2(a+b)$, գ) $z(x+y)-(x+y)^2$,

բ) $3a(x-y)-(x-y)^2$, դ) $4x(b-3)+(b-3)^2$։

462. ա) $x(a-b)-y(b-a)-z(a-b)$,

բ) $5(a-3)-b(3-a)+x(a-3)$.

463. ա) $12n^4-6n^5+3n^2+18n^6$,

բ) $4a^3+6a^4+18a^7-24a^9$,

464. ա) $21k^7-14k^6+63k^5-49k^3$,

բ) $36p^{12}+12p^9-42p^5-54p^7$։

465. ա) $24a^4b^3-15a^7b^9+30a^6b^7-45a^2b^4$,

բ) $8x^5y^7-16x^7y^4-12x^4y^5z+20a^2x^3y^3$։

466. ա) $-90x^9y^4+140x^8y^7+50x^3y^8-10x^3y^4$,

բ) $16a^3b^2-24a^2b^5-32a^4b^2+64a^5b^4$։

§ 66. ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ՝ ԳՈՒՄԱՐԵԼԻՆԵՐԻ ԽՄԲԱՎՈՐՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՈՎ

Դիտարկենք օրինակներ։

Օրինակ 1։ *Հետևյալ բազմանդամը վերլուծել արտադրիչների.*

$$10a^3c-15abc^2+8a^2b^2-12b^3c։$$

Բազմանդամը ձևափոխենք հետևյալ կերպ. գումարելիները խմբավորենք զույգ-զույգ, օրինակ, առաջինը երկրորդի հետ, երրորդը չորրորդի հետ. $10a^3c-15abc^2+8a^2b^2-12b^3c=(10a^3c-15abc^2)+(8a^2b^2-12b^3c)$։

Գումարելիների յուրաքանչյուր խմբում բոլոր ընդհանուր արտադրիչները փակագծից դուրս բերենք.

$$5ac(2a^2-3bc)+4b^2(2a^2-3bc)։$$

Ստացված ամբողջ արտահայտության երկու գումարելիներն էլ ունեն ընդհանուր երկանդամ արտադրիչ։ Վերջինս փակագծից դուրս բերելով ստացվում է որոնելի վերլուծումը.

$$10^3c-15abc^2+8a^2b^2-12b^3c=(2a^2-3bc)(5ac+4b^2)։$$

Տրված բազմանդամի գումարելիները կարելի էր խմբավորել այլ կերպ, օրինակ, առաջինը երրորդի հետ, երկրորդը չորրորդի հետ։ Այդ դեպքում.

$$10a^3c-15abc^2+8a^2b^2-12b^2c=(10a^3c+8a^2b^2)-(15abc^2+12b^3c)=$$

$$=2a^2(5ac+4b^2)+3bc(5ac+4b^2)=(5ac+4b^2)(2a^2-3bc)։$$

Հանգեցինք նույն արդյունքին։

Այժմ առաջին գումարելին խմբավորենք չորրորդի հետ, իսկ երկրորդը՝ երրորդի հետ։ Այդ դեպքում.

$$10a^3c-15abc^2+8a^2b^2-12b^3c=2c(5a^3-6b^3)-ab(15c^2-8ab)։$$

Բանից պարզվում է, որ ստացված գումարի գումարելիները ընդհանուր արտադրիչ չունեն։ Հետևաբար գումարելիների այդպիսի խմբավորումը հաջող չէր։

Օրինակ 2: *Հետևյալ բազմանդամը վերլուծել արտադրիչների.*

$$14a^2c+35b^2c-21c^2d-8a^2d-20b^2d+12cd^2.$$

Զույգ-զույգ խմբավորենք a^2 պարունակող անդամները և b^2 պարունակող անդամները, ինչպես նաև մնացած երկու անդամները, որոնք պարունակում են համապատասխանաբար c^2 և d^2 փոփոխականներ.

$$(14a^2c-8a^2d)+(35b^2c+20b^2d)-(21c^2d-12cd^2)=2a^2(7c-4d)+$$
$$+5b^2(7c-4d)-3cd(7c-4d)=(7c-4d)(2a^2+5b^2-3cd).$$

Կարելի է գումարելիները խմբավորել այլ կերպ. առաջին երեք գումարելիները մի խմբում, իսկ վերջին երեքը՝ մյուս.

$$(14a^2c+35b^2c-21c^2d)-(8a^2d+20b^2d-12cd^2)=$$
$$=7c(2a^2+5b^2-3cd)-4d(2a^2+5b^2-3cd)=$$
$$=(2a^2+5b^2-3cd)(7c-4d).$$

Արդյունքը նույնն է.

Վարժություններ

Վերլուծեք արտադրիչների.

467. *ա)* $ab+ac+b^2+bc$, *բ)* $x^2+3x+xy+3y$.

468. *ա)* $x^2+xy+xz+yz$, *բ)* $ab+b^2+2a+2b$.

469. *ա)* $12np+2p^2-6n-p$, *բ)* $xy-7y+4x-28$.

470. *ա)* $3a-6a^2+4b-8ab$, *բ)* $8a^2+12a-10ab-15b$.

471. *ա)* $15ab-10bp-9ac+6cp$, *բ)* $2a^2-2ab+2ac-2bc$.

472. *ա)* $x-1-xy+y$, *բ)* $8ab-4b+2a-1$.

473. *ա)* $15m-5-9mk+3k$, *բ)* $2q-10pq-5p+1$.

474. *ա)* $27q-6pq+10p-45$, *բ)* $xy-3x+7y-21$.

475. *ա)* $2x^2+4xy-ax-2ay$, *բ)* $3ab-6b^2-ac+2bc$.

476. *ա)* $3b-2a+3ab-2a^2$, *բ)* $6x^2-2xy+15x-5y$.

477. *ա)* $ax+bx-cx-ay-by+cy$,

բ) $a^2-2a-2ab+4b-ac+2c$.

478. *ա)* $ax+ay-bx-by+cy+cx$,

բ) $an-ax+ap-bn+bx-bp$.

479. ա) $6ab+3bn-6ax-3nx$,

բ) $8x^3-6x^2y-3ax^2+6axy$,

480. ա) $5x^2-5ax+40bx-4ab$,

բ) $8ab-56aby-56acy+8ac$,

481. ա) y^3+y^2-4y-4, բ) $-3x^3+8x^2+12x-32$,

482. ա) t^3+2t^2-t-2, բ) $4x^3+20x^2-x-5$,

483. ա) $x^3-3x^2-4x+12$, բ) $a^5-4a^3+27a^2-108$,

484. ա) $x^3-2x^2-9x+18$, բ) $y^5-9y^3+8y^2-72$,

§ 67. ԵՐԿՈՒ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԽՈՐԱՆԱՐԴՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ԵՎ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ *բանաձևը (տես § 63) ցույց է տալիս, որ երկու արտահայտությունների գումարի և տարբերության արտադրյալը ձևափոխվում է այդ արտահայտությունների քառակուսիների տարբերության։ Եթե փոխենք այդ բանաձևի աջ և ձախ մասերի տեղերը, ապա կըստանանք նույն այդ բանաձևը, բայց* $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ *տեսքով։ Դա նշանակում է, երկու քառակուսիների տարբերությունը կարելի է վերլուծել արտադրիչների, որոնք կլինեն այդ քառակուսիների հիմքերի գումարը և տարբերությունը։*

Օրինակներ։ *Հետևյալ քառակուսիների տարբերությունը վերլուծել արտադրիչների.*

ա) $25a^6x^8-49$ բ) $9a^4b^2-16x^6y^{10}$։

Լուծում։ ա) $25a^6x^8-49=(5a^3x^4+7)(5a^3x^4-7)$։

բ) $9a^4b^2-16x^6y^{10}=(3a^2b)^2-(4x^3y^5)^2=(3a^2b+4x^3y^5)(3x^2b-4x^3y^5)$։

Ավելի բարդ է երկու արտահայտությունների խորանարդների գումարի կամ տարբերության վերլուծումը արտադրիչների։

Համեմատենք հետևյալ արտահայտությունները. $a^2+2ab+b^2$ և a^2+ab+b^2։

Առաջին արտահայտությունը նույնաբար հավասար է a *և* b *փոփոխականների գումարի քառակուսուն։ Երկրորդ արտահայտությունը առաջինից տարբերվում է* a *և* b *փոփոխականների արտադրյալի գործակցով։ Խոսքի կարճության համար պայմանավորվենք երկրորդ արտահայտությունը անվանել* **a** *և* b *փոփոխականների* **գումարի թերի քառակուսի։** *(Եթե երկրորդ արտահայտությանը ավելացնենք* ab*, ապա այն նույնաբար հավասար կդառնա* a*-ի և* b*-ի գումարի քառակուսուն)։*

Հանգունորեն համեմատենք $a^2-2ab+b^2$ և a^2-ab+b^2 արտահայտությունները:

Երկրորդ արտահայտությունը պայմանավորվենք անվանել a և b փոփոխականների տարբերության թերի քառակուսի: Այժմ ձևափոխենք հետևյալ երկու արտադրյալները.

1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$,

2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2+b^3=a^3-b^3$:

Այսպիսով, մենք ստացանք երկու նոր բանաձև.

1) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,

այսինքն՝ երկու խորանարդների գումարը հավասար է հիմքերի գումարի և հիմքերի տարբերության թերի քառակուսու արտադրյալին.

2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,

այնինքն՝ երկու խորանարդների տարբերությունը հավասար է հիմքերի տարբերության և հիմքերի գումարի թերի քառակուսու արտադրյալին:

Օրինակ 1: *Խորանարդների $8a^6-343b^{12}$ տարբերությունը վերլուծել արտադրիչների:*

Քանի որ $8a^6=(2a^2)^3$, $343b^{12}=(7b^4)^3$, ուստի տրված արտահայտությունը իրենից ներկայացնում է երկու խորանարդների տարբերություն: Կազմենք խորանարդների հիմքերի գումարի թերի քառակուսին.

$$(2a^2)^2+(2a^2)(7b^4)+(7b^4)^2=4a^4+14a^2b^4+49b^8:$$

Ուստի. $8a^6-343b^{12}=(2a^2-7b^4)(4a^4+14a^2b^4+49b^8)$:

Օրինակ 2: *Խորանարդների* $27a^6b^9+125x^9y^{12}$ *գումարը վերլուծել արտադրիչների:*

Նկատի ունենալով, որ $27a^6b^9=(3a^2b^3)^3$, $125x^9y^{12}=(5x^3y^4)^3$, *կազմենք հիմքերի տարբերության թերի քառակուսին.*

$$(3a^2b^3)^2-(3a^2b^3)(5x^3y^4)+(5x^3y^4)^2=9a^4b^6-15a^2b^3x^3y^4+25x^6y^8,$$

Ուստի. $27a^6b^9+125x^9y^2=(3a^2b^3+5x^3y^4)(9a^4b^6-15a^2b^3x^3y^4+25x^6y^8)$:

Վարժություններ

Վերլուծեք արտադրիչների.

485. *ա)* $9x^4y^6-25a^8$, *բ)* $25a^4-b^2$:

486. *ա)* $16x^2-y^6$, *բ)* $(6x+5y)^2-(2x-9y)^2$:

487. *ա)* $2x^3+16y^3$, *բ)* $16a^3b^{11}-25ab$:

488. *ա)* $49a^{10}y-9y^{15}$, *բ)* $24a^3-3b^3$:

Գտեք հետևյալ արտահայտությունների արժեքները.

489. *ա)* 58^2-42^2, *բ)* 167^2-157^2։

490. *ա)* 253^2-247^2, *բ)* 123^2-77^2։

491. *ա)* 76^2-24^2, *բ)* 231^2-221^2։

492. *ա)* 167^2-67^2, *բ)* 501^2-499^2։

Հետևյալ եռանդամները վերլուծեք արտադրիչների.

493. *ա)* $4x^4-12x^2+9$, *բ)* $25a^8-30a^4b^7+9b^{14}$։

494. *ա)* $16a^6+24a^3b^2+9b^4$, *բ)* $9-30k^3+25k^6$։

495. *ա)* $a^4-2a^5+a^6$, *բ)* $9x^8-12x^{11}+4x^{14}$։

496. *ա)* $81y^6-36y^{14}+4y^{22}$, *բ)* $9a^8-30a^9+25a^{10}$։

497. *ա)* $a^4b^2-2a^2b^3+b^4$, *բ)* $x^{10}y^4+4x^7y^2+4x^4$։

a փոփոխականի ո՞ր արժեքների դեպքում են հետևյալ արտահայտություններն իրենցից ներկայացնում որևէ երկանդամի քառակուսի։

498. *ա)* $4x^2-20x+a^2$, *բ)* $9m^2+36m+a$։

499. *ա)* $100x^2+6ax+9$, *բ)* $81-30ax+25x^2$։

Արտադրյալը ձևափոխեցեք խորանարդների գումարի կամ տարբերության.

500. $(2a^4+3b)(4a^8-6a^4b+9b^2)$։

501. $(5x-3y^3)(25x^2+15xy^3+9y^6)$։

502. $(x^3-2y)(x^6+2x^3y+4y^2)$։

503. $(3x^2+y)(9x^4-3x^2y+y^2)$։

Արտադրյալը ձևափոխեցեք ստանդարտ տեսքի բազմանդամի.

504. *ա)* $(x^2+4y^3)(x^4+8x^2y^3+16y^6)$,

բ) $(x^2-4y^3)(x^4+4x^2y^3+16y^6)$,

505. *ա)* $(2a^7+b^4)(4a^{14}-2a^7b^4+b^8)$,

բ) $(2a^7+b^4)(4a^{14}+4a^7b^4+b^8)$։

Լուծեցեք հավասարումը.

506. *ա)* $(12+x)(x^2+1)-(x+4)^3=89$,

բ) $(2y+1)(5-2y)^2-(2y-3)^3=4$։

507. ա) $a(11-3a)^2-a(3-a)^2-(2a-5)^3=87$,

բ) $(z+5)(1-z)^2-(5-3z)^2-(z-2)^3+21=0$։

508. ա) $27+7a(9+7a)^2=(7a+6)^3$,

բ) $(y-4)^3-(2+y)(7-y)^2=27$։

509. ա) $(x-2)^3-x(7-x)^2-2(1+2x)^2=35$,

բ) $(a+10)(a-2)^2-(a-4)^3=2(3a-10)^2-168$։

§ 68. ՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑՈՒՄ

Եթե a-ն, b-ն, c-ն երեք թվեր են, ապա $a=b$ *և* $b=c$ *երկու ճիշտ հավասարություններից հետևում է, որ ճիշտ է նաև* $a=c$ *հավասարությունը։ Այլ կերպ ասած, եթե* $a=b$ *և* $b=c$ *ասույթները ճշմարիտ են, ապա* $a=c$ *ասույթը ևս ճշմարիտ է։ Սա ճիշտ թվային հավասարությունների փոխացականության հատկությունն է (a-ից c անցումը b-ով)։*

Մենք գիտենք, որ երկու արտահայտություններ նույնաբար հավասար են, եթե հավասար են նրանց բոլոր համապատասխան արժեքները (տես § 30)։ Ամբողջ արտահայտությունների նույնաբար հավասարությունը նույնպես օժտված է փոխանցականությամբ. **եթե A-ն, B-ն և C-ն միևնույն փոփոխականներով ամբողջ արտահայտություններ են և եթե A=B-ն և B=C-ն նույնություններ են, ապա A=C հավասարությունը ևս նույնություն է:**

Այս հատկությունն օգտագործվում է նույնությունների ապացուցելիս. **ապացուցել նույնությունը՝ նշանակում է ապացուցել, որ փոփոխականներ պարունակող տրված երկու արտահայտությունների հավասարությունը նույնություն է:**

Նույնությունների կարևոր օրինակներ են թվերի հետ կատարվող թվաբանական գործողությունների օրենքները (տես § 31), ինչպես նաև բազմանդամների ձևափոխման բանաձևերը (տես § 62—64, 67)։

Օ ր ի ն ա կ 1: *Ապացուցել* $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ *նույնությունը։*

Ա պ ա ց ու ց ու մ 1. Ձևափոխենք ապացուցվելիք նույնության աջ մասը.

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^2(x^2-x+1)+x(x^2-x+1)+$$
$$+(x^2-x+1)=x^4-x^3+x^2+x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^4+x^2+1։$$

Մենք ստացանք մի արտահայտություն, որը գրված է տրված հավասարության ձախ մասում։ Նույնությունը ապացուցված է։

Ա պ ա ց ու ց ու մ 2. Ձևափոխենք ապացուցվելիք նույնության ձախ մասը.

$$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=$$
$$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)։$$

Մենք ստացանք մի արտահայտություն, որը գրված է տրված հավասարության աջ մասում։ Նույնությունը ապացուցված է։

Օրինակ 2: *Ապացուցել* $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$ *նույնությունը։*

Առանձին-առանձին ձևափոխենք ապացուցվելիք նույնության յուրաքանչյուր մասը.

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2,$$
$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+$$
$$+b^2x^2=a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2։$$

Ապացուցվելիք նույնության աջ և ձախ մասերի արտահայտությունները նույնաբար հավասար ստացվեցին միևնույն՝ երրորդ արտահայտությանը։ Փոխանցականության շնորհիվ նրանք հենց իրենք նույնաբար հավասար արտահայտություններ են։ Նույնությունը ապացուցված է։

Վարժություններ

Ապացուցեք նույնությունները.

510. *ա)* $a^2(a^2-3b^2)^2+b^2(3a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)^3,$

բ) $(4+24a^3)^3+(4-24a^3)^3-(24a^2)^3=128։$

511. *ա)* $a^2(a^2+3b^2)^2-b^2(3a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^3,$

բ) $(1-9a^3)^3+(3a-9a^4)^3+(9a^4)^3=1։$

512. *ա)* $(a^2+pb^2)(x^2+py^2)=(ax+pby)^2+p(ay-bx)^2,$

բ) $x^3(x-2y)-y^3(y-2x)=(x+y)(x-y)^3։$

Ինքնուրույն աշխատանք № 2

1. *Վերլուծեք արտադրիչների.*

ա) $28+4t-7t^2-t^3,$

բ) $125y^5-1125y^3+y^2-9։$

2. *Ապացուցեք, որ*

$$(2a^4-9)(4a^8+18a^4+81)-(3+2a^4)(9-6a^4+4a^8)$$

արտահայտության արժեքը կախված չէ a *փոփոխականի արժեքից։*

3. *Լուծեցեք* $(x+1)^3-(3x-4)=(x+5)(x-1)^2$ *հավասարումը։*

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ձևակերպեցեք թվի բնական ցուցիչով աստիճանի սահմանումը։ Ի՞նչ նշաններ ունեն դրական կամ բացասական հիմքերով և զույգ կամ կենտ ցուցիչներով աստիճանները։

2. Ձևակերպեցեք և ապացուցեք միևնույն հիմքերով երկու աստիճանների արտադրյալի վերաբերյալ թեորեմը։ Բերեք օրինակ։

3. Ձևակերպեք և ապացուցեք աստիճանը աստիճան բարձրացնելու վերաբերյալ թեորեմը։ Բերեք օրինակ։

4. Ձևակերպեք և ապացուցեք երկու արտադրիչների արտադրյալը աստիճան բարձրացնելու վերաբերյալ թեորեմը։ Բերեք օրինակ։

5. Փոփոխականներ պարունակող ինչպիսի՞ արտահայտությունն է կոչվում ամբողջ արտահայտություն։ Ինչպիսի՞ ամբողջ արտահայտությունն է կոչվում միանդամ։ Միանդամն ինչպե՞ս պետք է բերել ստանդարտ տեսքի։ Ի՞նչ է միանդամի գործակիցը։

6. Ինչպիսի՞ միանդամներն են կոչվում նման։ Ինչպե՞ս է կատարվում նման անդամների միացումը։ Արդյոք մի՞շտ է նման միանդամների գումարը ձևափոխվում գումարելիներին նման միանդամի։

7. Ի՞նչ է բազմանդամը։ Բերեք այնպիսի ամբողջ արտահայտության օրինակ, որը բազմանդամ չէ։ Բազմանդամն ինչպե՞ս պետք է բերել ստանդարտ տեսքի։

8. Ինչպե՞ս է երկու բազմանդամների գումարը կամ տարբերությունը ձևափոխվում ստանդարտ տեսքի բազմանդամի։

9. Ինչպե՞ս է միանդամի և բազմանդամի արտադրյալը ձևափոխվում բազմանդամի։ Ձևակերպեք, ինչի՞ է հավասար երկու բազմանդամների արտադրյալը։

10. Արտածեք երկու գումարելիների գումարի քառակուսու բանաձևը։

11. Արտածեք երկու արտահայտությունների քառակուսիների տարբերության բանաձևը։

12. Ինչպիսի՞ հիմնական եղանակներ են կիրառվում ամբողջ արտահայտությունը արտադրիչների վերլուծելու համար։

Գլուխ IX

ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 69. ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ: ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹԸ

Թվեր և փոփոխականներ պարունակող արտահայտությունը կոչվում է ռացիոնալ արտահայտություն, եթե փոփոխականների նկատմամբ կատարվում են միայն գումարման, հանման, բազմապատկման, բաժանման և աստիճան բարձրացնելու գործողություններ։

Ռացիոնալ արտահայտությունը կոչվում է ամբողջ ռացիոնալ, եթե փոփոխականների նկատմամբ չի կատարվում բաժանման գործողություն (տես § 59) և կոտորակա-ռացիոնալ, եթե արտահայտությունը պարունակում է փոփոխականների վրա կամ փոփոխականներով արտահայտության վրա բաժանման գործողություն։

Թվային արտահայտությունները պատկանում են ամբողջ ռացիոնալ արտահայտությունների թվին։

Ռացիոնալ արտահայտությունների օրինակներ՝

$$\frac{2a-5b}{7a+3b},\ 3x^2y^3,\ 2a(b+c)^2,\ \frac{5(x+y)}{2a^2},\ \frac{1}{x},\ 2a+\frac{3b}{c},\ \frac{1}{2}a,$$

Երկրորդ, երրորդ և յոթերորդ արտահայտությունները ամբողջ ռացիոնալ են, իսկ մյուսները՝ կոտորակա-ռացիոնալ։

Սահմանում: $\frac{u}{v}$ տեսքի արտահայտությունը, որտեղ u-ն և v-ն թվեր և փոփոխականներ պարունակող արտահայտություններ են, կոչվում է կոտորակ:

Կոտորակների օրինակներ.

$$\frac{2a-5b}{7a+3b},\ \frac{5(x+y)}{2a^2},\ \frac{1}{x},\ \frac{a+\frac{b}{c}}{\frac{a}{b}+c},\ \frac{1}{1+\frac{1}{x}},\ \frac{5}{7},$$

$a+\frac{1}{b}$ կոտորակային արտահայտությունը կոտորակ չէ։

Դիցուք տրված է $\frac{u}{v}$ կոտորակը։ u-ով նշանակված արտահայտությունը կոչվում է կոտորակի համարիչ, իսկ v-ով նշանակվածը՝ հայտարար։

Փոփոխականների տրված արժեքների դեպքում կոտորակի արժեքը գտնելիս բաժանման գործողությունը միշտ պետք է կատարել վերջում, քանի որ կոտորակը նույն բանն է, ինչ քանորդը։

Եթե փոփոխականի ինչ-որ արժեքի դեպքում կոտորակի հայտարարը զրո է դառնում, ապա փոփոխականի այդ արժեքի դեպքում կոտորակը իմաստ չունի (որոշված չէ) (տես § 28)։

Սահմանում։ Մեկ փոփոխական պարունակող կոտորակի որոշման տիրույթ է կոչվում փոփոխականի բոլոր այն արժեքների բազմությունը, որոնց դեպքում կոտորակն իմաստ ունի։

Եթե կոտորակի համարիչն ու հայտարարը ամբողջ արտահայտություններ են, ապա նրա որոշման տիրույթը բոլոր այն թվերի բազմությունն է, որոնց դեպքում կոտորակի հայտարարը զրո չի դառնում։

Օրինակ 1։ $1: \frac{x+1}{x-2}$ կոտորակը $x=-3, -1, 0, \frac{9}{4}, 3$ արժեքների դեպքում ընդունում է համապատասխանաբար $\frac{2}{5}, 0, -\frac{1}{2}, 13, 4$ արժեքները (ստուգեցեք)։ $x=2$ դեպքում կոտորակի հայտարարը զրո է դառնում, և քանի որ զրոյի բաժանել չի կարելի, ուստի տվյալ կոտորակը $x=2$ դեպքում իմաստ չունի։ Հետևաբար, տվյալ կոտորակի որոշման տիրույթը բոլոր թվերի բազմությունն է, բացի 2 թվից։ Այդ տիրույթը հետևյալ երկու թվային միջակայքերի միավորումն է (տես § 27).

$$]-\infty;\ 2[\ \cup\ ]2;\ +\infty[\text{։}$$

Օրինակ 2։ $\frac{2x(5x+4)}{(x+2)(x-3)}$ կոտորակը իմաստ չունի $x=-2$ և $x=3$ արժեքների դեպքում։ Փոփոխականի մյուս բոլոր արժեքների դեպքում կոտորակը ընդունում է միանգամայն որոշակի արժեքներ։ Այս կոտորակի որոշման տիրույթը հետևյալ երեք թվային միջակայքերի միավորումն է՝

$$]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]-2;\ 3[\ \cup\ ]3;\ +\infty[\text{։}$$

Մտցնենք նոր նշանակում։

Բոլոր թվերի բազմությունը, բացառյալ 2 թիվը (տես 1-ին օրինակը), կարելի է գրառել այսպես՝

$$\{x \mid x \neq 2\},$$

իսկ բոլոր թվերի բազմությունը, բացառյալ -2 և 3 թվերը (տես 2-րդ օրինակը), այսպես՝

$$\{x \mid x \neq -2,\ x \neq 3\}։$$

Այսպիսով, ձևավոր փակագծերի ներսում նախ գրվում է փոփոխականը և առանձնացվում ուղղաձիգ գծիկով, այնուհետև նշվում են այն պայմանները, որոնց այդ փոփոխականը պետք է բավարարի։

Եթե կոտորակի համարիչն ու հայտարարը երկու փոփոխական պարունակող ամբողջ արտահայտություններ են, ապա կոտորակի որոշման տիրույթը փոփոխականների արժեքների այն կարգավորյալ զույգերի բազմությունն է, որոնց դեպքում կոտորակի հայտարարը զրո չի դառնում։

Օրինակ 3: $\dfrac{x+y}{x(3x-5y)}$ կոտորակը իմաստ չունի (որոշված չէ) $x=0$ դեպքում, ինչպես նաև x-ի և y-ի արժեքների բոլոր այն զույգերի դեպքում, որոնց համար կատարվում է $3x=5y$ պայմանը։ Այսպես, կոտորակը որոշված չէ հետևյալ թվազույգերի դեպքում. $(0; 1)$, $(0; 4)$, $(5; 3)$, $(10; 6)$, $(7{,}5;\ 4{,}5)$։

Տվյալ կոտորակի որոշման տիրույթը կարելի է գրել այսպես.

$$\{(x;\ y) \mid x \neq 0;\ 3x \neq 5y\}։$$

Վարժություններ

513. Հետևյալ ռացիոնալ արտահայտություններից որո՞նք են ա) ամբողջ ռացիոնալ, բ) կոտորակա-ռացիոնալ.

$$\frac{a^3-1}{a^2+1},\quad a^2+5a-6,\quad a^5+\frac{b^2}{c^3},\quad 0,\quad a^2(b+c),\quad -\frac{3}{8},$$

$$5x^3+2,\quad \frac{a^2+2}{4a},\quad x^2+1+\frac{1}{x^2},\quad \frac{8}{9}x^5։$$

Գտեք կոտորակի որոշման տիրույթը.

514. ա) $\dfrac{3x}{2x-7}$, գ) $\dfrac{4x}{x^2-9}$,

բ) $\dfrac{2x+5}{(x-3)(x-4)}$, դ) $\dfrac{4x}{(2x+5)(x+1)}$։

515 ա) $\dfrac{2x+1}{3x+5}$, գ) $\dfrac{5x}{(4x-3)(x-6)}$,

բ) $\dfrac{4x}{(x+5)(x-2)}$, դ) $\dfrac{3x+4}{x^2-25}$,

§ 70. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիտարկենք $\frac{x}{x-5}$ կոտորակը։ Այս կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք միևնույն $x+1$ արտահայտությամբ, կստանանք նոր կոտորակ՝ $\frac{x(x+1)}{(x-5)(x+1)}$։

Առաջին կոտորակն իմաստ չունի $x=5$ դեպքում, իսկ երկրորդը՝ $x=5$ և $x=-1$ դեպքերում։ x փոփոխականի այս արժեքների համար չկան կոտորակների համապատասխան արժեքներ։ x փոփոխականի մնացած բոլոր արժեքների դեպքում այս կոտորակների համապատասխան արժեքները գոյություն ունեն և հավասար են միմյանց (տես § 30)։

Իրոք, դիցուք $x=7$, այդ դեպքում $\frac{x}{x-5}$ արտահայտությունը ընդունում է $\frac{7}{2}$ արժեքը, իսկ $\frac{x(x+1)}{(x-5)(x+1)}$ արտահայտությունը՝ $\frac{7\cdot 8}{2\cdot 8}$ արժեքը, որը հավասար է $\frac{7}{2}$-ի։ Դիցուք $x=3$։ Առաջին արտահայտությունը ընդունում է $-\frac{3}{2}$ արժեքը, իսկ երկրորդը՝ $\frac{3\cdot 4}{(-2)\cdot 4}$ արժեքը, որը նույնպես հավասար է $-\frac{3}{2}$-ի։ Եվ այսպես, դիտարկվող երկու կոտորակները նույնաբար հավասար են։ Մենք ստացանք նույնություն.

$$\frac{x}{x-5}=\frac{x(x+1)}{(x-5)(x+1)}.$$

Սակայն աջ և ձախ մասերում գտնվող կոտորակների որոշման տիրույթները տարբեր են. տրված կոտորակի որոշման տիրույթն է $\{x|x\neq 5\}$, իսկ երկրորդ կոտորակինը՝ $\{x|x\neq -1, x\neq 5\}$։

Դիցուք այժմ տրված է $\frac{(x+2)(x-5)}{(2x+5)(x+2)}$ կոտորակը։ Համարիչն ու հայտարարն ունեն ընդհանուր արտադրիչ՝ $x+2$։ Եթե համարիչն ու հայտարարը բաժանենք $x+2$-ի, ապա կստանանք նոր կոտորակ՝ $\frac{x-5}{2x+5}$։ Այսպիսի ձևափոխությունը կոչվում է կոտորակի կրճատում: Կոտորակը կրճատելիս արդյունքում ստացվում է նրան նույնաբար հավասար կոտորակ։ $\frac{(x+2)(x-5)}{(2x+5)(x+2)}=\frac{x-5}{2x+5}$ հավասարությունը նույնություն է։ Փոփոխականի $x=-2$ և $x=-2{,}5$ արժեքների համար հավասարության աջ և ձախ մասերը չունեն համապատասխան արժեքներ։ Փոփոխականի

մյուս բոլոր արժեքների համար դրանց համապատասխան արժեքները գոյություն ունեն և հավասար են միմյանց։

Նույնության երկու մասերի որոշման տիրույթները տարբեր են. ձախ մասի համար այդ տիրույթն է $\{x|x\neq-2{,}5,\ x\neq-2\}$, իսկ աջ մասի համար՝ $\{x|x\neq-2{,}5\}$։

Ձևակերպենք եզրակացությունը։ Եթե $\frac{u}{v}$ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք կամ բաժանենք միևնույն t արտահայտության վրա, ապա կստացվի նրան նույնաբար հավասար կոտորակ՝

$$\frac{u\cdot t}{v\cdot t}=\frac{u}{v}\text{։}$$

Նույնության աջ և ձախ մասերը կարող են ունենալ տարբեր որոշման տիրույթներ:

Բերենք կոտորակների կրճատման օրինակներ.

1) $\frac{x^{10}}{x^7}=\frac{x^3\cdot x^7}{x^7}=x^3$, *3)* $\frac{12a^6b^7}{18a^2b^{10}}=\frac{2a^4}{3b^3}$,

2) $\frac{x^{14}}{x^{20}}=\frac{x^{14}}{x^{14}\cdot x^6}=\frac{1}{x^6}$, *4)* $\frac{19a^2b^3c^4}{95b^4c^3d}=\frac{a^2c}{5bd}$,

5) $\frac{4a^2c^2d-8bc^2d}{6a^2cd^2-12bcd^2}=\frac{4c^2d(a^2-2b)}{6cd^2(a^2-2b)}=\frac{2c}{3d}$։

Վարժություններ

Կրճատեցեք կոտորակները.

516. ա) $\frac{39a^5b^4c^3}{65b^5c^2}$, բ) $\frac{49x^7y^4}{63x^3y^4}$, գ) $\frac{m^2n^5t^3}{4m^4n^3}$, դ) $\frac{100p^6q^4z^7}{125p^6q^4}$։

517. ա) $\frac{147x^4y^3z^4}{189x^3y^4z^4}$, բ) $\frac{27a^3b^6x^2}{72a^4b^5y^3}$, գ) $\frac{85p^6q^5}{119p^6q^6}$, դ) $\frac{625a^{11}b^7c^4}{125b^3c^4}$։

518. ա) $\frac{x^2-2xy}{xy-2y^2}$, բ) $\frac{2a^2+4ab}{6b^2+3ab}$, գ) $\frac{1-x^2}{x^2-x}$, դ) $\frac{16a-4b}{5b-20a}$։

519. ա) $\frac{2xy+y^2}{xy+2x^2}$, բ) $\frac{10a^2-2ab}{15ab-3b^2}$, գ) $\frac{x^2-xy}{x^2-y^2}$, դ) $\frac{3x-6y}{18y-9x}$,

520. ա) $\frac{a^2-b^2}{a^4-b^4}$, բ) $\frac{x^6-y^6}{x^3-y^3}$, գ) $\frac{ax+ay-a}{bx+by-b}$, դ) $\frac{30x^2y-42x^3}{25y^3-35xy^2}$,

521. ա) $\frac{x^6-y^6}{x^3+y^3}$, բ) $\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}$, գ) $\frac{3a-6b+9c}{5a-10b+15c}$, դ) $\frac{7a^3b+14a^4}{10ab^4+5b^5}$,

522. ա) $\frac{a^2-4}{a+2}$, բ) $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$, գ) $\frac{a-1}{a-a^2}$, դ) $\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$;

523. ա) $\frac{ac+bc}{bc+ac}$, բ) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$, գ) $\frac{ac-bc}{bc-ac}$, դ) $\frac{(x-1)^3}{x^3-x}$,

524. ա) $\frac{8a^5-8a^3}{8a^5+16a^4+8a^3}$, գ) $\frac{5a^2bc-5a^2b^2-5a^3b}{7abc^2+7b^2c^2-7bc^3}$,

բ) $\frac{a^2x-a^2y-b^2x+b^2y}{ax-bx-ay+by}$, դ) $\frac{a^2x-b^2x+a^2y-b^2y}{ax+ay+bx+by}$,

§ 71. ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ ԵՎ ՔԱՆՈՐԴԸ: ԿՈՏՈՐԱԿԻ ԱՍՏԻՃԱՆԸ

Դիցուք տրված են փոփոխականներ պարունակող $\frac{u}{v}$ *և* $\frac{s}{t}$ *կոտորակները: Տեղի ունի հետևյալ նույնությունը.*

$$\frac{u}{v}\cdot\frac{s}{t}=\frac{us}{vt},$$

այսինքն՝ երկու կոտորակների արտադրյալը նույնաբար հավասար է մի կոտորակի, որի համարիչը հավասար է տրված կոտորակների համարիչների արտադրյալին, իսկ հայտարարը՝ հայտարարների արտադրյալին:

Օ ր ի ն ա կ: *Կոտորակների արտադրյալը ձևափոխել կոտորակի.*

$$\frac{3a^2}{5b}\cdot\frac{12a^3}{7c^3}=\frac{3a^2\cdot 12a^3}{5b\cdot 7c^3}=\frac{36ba^5}{35bc^3};$$

Երեք կոտորակների համար տեղի ունի համանման նույնություն.

$$\frac{u}{v}\cdot\frac{s}{t}\cdot\frac{p}{q}=\frac{usp}{vtq};$$

n հատ միևնույն կոտորակների արտադրյալի համար.

$$\underbrace{\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\left(\frac{u}{v}\right)\cdots\left(\frac{u}{v}\right)}_{n}=\frac{\overbrace{u\cdot u\cdots u}^{n\ \text{անգամ}}}{\underbrace{v\cdot v\cdots v}_{n\ \text{անգամ}}}=\frac{u^n}{v^n},$$

Բայց, $\underbrace{\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\left(\frac{u}{v}\right)\cdots\left(\frac{u}{v}\right)}_{n\ \text{անգամ}}=\left(\frac{u}{v}\right)^n$, *հետևաբար* $\left(\frac{u}{v}\right)^n=\frac{u^n}{v^n}$;

Այսպիսով, կոտորակի բնական ցուցիչով աստիճանը նույնաբար հավասար է համարիչի և հայտարարի աստիճանների քանորդին:

Օրինակներ: *Կոտորակի աստիճանը ձևափոխել կոտորակի.*

1) $\left(\frac{2ab^2c^3}{3m^5n^4}\right)^4=\frac{16a^4b^8c^{12}}{81m^{20}n^{16}}$, 2) $\left(\frac{3a^4}{4b^2}\right)^3=\frac{27a^{12}}{64b^6}$,

Սահմանում: **Երկու արտահայտություններ կոչվում են փոխհակադարձ, եթե դրանց արտադրյալը հավասար է 1-ի:**

Փոխհակադարձ արտահայտությունների օրինակներ a *և* $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{3}$ *և* $\frac{3}{2}$, -5 *և* $-\frac{1}{5}$, $\frac{m}{n}$ *և* $\frac{n}{m}$, $\frac{x+3}{x-2}$ *և* $\frac{x-2}{x+3}$,

1 և —1 թվերը հակադարձ են իրենք իրենց (տես § 24)։

Երկու կոտորակների քանորդը նույնաբար հավասար է բաժանելիի և բաժանարարին հակադարձ կոտորակի արտադրյալին.

$$\frac{u}{v}:\frac{s}{t}=\frac{u}{v}\cdot\frac{t}{s} \text{ կամ } \frac{u}{v}:\frac{s}{t}=\frac{ut}{vs},$$

Օրինակ: *Կոտորակների քանորդը ձևափոխել կոտորակի.*

$$\frac{15a^2}{14c^2d^4}:\frac{10a^6}{21c^5d^3}=\frac{15a^2}{14c^2d^4}\cdot\frac{21c^5d^3}{10a^6}=\frac{9c^3}{4a^4d},$$

Վարժություններ

Կատարեցեք նշված գործողությունները.

525. ա) $\frac{16}{81}\cdot\frac{27}{32}$, բ) $\frac{91}{46}\cdot\frac{23}{26}$, գ) $\frac{17}{18}:\frac{51}{2}$, դ) $\frac{299}{989}:\frac{13}{43}$,

526. ա) $\frac{35}{48}\cdot\frac{16}{25}$, բ) $\frac{62}{5}\cdot\frac{10}{93}$, գ) $\frac{42}{5}:\frac{21}{20}$, դ) $\frac{55}{56}:\frac{11}{8}$,

Պարզեցրեք արտահայտությունները.

527. ա) $xy\cdot\frac{1}{y}$, բ) $c\cdot\frac{ac}{b}$, գ) $y^3\cdot\frac{x}{y^2}$, դ) $ab\cdot\frac{a^2}{b^3}$,

528. ա) $\frac{2ab}{15c}\cdot\frac{9ac}{4b}$, բ) $\frac{7ab}{9b^3}\cdot\frac{3a^2}{14c^2}$, գ) $\frac{9a}{bc}\cdot\frac{2c}{3ab}$, դ) $\frac{2x^2}{5y^3}\cdot\frac{15xy}{z}$,

529. ա) $\left(-\frac{x^2y^4}{2}\right)\cdot\frac{x^5}{y^7z}$, գ) $\frac{20a^4x^3}{21b^7}\cdot\frac{7a^3b^4}{4x^6y^2}\cdot\frac{3b^3x^2}{5a^6y}$,

բ) $\frac{11a^3c^2}{7mq}\cdot\left(-\frac{21m^2}{22a^4}\right)$ դ) $\frac{5a^2b}{3cd}\cdot\frac{4cd}{15b^4}\cdot\frac{9b^3c^2}{16a^2}$,

530. ա) $\frac{a^3b^2}{c}\cdot\left(-\frac{b^4}{ac^3}\right)$, գ) $\frac{2x^2}{3yz}\cdot\frac{5y^2}{4xz}\cdot\frac{18z^2}{25xy}$,

բ) $\left(-\frac{2a^2b^2}{3mn^2}\right)\cdot\frac{a^9m^4}{14b^{11}n^3}$, դ) $\frac{b^3c^5}{3a^4d^4}\cdot\frac{36a^4d^3}{5b^2c^4}\cdot\frac{5a^3b^2}{4c^2}$:

Կոտորակի աստիճանը ձևափոխեցեք կոտորակի.

531. ա) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$, $\left(-2\frac{1}{3}\right)^2$, բ) $\left(\frac{a^2b^3}{c^5}\right)^4$, $\left(-\frac{2x^3y}{3a^4}\right)^6$:

532. ա) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(-3\frac{1}{2}\right)^3$, բ) $\left(-\frac{a^7b^4}{c^3}\right)^5$, $\left(\frac{2p^5q^4}{a^2b^{10}}\right)^4$:

Կոտորակների արտադրյալը կամ քանորդը ձևափոխեցեք կոտորակի և կրճատեցեք, եթե հնարավոր է.

533. ա) $(a^2-b^2)\cdot\frac{a-b}{a+b}$, գ) $-6x^3y(a+b)\cdot\frac{3x}{a^2-b^2}$,

բ) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\cdot(a^3-b^3)$, դ) $\frac{x+y}{x^2+y^2}\cdot(x-y)\cdot 4x^2y$:

534. ա) $\frac{x+y}{x-y}\cdot(x^2-y^2)$, գ) $\frac{x^3+y^3}{2x^7y^4}\cdot 4x^5y^4$,

բ) $(x^3+y^3)\cdot\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$, դ) $-87a^4y(a+b)^3\cdot\frac{1}{a^4(a+b)}$:

535. ա) $\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{y-x}{y+x}$, գ) $\frac{a^2+b^2}{a-b}\cdot\frac{5a^2-5b^2}{a^2+b^2}$,

բ) $\frac{15b-15a}{4b+4a}\cdot\frac{2a+2b}{5a-5b}$, դ) $\frac{x(x^2-y^2)}{2y}\cdot\frac{6xy-6y^2}{x(x+y)}$:

536. ա) $\frac{2x+z}{3z-y}\cdot\frac{y-3z}{z+2x}$, գ) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{3a^2+3b^2}{a+b}$,

բ) $\frac{10b+10a}{9b-9a}\cdot\frac{3a-3b}{5a+5b}$, դ) $\frac{x(x+y)}{8xy-8x^2}\cdot\frac{6x^2}{y(y^2-x^2)}$,

537. ա) $\frac{12a^5}{a^3+b^3}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{6a^4}$, գ) $\frac{x-y}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$,

բ) $\frac{y^2-2xy}{xy+4x^2}\cdot\frac{4xy+y^2}{4x^2-y^2}$, դ) $\frac{x^2+3x+2}{9-x^2}\cdot\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+4}$:

538. ա) $\frac{a^3-b^3}{2a^2} \cdot \frac{6a^3}{a^2+ab+b^2}$, գ) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y} \cdot \frac{x^2+2xy+y_2}{x^3-y^3}$,

բ) $\frac{x^2-2xy}{xy-2y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{3y^2+xy}$, դ) $\frac{1-2x+x^2}{x^2-3x+2} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}$;

539. ա) $\frac{x+1}{y} : \frac{x^2-1}{4y^2}$, գ) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} : \frac{4y-4x}{5x}$,

բ) $\frac{3a}{a-b} : \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, դ) $\frac{bc+cx}{ab-ax} : \frac{ab+ax}{bc-cx}$,

540. ա) $\frac{1-x^2}{y^3} : \frac{1-x}{3y^3}$, գ) $\frac{x^3}{y^2-x^2} : \frac{x^2+y^2}{7x+7y}$,

բ) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{4a^2}{a+b}$, դ) $\frac{ab-ac}{bx+cx} : \frac{bx-cx}{ab+ac}$;

541. ա) $\frac{y(x-y)}{(x+y)^2} : \frac{y^3}{(x-y)^3}$, գ) $\frac{a^3-b^3}{ab(a+b)} : \frac{a^2-b^2}{a^2+ab}$,

բ) $\frac{a^3+b^3}{a-b} : \frac{a^3-b^3}{a+b}$, դ) $\frac{y^4-x^4}{x^2+2xy+y^2} : \frac{xy-y^2}{x+y}$;

542 ա) $\frac{(a-b)^2}{b^2(a+b)} : \frac{a(a+b)}{b^4}$, գ) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} : \frac{a^2+ab}{b(a-b)}$,

բ) $\frac{x^3-y^3}{x+y} : \frac{x^3+y}{x-y}$, դ) $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2} : \frac{a^2+ab}{a-b}$;

§ 72. ԱՄԲՈՂՋ ՑՈՒՑԻՉՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

a^n աստիճան, ինչպես հայտնի է, կոչվում է a-ի հավասար n արտադրիչների արտադրյալը, եթե n-ը 1-ից մեծ բնական թիվ է։ n=1 դեպքում ընդունված է $a^1=a$ սահմանումը (տես § 58)։ Այսպիսով, աստիճանի հասկացությունը սահմանված է ցանկացած n, $n \in N$ համար։

Մտցնենք ևս երկու սահմանում։

Սահմանում։ Զրոյից տարբեր ցանկացած a թվի զրո աստիճանը հավասար է մեկի.

$$a^0=1, \text{ եթե } a \neq 0\text{։}$$

Օրինակներ: $2^0=1$, $3{,}5^0=1$, $(-6)^0=1$, $1^0=1$, $(-1)^0=1$, $\left(\frac{3}{7}\right)^0=1$։

Սահմանում։

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ n\in N,\ a\neq 0,$$

Օրինակներ: $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$, $(-4)^{-2}=\frac{1}{(-4)^2}=\frac{1}{16}$, $(-4)^{-3}=$ $=\frac{1}{(-4)^3}=-\frac{1}{64}$, $(-1)^{-1}=-1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{125}{27}$,

a^n արտահայտությունը (եթե $a\neq 0$) հիմա արդեն իմաստ ստացավ աստիճանացույցի բոլոր բնական, զրոյական և ամբողջ բացասական արժեքների համար, այսինքն՝ բոլոր $n\in Z$-երի համար։

Վարժություններ

Հետևյալ աստիճանները գրեցեք կոտորակի տեսքով.

543. *ա)* 2^{-3}, 4^{-2}, 11^{-2}, *բ)* 3^{-2}, 5^{-2}, 2^{-5}։

544. *ա)* 3^{-3}, 4^{-3}, 15^{-2}, *բ)* 2^{-4}, 5^{-3}, 7^{-2}։

Օգտագործելով բացասական ցուցիչներ, հետևյալ կոտորակները գրեցեք աստիճանների արտադրյալի տեսքով.

545. *ա)* $\frac{a^2}{b^3}$, $\frac{x^5}{y^7}$, *բ)* $\frac{x^4}{y}$, $\frac{a}{bc^2}$;

546. *ա)* $\frac{x^4}{y^3}$, $\frac{a^7}{b^4}$, *բ)* $\frac{x^2z^5}{y}$, $\frac{ab^4}{c^5}$;

547. *ա) 16, 8, 4, 2, 1, 0,5, 0,25 թվերը ներկայացրեք 2 հիմքով աստիճանի տեսքով,*

բ) $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{3}$, *1, 3, 9, 27 թվերը ներկայացրեք 3 հիմքով աստիճանի տեսքով։*

548. *Հետևյալ թվերը ներկայացրեք բացասական ցուցիչով աստիճանի տեսքով.*

ա) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{100}$, *բ)* $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{10}$;

Գտեք արտահայտության արժեքը.

549. *ա)* 3^{-4}, 5^{-3}, 15^{-2}, *բ)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$, $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$;

550. ա) 2^{-5}, 7^{-2}, 6^{-3}, բ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$։

551. ա) $2a^2b^{-3}$, երբ $a=5$, $b=2$,

բ) $\frac{2x^2y^4}{81z^0}$, երբ $x=3$, $y=2$, $z=5$,

552. ա) $3x^{-2}y^4$, երբ $x=9$, $y=2$,

բ) $\frac{64a^0c^{-3}}{5b^7}$, երբ $a=6$, $b=1$, $c=4$։

§ 73. ԱՄԲՈՂՋ ՑՈՒՑԻՉՆԵՐՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Օգտվելով ամբողջ ցուցիչով աստիճանի սահմանումից, մենք նախ ապացուցենք միևնույն հիմքերով երկու աստիճանների քանորդի վերաբերյալ թեորեմը (աստիճանների արտադրյալի վերաբերյալ համանման թեորեմ դիտարկվել է § 58-ում)։

Թ ե ո ր ե մ: Բնական ցուցիչներով և զրոյից տարբեր միևնույն հիմքերով աստիճանների քանորդը հավասար է այնպիսի աստիճանի, որի հիմքը նույնն է, իսկ ցուցիչը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի ցուցիչների տարբերությանը:

Ա պ ա ց ու ց ու մ։ Տրված է $\frac{a^m}{a^n}$ *քանորդը, ընդ որում* $a\neq 0$, m, $n \in N$,

Դիտարկենք երեք դեպք. $m>n$, $m<n$, $m=n$։

1-ին դ ե պ ք։ Երբ $m>n$, *ապա՝*

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{\overbrace{aa\cdots a}^{m\ \text{անգամ}}}{\underbrace{aa\cdots a}_{n\ \text{անգամ}}}=\frac{\overbrace{(aa\cdots a)}^{n\ \text{անգամ}}\overbrace{(aa\cdots a)}^{(m-n)\ \text{անգամ}}}{\underbrace{aa\cdots a}_{n\ \text{անգամ}}}=\frac{a^na^{m-n}}{a^n}=a^{m-n};$$

Օ ր ի ն ա կ: $a^{10}:a^4=a^6$ $(a\neq 0)$։

2-րդ դ ե պ ք։ Երբ $m<n$, *ապա՝*

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^m\cdot a^{n-m}}=\frac{1}{a^{n-m}}=\frac{1}{a^{-(m-n)}}=a^{m-n},$$

Օ ր ի ն ա կ: $a^{10}:a^{14}=a^{-4}$ $(a\neq 0)$:

3-րդ դ ե պ ք։ Երբ $m=n$, *ապա՝*

$$\frac{a^m}{a^m}=1=a^0=a^{m-m},$$

Թեորեմն ապացուցված է ամբողջությամբ. ցանկացած $m, n \in N$, $a \neq 0$ *դեպքում ճիշտ է* $a^m : a^n = a^{m-n}$ *բանաձևը։*

Միևնույն հիմքերով և m *և* n *բնական ցուցիչներով աստիճանների համար ճիշտ է հետևյալ հինգ բանաձևը.*

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

2) $a^m : a^n = a^{m-n} (a \neq 0)$,

3) $(a^m)^n = {}^{mn}$

4) $(ab)^n = a^n b^n$,

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$,

1-ին, 3-րդ և 4-րդ բանաձևերը ապացուցվել են § 58-ում, 5-րդը՝ § 71-ում, 2-րդը՝ այս պարագրաֆում։

Կարելի է ցույց տալ, որ բնական աստիճանացույցների դեպքի համար ապացուցված այս հինգ հատկությունները ճիշտ են նաև ցանկացած ամբողջ աստիճանացույցների համար։

Դիտարկենք միայն առաջին հատկությունը։

Միևնույն հիմքերով և կամայական ամբողջ ցուցիչներով երկու աստիճանների արտադրյալը հավասար է այնպիսի աստիճանի, որի հիմքը նույնն է, իսկ ցուցիչը հավասար է տրված աստիճանների ցուցիչների գումարին.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in Z)։$$

Ապացուցում: *Առանձին օրինակներով քննարկենք բոլոր հնարավոր դեպքերը, այսինքն՝ երբ* $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$, $n = 0$, $n > 0$, $n < 0$ *և ցույց տանք, որ յուրաքանչյուր դեպքի համար թեորեմը ճիշտ է։*

1-ին դեպք: m*-ը և* n*-ը ունեն միևնույն նշանները։*

ա) $a^2 \cdot a^5 = a^7 = a^{2+5}$,

բ) $a^{-2} \cdot a^5 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^7} = a^{-7} = a^{-2+(-5)}$,

2-րդ դեպք: m*-ը և* n*-ը ունեն հակադիր նշաններ։*

ա) $a^{-2} \cdot a^5 = \frac{1}{a^2} \cdot a^5 = a^3 = a^{-2+5}$,

բ) $a^2 \cdot a^{-5} = a^2 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^3} = a^{-3} = a^{2+(-5)}$,

3-րդ դեպք: m *և* n *թվերի մեջ կան զրոներ։*

ա) $a^5 \cdot a^0 = a^5 \cdot 1 = a^{5+0}$,

բ) $a^{-2} \cdot a^0 = a^{-2} \cdot 1 = a^{-2} = a^{-2+0}$,

գ) $a^0 \cdot a^0 = 1 \cdot 1 = 1 = a^0 = a^{0+0}$,

Աստիճանների մյուս չորս հատկությունները նույնպես ճիշտ են բոլոր $m, n \in Z$-երի համար։

Վարժություններ

Արտադրյալը, քանորդը կամ աստիճանը ձևափոխեցեք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի.

553. $a^{10} \cdot a^{-8}$, $a^{-8} \cdot a^{3}$, $a^{6} \cdot a^{-10}$, $a^{7} \cdot a^{-7}$։

554. $\frac{a^{-5}}{a^{3}}$, $\frac{a^{5}}{a^{-3}}$, $\frac{a^{-5}}{a^{-3}}$, $\frac{a^{-3}}{a^{-5}}$, $\frac{a^{6}}{a^{-6}}$, $\frac{a^{-4}}{a^{4}}$։

555. $(a^{5})^{-3}$, $(a^{-5})^{3}$, $(a^{-5})^{-3}$, $(a^{3})^{5}$։

556. *Թվի աստիճանը ձևափոխեցեք տրված հիմքով աստիճանի.*

ա) 125^{-3}-ը՝ 5 հիմքով, *գ)* 16^{3}-ը՝ 2 հիմքով,

բ) $\left(\frac{1}{81}\right)^{3}$-ը՝ 3 հիմքով, *դ)* $\left(\frac{1}{32}\right)^{-2}$-ը՝ 2 հիմքով։

§ 74. ԹՎԻ ՍՏԱՆԴԱՐՏ ՏԵՍՔԸ

Մեր հաշվարկի (կամ թվարկության) համակարգը կոչվում է տասական համակարգ, որովհետև նրանում հիմնական դերը խաղում են 10 թիվը և նրա ամբողջ աստիճանները։ Այդ թվերը պատկերվում են մեկով և զրոներով։ Ահա դրանք՝

$10^{1}=10$, $10^{2}=100$, $10^{3}=1000$, $10^{4}=10\,000$ և այլն,

$10^{0}=1$,

$10^{-1}=0{,}1$; $10^{-2}=0{,}01$; $10^{-3}=0{,}001$; $10^{-4}=0{,}0001$ և այլն։

Ամեն մի դրական A թիվ կարելի է գրել 1-ի և 10-ի միջև գտնվող a թվի և 10-ի ամբողջ n աստիճանի արտադրյալի տեսքով.

$$A=a \cdot 10^{n} \quad (A>0,\ 1\leq a<10,\ n\in Z)։$$

Օրինակ, $342=3{,}42 \cdot 10^{2}$ $(a=3{,}42;\ 1<3{,}42<10;\ n=2)$, $0{,}512=5{,}12 \cdot 10^{-1}$ $(a=5{,}12;\ n=-1)$։

Այսպիսի գրառումը կոչվում է թվի **ստանդարտ տեսք**, *իսկ n թիվը՝* **նրա կարգ**։

Բերենք թիվը ստանդարտ տեսքով գրելու այլ օրինակներ.

1) $6834=6{,}834 \cdot 10^{3}$, 4) $0{,}958=9{,}58 \cdot 10^{-1}$,

2) $182{,}75 = 1{,}8275 \cdot 10^2$, 5) $0{,}0052 = 5{,}2 \cdot 10^{-3}$,

3) $7{,}34 = 7{,}34 \cdot 10^0$,

10 թիվը և 10-ից մեծ ցանկացած թիվ (1 և 2 օրինակները), ունեն դրական կարգ ($n > 0$), 1-ի և 10-ի միջև գտնվող թվերը (օրինակ 3), ունեն զրոյական կարգ ($n = 0$), մեկից փոքր դրական թվերը (օրինակ 4,5) ունեն բացասական կարգ ($n < 0$)։

Բերենք ֆիզիկական մեծությունների արժեքների մի քանի օրինակներ, գրված ստանդարտ տեսքով.

Էլեկտրոնի զանգվածը . . . . $9{,}108 \cdot 10^{-31}$ կգ

Ջրածնի ատոմի զանգվածը . . . . $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ կգ

Երկրի զանգվածը . . . . $5{,}96 \cdot 10^{24}$ կգ

Արեգակի զանգվածը . . . . $2 \cdot 10^{30}$ կգ

Մոլեկուլների թիվը 1 սմ ծավալում (նորմալ պայմանների դեպքում) . . . . $2{,}687 \cdot 10^{19}$

Լույսի արագությունը դատարկության մեջ . $2{,}9979 \cdot 10^8$ մ/վ

Լուսատարի (լույսի անցած ճանապարհը մեկ տարում) . . . . $9{,}463 \cdot 10^{15}$ մ

Վարժություններ

Հետևյալ թվերը գրեք ստանդարտ տեսքով.

557. ա) 372; 4508; 0,72; 0,00345; 5032,408,

բ) 495; 6203; 0,24; 0,00476; 6047,302։

558. ա) 518; 34,25; 0,0073; 8,05; 435,2; 0,304,

բ) 624; 28,32; 0,0024; 7,23; 784,4; 0,605։

Ինքնուրույն աշխատանք № 13

1. Գտեք $\dfrac{5x+2}{(2x-3)(10-3x)}$ կոտորակի որոշման տիրույթը։

2. Կրճատեցեք $\dfrac{8x^5y^4-24x^2y^6}{20x^7y-60x^4y^3}$ կոտորակը։

3. Արտադրյալը ձևափոխեցեք կոտորակի.

$$\left(\frac{2y^3z^2}{3x^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{6x^4z^3}{5y^6}\right)^2 \cdot \frac{15y^7}{8x^5z^3},$$

4. Թվերը գրեցեք ստանդարտ տեսքով.

8206,32; 0,304; 0,000526։

§ 75. ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԸ ԵՎ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք տրված են փոփոխականներ պարունակող $\frac{u}{v}$ *և* $\frac{s}{v}$ *կոտորակները։ Այս կոտորակների հայտարարները նույնն են։ Տեղի ունի հետևյալ նույնությունը.*

$$\frac{u}{v}+\frac{s}{v}=\frac{u+s}{v},$$

Միևնույն հայտարարներով երկու կոտորակների գումարը նույնաբար հավասար է մի կոտորակի, որի համարիչը հավասար է տրված կոտորակների համարիչների գումարին, իսկ հայտարարը այդ նույն հայտարարն է:

Համանմանորեն ճիշտ է նաև հետևյալ նույնությունը.

$$\frac{u}{v}-\frac{s}{v}=\frac{u-s}{v};$$

Դիցուք այժմ տրված են **տարբեր** *հայտարարներով* $\frac{u}{v}$ *և* $\frac{s}{t}$ *կոտորակներ։ Առաջին կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք երկրորդ կոտորակի հայտարարով, իսկ երկրորդ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը՝ առաջին կոտորակի հայտարարով։ Կստանանք երկու կոտորակներ, որոնք համապատասխանաբար նույնաբար հավասար են տրված երկու կոտորակներին, բայց արդեն ունեն նույն հայտարարները։ Գումարենք սկզբնական կոտորակները.*

$$\frac{u}{v}+\frac{s}{t}=\frac{ut}{vt}+\frac{sv}{tv}=\frac{ut+vs}{vt};$$

Այսպիսով, տարբեր հայտարարներով երկու կոտորակների գումարը (կամ տարբերությունը) կոտորակի ձևափոխելիս, անհրաժեշտ է նախապես այդ կոտորակները բերել ընդհանուր հայտարարի։

Օրինակ 1։ *Հետևյալ գումարը ձևափոխել կոտորակի.*

$$\frac{a}{4x}+\frac{b}{12y}-\frac{c}{9xy},$$

Կոտորակների հայտարարների գործակիցների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է 36-ի։ Ուստի որպես ընդհանուր հայտարար կարելի է վերցնել 36xy արտահայտությունը։ Ընդհանուր հայտարարը բաժանենք կոտորակներից յուրաքանչյուրի հայտարարի վրա.

$$\frac{36xy}{4x}=9y,\quad \frac{36xy}{12y}=3x,\quad \frac{36xy}{9xy}=4;$$

9y, 3x և 4 արտահայտությունները կոչվում են լրացուցիչ արտադրիչներ համապատասխանաբար 1-ին, և 2-րդ և 3-րդ կոտորակների համար։ Յուրաքանչյուր կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք իր համապատասխան լրացուցիչ արտադրիչով և գումարը ձևափոխենք կոտորակի.

$$\frac{a}{4x}+\frac{b}{12y}-\frac{c}{9xy}=\frac{9ay}{36xy}+\frac{3bx}{36xy}-\frac{4c}{36xy}=\frac{9ay+3bx-4c}{36xy};$$

Օրինակ 2: $\frac{m}{6ab^4}-\frac{n}{8bc^3}+\frac{p}{20a^2b^2c^2}$;

6, 8 և 20 թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է 120-ի։ Այս թվին, որպես արտադրիչներ կցագրենք կոտորակների հայտարարներում գտնվող a, b, c փոփոխականները՝ իրենց ամենամեծ ցուցիչներով, այսինքն՝ a^2, b^4, c^3, Այսպիսով, որպես ընդհանուր հայտարար կարելի է վերցնել $120a^2b^4c^3$ արտահայտությունը։ Գտնենք լրացուցիչ արտադրիչները.

$$\frac{120a^2b^4c^3}{6ab^4}=20ac^3,\quad \frac{120a^2b^4c^3}{8bc^3}=15a^2b^3,\quad \frac{120a^2b^4c^3}{20a^2b^2c^2}=6b^2c$$

և կատարենք գործողությունները.

$$\frac{m}{6ab^4}-\frac{n}{8bc^3}+\frac{p}{20a^2b^2c^2}=\frac{20ac^3m-15a^2b^3n+6b^2cp}{120a^2b^4c^3};$$

Կոտորակների ընդհանուր հայտարարը որոշելիս բավական օգտակար են հետևյալ պարզ ձևափոխությունները. եթե տրված կոտորակի համարիչի կամ հայտարարի նշանը և հենց կոտորակի առջևում դրված նշանը փոխենք հակառակով, ապա նոր կոտորակը նույնաբար հավասար կլինի տրվածին։ Եթե տրված կոտորակի համարիչի և հայտարարի նշանները փոխենք հակառակով, իսկ կոտորակի առջևում դրված նշանը չփոխենք, ապա նոր կոտորակը ևս նույնաբար հավասար կլինի տրվածին։

Իրոք,

$$\frac{a}{b}=(-1)\cdot\frac{(-1)a}{b}=-\frac{-a}{b},\quad \frac{a}{b}=(-1)\cdot\frac{a}{(-1)b}=-\frac{a}{-b},$$

$$\frac{a}{b}=\frac{(-1)a}{(-1)b}=\frac{-a}{-b},$$

Համգունորեն՝

$$\frac{a-b}{c-d}=-\frac{a-b}{d-c}=-\frac{b-a}{c-d}=\frac{b-a}{d-c},$$

Արտադրյալի դեպքում կլինի.

$$ab=-(-a)b=-(-b)a=(-a)(-b),$$

$$abc=-(-a)(-b)(-c)=-ab(-c)=a(-b)(-c),$$

Հանգունորեն՝ $(a-b)(c-d)=-(a-b)(d-c)=(b-a)(d-c),$

Օրինակ 3։ $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{(a-1)^2}=\frac{1}{1-a}+\frac{1}{(1-a)^2}=\frac{2-a}{(1-a)^2}=$

$=\frac{2-a}{(a-1)^2}$ ։

Օրինակ 4։ $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{(a-1)^3}=\frac{1}{1-a}-\frac{1}{(1-a)^3}=\frac{-2a+a^2}{(1-a)^3}=$

$=\frac{a(a-2)}{(1-a)^3}=\frac{a(2-a)}{(a-1)^3}$ ։

Վարժություններ

Պարզեցրեք արտահայտությունները (կոտորակների գումարը կամ տարբերությունը ձևափոխեցեք կոտորակի).

559. ա) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}$, գ) $\frac{2}{x}+\frac{4}{3x}+\frac{5}{3x}$,

բ) $\frac{x}{5a}-\frac{2x}{a}$, դ) $\frac{5x}{6y}+\frac{4x}{3y}-\frac{2x}{2y}$ ։

560. ա) $\frac{3}{a}-\frac{1}{5a}$, գ) $\frac{7}{2b}+\frac{5}{b}+\frac{1}{2b}$,

բ) $\frac{a}{3b}+\frac{4a}{b}$, դ) $\frac{3a}{8x}-\frac{5b}{3x}+\frac{7a}{4x}$ ։

561. ա) $\frac{3c}{a}+\frac{x}{b}$, գ) $\frac{4k}{xy}+\frac{2a}{y}$,

բ) $\frac{2a}{x}-\frac{3b}{y}$, դ) $\frac{7xy}{a}-\frac{3x}{ab}$ ։

562. ա) $\frac{2a}{y}-\frac{b}{x}$, գ) $\frac{3a}{xy}-\frac{2a}{x}$,

բ) $\frac{xy}{c}+\frac{bx}{a}$, դ) $\frac{30}{ab}+\frac{5k}{b}$ ։

563. ա) $\frac{2a}{mn}-\frac{3b}{m^2}$, գ) $\frac{a}{x^2y^3}+\frac{b}{x^3y^2}$,

բ) $\frac{x}{a^2b}+\frac{y}{ab^2}$, դ) $\frac{m}{ax}-\frac{n}{bx}$,

564. ա) $\frac{3a-2b}{a}+\frac{2a^2+2b^2}{ab}$, գ) $\frac{11a-4b}{7a}-\frac{3b+14a}{11b}$,

բ) $\frac{x^2-2ab}{ax}-\frac{3ax-2b^2}{bx}$, դ) $\frac{a+5b}{3a+b}+\frac{2a-4b}{3a+b}$,

565. ա) $\frac{b^2+3ac}{bc}-\frac{ab+4bc}{ac}$, գ) $\frac{8x-19y}{13y}-\frac{13x-9y}{19x}$,

բ) $\frac{2a^2-2b^2}{ab}+\frac{3b-2a}{b}$, դ) $\frac{6a-2b}{2a-7b}-\frac{4a+5b}{2a-7b}$,

566. ա) $\frac{4(1+3a)}{5}+\frac{5(2a-3)}{4}-\frac{2(7a-5)}{3}$,

բ) $\frac{a}{5}-\frac{5}{a}-\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)+\frac{3a^2+30}{10a}$,

գ) $\frac{5(x-y)}{6}-\frac{2(3x-5y)}{3}-\frac{3(3y-2x)}{8}$,

դ) $\frac{6-a^2}{6a}+\frac{2}{a}+\frac{a}{2}-\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)$,

Փոխելով կոտորակի առջևի նշանը, կազմեցեք տրվածին նույնաբար հավասար նոր կոտորակ։

567. ա) $\frac{2}{a-3}$, $-\frac{5a}{6-b}$, գ) $\frac{a-b}{b-1}$, $-\frac{a+b}{b-a}$,

բ) $-\frac{a-3}{2-a}$, $\frac{b+7}{2-b}$, դ) $-\frac{5x}{2y+7}$, $\frac{2y-5}{4x-y}$,

568. ա) $-\frac{3}{3-2x}$, $\frac{6x}{y-7}$, գ) $-\frac{x-y}{x+y}$, $\frac{c-3}{x-c}$,

բ) $\frac{2+y}{3y-1}$, $-\frac{5-a}{a-7}$, դ) $\frac{3b-2a}{a-2b}$, $-\frac{2a}{3k+2}$,

Կոտորակի համարիչը փոխարինելով հակադիր արտահայտությամբ, գրեցեք նոր կոտորակ, որը նույնաբար հավասար լինի տրվածին։

569. ա) $\frac{2a-3}{a+7}$, $\frac{3-5b}{b+3}$, գ) $-\frac{5a-3}{2-7a}$, $\frac{11b-7}{2+3b}$,

բ) $\frac{5y-7}{3-2y}, -\frac{6-x}{x-5}$, դ) $\frac{12-5k}{2k+3}, \frac{a+b}{b-2a}$;

570. ա) $\frac{6-x}{1+x}, \frac{2y-3}{5+y}$, գ) $\frac{4-5y}{2y+9}, -\frac{4x-5}{8-2y}$,

բ) $\frac{a-7}{2-3a}, -\frac{2-3b}{5-7b}$, դ) $\frac{x+y}{2y-5}, \frac{14a-13}{6+5a}$;

Կոտորակի հայտարարը փոխարինելով հակադիր արտահայտությամբ, գրեցեք նոր կոտորակ, որը նույնաբար հավասար լինի տրվածին.

571. ա) $\frac{2a}{2a-1}, \frac{5-b}{6-5b}$, գ) $\frac{5a+b}{4a-1}, -\frac{4x+3}{27-x}$,

բ) $\frac{2x+7}{9-x}, \frac{6-5y}{3y-4}$, դ) $-\frac{a-5y}{y-5a}, \frac{6a+5}{1-7a}$;

572. ա) $\frac{3y}{7-2y}, \frac{8-x}{2x-1}$, գ) $\frac{8+3k}{2k-7}, \frac{2a-4}{4-3a}$,

բ) $\frac{5a+3}{12-5a}, \frac{21-4b}{3b-8}$, դ) $\frac{y-x}{2x-y}, -\frac{2y+9}{3y-1}$;

Կոտորակների գումարը կամ տարբերությունը ձևափոխեցեք կոտորակի և, եթե հնարավոր է, կրճատեցեք.

573. ա) $\frac{7x}{x-y} - \frac{2x}{y-x}$, գ) $\frac{2a+c}{c-1} - \frac{3a-5c}{1-c}$,

բ) $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$, դ) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-a} + \frac{a}{a-b}$;

574. ա) $\frac{a+5}{3a-2} + \frac{7-2a}{2-3a}$, գ) $\frac{5ab+c}{2a-b} - \frac{2c-3ab}{b-2a}$,

բ) $\frac{x+y}{y-x} + \frac{x+y}{x-y}$, դ) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-xy+y^2}{y^2-x^2}$,

575. ա) $\frac{5k+3}{2k-3} - \frac{7k-2}{3-2k} - \frac{3+2k}{2k-3}$, գ) $\frac{5b+2a}{2a-b} - \frac{2a-3b}{b-2a} + \frac{4a-7b}{b-2a}$,

բ) $\frac{3x+9}{x^2-1} + \frac{2x+11}{1-x^2} - \frac{4x-7}{1-x^2}$, դ) $\frac{3x-4y}{x-2y} - \frac{2x-y}{2y-x} + \frac{8y-x}{x-2y}$,

576. ա) $\frac{9+8a}{5-2a} + \frac{3a-2}{2a-5} - \frac{4-2a}{2a-5}$, գ) $\frac{10b-a}{a-2b} - \frac{2a+7b}{2b-a} - \frac{3a-b}{a-2b}$,

բ) $\frac{12-7y}{3y-5}-\frac{3y-8}{5-3y}+\frac{2y+13}{3y-5}$, դ) $\frac{3y-x}{3x-y}+\frac{4x-5y}{y-3x}-\frac{7x+2y}{y-3x}$;

577. ա) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$, գ) $\frac{a}{b+a}-\frac{a}{a-b}$,

բ) $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}$, դ) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

578. ա) $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$, գ) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$,

բ) $\frac{x}{a+b}-\frac{y}{x+y}$, դ) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

579. ա) $\frac{3a-2b}{2ab}-\frac{2b+7c}{3bc}$, գ) $\frac{5x+7y}{12x}+\frac{3x-2y}{4y}-\frac{3x^2-2xy}{3xy}$,

բ) $\frac{8x^3-7}{2x-5}+\frac{3-16x}{4}$, դ) $\frac{2+b}{3}+\frac{7}{2b}+\frac{2b-3}{3+2b}$;

580. ա) $\frac{7x-2y}{5x^2}+\frac{3x-5y}{3xy}$, գ) $\frac{3}{2}-\frac{a-7}{a+1}+\frac{2-a}{a}$,

բ) $\frac{2+a}{5}-\frac{a^2-3}{a+3}$, դ) $\frac{a^2-5ab}{5ab}+\frac{3a-2b}{15b}-\frac{6a-5b}{12a}$;

581. ա) $\frac{5}{2y+2}-\frac{1}{10y-10}-\frac{24}{15+10y}$, բ) $\frac{2}{3ab+a^2}-\frac{4}{a^2-9b^2}-\frac{1}{3b-a}$;

582. ա) $\frac{1}{12-6x}-\frac{1}{5+2x}+\frac{2}{3x+6}$, բ) $\frac{5}{5a+2a^2}-\frac{2}{5-2a}-\frac{20}{4a^2-25}$;

583. ա) $\frac{y^2}{x^2+xy+y^2}+\frac{x}{x-y}-\frac{xy(x+2y)}{x^3-y^3}$,

բ) $\frac{2x+a}{3x-3a}-\frac{a-c}{2a-2c}+\frac{cx-a^2}{a^2-ac+cx-ax}$;

584. ա) $\frac{3x+2y}{9x^2+6xy+4y^2}-\frac{1}{2y-3x}+\frac{6xy}{8y^3-27x^3}$,

բ) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}$,

§ 76. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՈՒՅՆԱԿԱՆ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Մենք գիտենք, որ կոտորակների արտադրյալն ու քանորդը, կոտորակի աստիճանը (տես § 71), ինչպես նաև կոտորակների գումարն ու տարբերությունը (§ 75) կարելի է ձևափոխել այնպիսի կոտորակի, որի համարիչն ու հայտարարը ամբողջ արտահայտություններ են։ Ուստի ինչպիսին էլ լինի ռացիոնալ արտահայտությունը, այն միշտ կարելի է ներկայացնել երկու ամբողջ արտահայտությունների տեսքով, ընդ որում բոլոր ձևափոխությունները կլինեն նույնական։

Երկու ռացիոնալ արտահայտությունների նույնական հավասարությունը, ինչպես նաև երկու ամբողջ արտահայտությունների նույնական հավասարությունը օժտված է փոխանցականության (տես § 68) հատկությամբ։ Բայց ռացիոնալ արտահայտությունների դեպքում կա մի առանձնահատկություն, դա այն է, որ նույնաբար հավասար կոտորակները կարող են ունենալ տարբեր որոշման տիրույթներ։ Դա պարզաբանենք հետևյալ օրինակով։

$\frac{x+1}{x^3+1}$ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք $(x-1)$-ով և գրենք հետևյալ նույնությունը (տես § 70).

$$\frac{x+1}{x^3+1}=\frac{x^2-1}{(x-1)(x^3+1)};$$

Ձևափոխենք երկրորդ կոտորակի հայտարարը. $(x-1)(x^3+1)=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)=(x^2-1)(x^2-x+1)$։ Երկրորդ կոտորակը կրճատենք (x^2-1)-ով և գրենք մեկ այլ նույնություն (տես § 70).

$$\frac{x^2-1}{(x-1)(x^3+1)}=\frac{1}{x^2-x+1};$$

Ռացիոնալ արտահայտությունների նույնական հավասարության փոխանցականության հիման վրա եզրակացնում ենք, որ հավասարությունը

$$\frac{x+1}{x^3+1}=\frac{1}{x^2-x+1}$$

նը ևս նույնություն է։

Առաջին երկու նույնությունների աջ և ձախ մասերը $x=1$ և $x=-1$ դեպքերում չունեն համապատասխան արժեքներ։ Փոխանցականության հիման վրա ստացված նույնությունում $x=-1$ դեպքում դարձյալ չկան համապատասխան արժեքներ։ Բայց $x=1$ դեպքում երևան եկան համապատասխան արժեքներ, որոնք պետք է հավասար լինեն։ Եվ իրոք, նույ-

նության երկու մասերն էլ $x=1$ դեպքում ընդունում են միևնույն 1-ի հավասար արժեք։ Ուստի անհրաժեշտ չէ հետևել այն բանին, թե ռացիոնալ արտահայտությունների նույնական հավասարություններից մեկից մյուսին անցնելիս ինչպես է փոխվում կոտորակի որոշման տիրույթը։

Վարժություններ

Հետևյալ ռացիոնալ արտահայտությունները ձևափոխեցեք երկու ամբողջ արտահայտությունների հարաբերության.

585. ա) $\left(\frac{5x}{x-y}+5\right)\left(1-\frac{x-y}{x+y}\right)$, գ) $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right):\frac{a^2+b^2}{b^2-ab}$,

բ) $\frac{c^2}{c^2+ab}\cdot\left(\frac{a+c}{a}-\frac{c-b}{c}\right)$, դ) $\left(\frac{a}{b-a}+1\right):\left(\frac{b}{a+b}-1\right)$;

586. ա) $\left(7-\frac{7y}{x+y}\right)\left(1+\frac{x+y}{x-y}\right)$, գ) $\left(\frac{b}{a+b}-\frac{a}{a-b}\right):\frac{a^2+b^2}{ab+b^2}$,

բ) $\frac{x^2}{x^2-ay}\cdot\left(\frac{y-x}{x}+\frac{a-x}{a}\right)$, դ) $\left(\frac{ab}{b-a}+b\right):\left(b-\frac{ab}{a+c}\right)$;

587. ա) $\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right)$,

բ) $\frac{a^2+b^2}{a+b}:\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{b-a}{a}\right)$,

գ) $\left(\frac{3}{2a+2b}+\frac{a}{ac+bc}\right):\frac{9bc+6ac}{5a^2+5ab}$,

դ) $\left(\frac{a-5}{a+5}+\frac{a+5}{a-5}\right):\left(\frac{a+5}{a-5}-\frac{a-5}{a+5}\right)$;

588. ա) $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}-1\right)\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}; -1\right)$,

բ) $\frac{a^2+b^2}{b-a}:\left(\frac{a+b}{a}+\frac{2a}{b-a}\right)$,

գ) $\left(\frac{a}{bc-ac}+\frac{3}{2a-2b}\right):\frac{8ac-12bc}{7ab-7a^2}$,

դ) $\left(\frac{3+x}{3-x}-\frac{x-3}{x+3}\right):\left(\frac{x+3}{x-3}-\frac{3-x}{3+x}\right)$,

589. ա) $\dfrac{\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}}{a^2-ab+b^2}$,

բ) $\left(\dfrac{b^2+25}{b}-5\right)\cdot\dfrac{25-b^2}{b^3+125}:\left(\dfrac{1}{b}-0,2\right)$,

գ) $\dfrac{y-\dfrac{x^2}{x+y}}{x-\dfrac{y^2}{x+y}}$,

դ) $\left(\dfrac{3}{b-6}+b-2\right)\left(1-b-\dfrac{6}{b-6}\right)$,

590. ա) $\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{y-x}}{4xy}$,

բ) $\left(\dfrac{a}{a+2}+a+2\right):\left(\dfrac{1}{2+a}-a-2\right)$,

գ) $\dfrac{a-\dfrac{b^2}{a-b}}{\dfrac{a^2}{a-b}-b}$,

դ) $\left(\dfrac{a^2+9}{a}+3\right)\left(3-\dfrac{9}{a+3}\right):\dfrac{a^3-27}{9-a^2}$,

591. ա) $\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a}\right):\left(\dfrac{b^2}{a+b}+a\right)$,

բ) $\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1-x}{y}-1\right)\left(\dfrac{y-x}{x}-\dfrac{2y}{x-y}\right)$,

գ) $\left(a+\dfrac{4b^2}{b-a}-b\right):\left(a-\dfrac{4b^2}{a-b}-b\right)$,

դ) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}}$,

592. ա) $\left(\frac{ab-a^2}{ab-1}-1\right):\left(a-\frac{a-b}{ab+1}\right)$,

բ) $\left(1+\frac{x}{y^2}+\frac{x+1}{y}\right)\left(\frac{2y}{x+y}-\frac{x+y}{x}\right)$,

գ) $\left(a-\frac{b^2}{a+3b}+3b\right):\left(b-\frac{a^2}{a+6b}\right)$,

դ) $\dfrac{\frac{b}{b-a}-\frac{a+b}{b}}{\frac{b}{a+b}-\frac{b-a}{b}}$;

593. ա) $\left(\frac{1}{2a-b}+\frac{2a}{b^2-4a^2}\right):\left(\frac{4a^2}{b^2+4a^2+4ab}-\frac{2a}{b+2a}\right)$,

բ) $\frac{4}{y-4}+\frac{8-y}{y^3-64}:\frac{y-8}{16y+4y^2+y^3}$,

գ) $\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\cdot\frac{1-x^2}{y+1}:\frac{x^2+x}{1-y^2}$,

դ) $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}-\frac{x+y}{x-y}\right)$;

594. ա) $\left(\frac{a+b}{5a}-a-b\right):\frac{a+b}{7}-\frac{7}{5a}$,

բ) $\frac{1}{1+2a+3b}-\left(1+\frac{1+6b}{9b^2-4a^2}\right):\left(\frac{9b^2+6b-4a^2+1}{3b-2a}\right)$,

գ) $\left(\frac{1}{a-2b}+\frac{2b}{4b^2-a^2}\right):\left(\frac{4b^2}{a^2+4b^2+4ab}-\frac{2b}{2b+a}\right)$,

դ) $\left(\frac{y}{y+1}-1\right)\cdot\frac{1-x^2}{y-y^2}\cdot\frac{1-y^2}{1-x}$;

595. ա) $\left(\frac{a-b}{5a}-a+b\right):\frac{b-a}{8}+\frac{8}{5a}$,

բ) $\left(\frac{x^2+1}{1+2x}-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x+3}{2-x}\right)$,

գ) $\frac{5+4a^2}{2a+1}+\frac{1-10a}{4a^2+10a}\cdot\left(\frac{2a+5}{1+2a}-\frac{5+2a}{1-10a}\right)$,

դ) $\frac{(x+y)^2-4xy}{2x}\cdot\frac{x^2+xy}{6xy}\cdot\frac{3x}{x^2-y^2}$։

596. ա) $\left(\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x+y}{x-y}\right)$,

բ) $\frac{7c^4}{a^2b-b^3}\cdot\left(\frac{bc}{c-b}+c\right)\cdot\frac{(b-c)(b-a)}{c}$,

գ) $\frac{2k^2-7}{2+k}-\frac{2+7k}{6k^2+9k}\cdot\left(\frac{2k+3}{2k+4}-\frac{2k+3}{14k+4}\right)$,

դ) $\left(\frac{3-b}{2+b}-1\right)\left(\frac{b}{2}-\frac{1+b^2}{2b-1}\right)$։

Ապացուցեք, որ հետևյալ արտահայտությունների արժեքները կախված չեն փոփոխականների արժեքներից.

597. $\left(\frac{2a+3}{4a^2-16}+\frac{21+2a}{16-16a+4a^2}\right):\left(\frac{3+a}{a-2}\right)^2-\frac{3a+7}{2+a}$։

598. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{2x^2y^2}{(x+y)^3}+\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$։

§ 77. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՀԱՅՏԱՐԱՐՈՒՄ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Անցնենք այնպիսի հավասարումների դիտարկմանը, որոնք պարունակում են կոտորակային արտահայտություններ, ընդ որում փոփոխականը գտնվում է մեկ կամ մի քանի կոտորակների հայտարարներում։

Այդպիսի հավասարումը (որը երբեմն անվանում են կոտորակային հավասարում) լուծելու համար վարվենք հետևյալ կերպ։ Տրված հավասարումը բերենք այնպիսի տեսքի, որտեղ ձախ մասը լինի կոտորակ, իսկ աջ մասը՝ զրո, այսինքն $\frac{u}{v}=0$ *տեսքի։*

Կոտորակի համարիչը հավասարեցնենք զրոյի և գտնենք համարիչի արմատները։ Եթե համարիչն արմատ չունի, ապա տրված հավասարումը ևս արմատ չունի։ Այնուհետև համարիչի յուրաքանչյուր արմատը տեղադրենք հայտարարում՝ փոփոխականի փոխարեն, և պարզենք, թե այդ դեպքում հայտարարը արդյո՞ք զրո չի դառնում։

Եթե համարիչի արմատը հայտարարը զրո չի դարձնում, ապա այն տրված հավասարման արմատ է։ Իսկ եթե փոփոխականի որևէ արժեք կոտորակի հայտարարը զրո է դարձնում, ապա այն ընդհանրապես չի պատկանում կոտորակի որոշման տիրույթին և առավել ևս չի կարող տրված հավասարման արմատ լինել (տես § 69)։

Օրինակ 1: Լուծել $\frac{5-9x}{3x-2}=0$ հավասարումը։

Լուծում: $5-9x=0$, $x=\frac{5}{9}$։ Պարզենք, թե կոտորակի հայտարարը արդյոք զրո չի՞ դառնում $x=\frac{5}{9}$ դեպքում։ Տեղադրենք՝ $3\cdot\frac{5}{9}-2=\frac{5}{3}-2\neq0$։ Այսպիսով, $x=\frac{5}{9}$ դեպքում $\frac{5-9x}{3x-2}$ կոտորակը իմաստ ունի և արժեքն էլ հավասար է զրոյի։ Հետևաբար, $\frac{5}{9}$-ը տրված հավասարման արմատն է։ Արմատների բազմությունը կազմված է մեկ տարրից։

Պատասխան. $\left\{\frac{5}{9}\right\}$,

Օրինակ 2: $\frac{4}{2x-1}+\frac{7}{2x+1}-\frac{30}{4x^2-1}=0$,

$$\frac{4(2x+1)+7(2x-1)-30}{4x^2-1}=0,$$

$$\frac{22x-33}{4x^2-1}=0,\ 22x-33=0,\ x=\frac{3}{2},$$

Այնուհետև, $x=\frac{3}{2}$ դեպքում կստանանք՝ $2x-1=2\neq0$; $2x+1=4\neq0$,

Պատասխան. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$,

Օրինակ 3: $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-3}{x+2}=\frac{4(2x-1)}{x^2-4}$,

$$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-3}{x+2}-\frac{4(2x-1)}{x^2-4}=0,$$

$$\frac{x^2+3x+2-x^2+5x-6-8x+4}{x^2-4}=0,\qquad \frac{0\cdot x}{x^2-4}=0,$$

Հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ արմատներ։ Արմատ կարող է լինել ցանկացած թիվ՝ բացի 2-ից և —2-ից։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. $\{x \mid x \neq 2,\ x \neq -2\}$։

Օրինակ 4: $\dfrac{6x+1}{9(x+2)} = \dfrac{4(x-1)}{6x+5}$,

$$\frac{6x+1}{9(x+2)} - \frac{4(x-1)}{6x+5} = 0, \quad \frac{77}{9(x+2)(6x+5)} = 0։$$

x փոփոխականի ոչ մի արժեքի դեպքում կոտորակը զրո չի դառնում։ Հավասարումն արմատ չունի։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. $\varnothing$։

Վարժություններ

Փոփոխականի ո՞ր արժեքների դեպքում են հետևյալ արտահայտությունները հավասարվում զրոյի.

599. ա) $\dfrac{x-2}{x+7}$, $\dfrac{3+y}{5y}$, գ) $\dfrac{3y-6}{1-y}$, $\dfrac{3+5x}{x+1}$,

բ) $\dfrac{a+5}{9}$, $\dfrac{9-b}{b-3}$, դ) $\dfrac{12+3b}{b(2b-8)}$, $\dfrac{a(6a-7)}{2a+3}$։

600. ա) $\dfrac{x+5}{2a}$, $\dfrac{b-3}{5-b}$, գ) $\dfrac{2y-8}{3+y}$, $\dfrac{10+5k}{3k-1}$,

բ) $\dfrac{c-7}{2+3c}$, $\dfrac{8+x}{2x+1}$, դ) $\dfrac{x(2+3x)}{2x+9}$, $\dfrac{7y-12}{y(14-y)}$։

Փոփոխականի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում հետևյալ արտահայտություններն իմաստ չունեն.

601. ա) $\dfrac{2y+8}{y}$, $\dfrac{4a+5}{2-a}$, գ) $\dfrac{8+7y}{2y-5}$, $\dfrac{1-a}{3a+7}$։

բ) $\dfrac{5-x}{2x+4}$, $\dfrac{2a}{3a-6}$, դ) $\dfrac{b(3b-1)}{6+5b}$, $\dfrac{2c+7}{c(18-4c)}$։

602. ա) $\dfrac{2b+1}{b}$, $\dfrac{7-3a}{a-4}$, գ) $\dfrac{6+y}{2y-5}$, $\dfrac{3b-2}{15+7b}$,

բ) $\dfrac{4c}{4-2c}$, $\dfrac{6+3x}{8x+16}$, դ) $\dfrac{2x-11}{x(8+3x)}$, $\dfrac{k(9+5k)}{3k-4}$,

Ապացուցեք, որ հետևյալ հավասարումներն արմատներ չունեն.

603. ա) $\frac{2x-1}{x+3}=\frac{2x-4}{x+3}$, գ) $\frac{2x+1}{x-3}=\frac{5-4x}{3-x}+5$,

բ) $\frac{16+3x}{x-7}=\frac{5x+2}{x-7}$, դ) $\frac{x-15}{x-2}-\frac{8}{3}=\frac{2x+9}{2-x}+13{,}2$.

604. ա) $\frac{3x+25}{x+8}+7=\frac{x+9}{x+8}$, գ) $\frac{3x+4}{x-3}=\frac{2-6x}{3-x}-3$,

բ) $\frac{3x+10}{x+5}=\frac{x+6}{x+5}+2$, դ) $\frac{x-18}{x-5}-\frac{8}{3}=\frac{2x+3}{5-x}+13{,}2$.

Լուծեցեք հավասարումները.

605. ա) $\frac{2}{x+5}=\frac{1}{3}$, բ) $\frac{x+3}{x-3}=\frac{5}{2}$,

606. ա) $\frac{2}{b-3}=\frac{3}{b-2}$, բ) $\frac{2-a}{6-a}=\frac{a}{a-5}$,

607. ա) $\frac{18+a}{7}-\frac{a-10}{3}=\frac{6a+24}{2+a}-\frac{23+4a}{21}$, բ) $\frac{2b+1}{3b-15}+\frac{11-b}{2b-10}=1$,

608. ա) $\frac{9a^2-3a-15}{15a^2+a-25}=\frac{3}{5}$, բ) $\frac{2}{2(x+3)}+\frac{5}{3+x}=\frac{x-4}{2(x+3)}$,

609. ա) $\frac{2t+5}{6t-4}=\frac{t+1}{3t-2}$, բ) $\frac{4m+1}{2m-3}=\frac{6m-5}{3m+4}$,

610. ա) $\frac{6y+5}{2-3y}=\frac{3-4y}{2y+7}$, բ) $\frac{3-4x}{5-8x}=\frac{2x+9}{1+4x}$,

611. ա) $\frac{2y}{1+y}=5-\frac{3y}{y+2}$, բ) $\frac{25+7c}{3c+5}-\frac{2c+15}{6c-5}=2$,

612. ա) $\frac{15+10y^2}{2y-1}+1=\frac{56+7y}{2y+1}+5y$, բ) $\frac{21}{x+1}+\frac{33}{1-x^2}=\frac{4}{1-x}$,

613. ա) $\frac{y-3}{3+y}-2=\frac{-7-3y}{3y+1}$, բ) $\frac{6a^2+5a-3}{8a^2-7a-4}=\frac{3}{4}$,

614. ա) $\frac{3y}{2-3y}+2=\frac{9-2y}{5-2y}$, բ) $\frac{3a+7}{2+3a}=5-\frac{5+8a}{2a+5}$,

615. ա) $\frac{3x-10}{x-4}=7-\frac{17+4x}{x+3}$, բ) $\frac{1-y}{y+1}-\frac{1+y}{1-y}=\frac{8}{y^2-1}$,

616. ա) $\frac{1+a}{a-1}-\frac{8}{a^2-1}=\frac{a-1}{a+1}$, բ) $\frac{6}{2+c}+\frac{c^2}{c^2-4}-\frac{2+c}{c-2}=0$։

Լուծեցեք խնդիրները.

617. Կոտորակի հայտարարը 5-ով մեծ է համարիչից։ Եթե համարիչին ավելացնենք 2, իսկ հայտարարից հանենք 5, ապա կստացվի 2։ Գտեք կոտորակը։

618. Մեքենագրուհիներից մեկը հոդվածը կարող է մեքենագրել 5 ժ-ում, իսկ մյուսը՝ 7 ժ-ում։ Մեքենագրուհիները գործը որքա՞ն ժամանակում կավարտեն, եթե աշխատեն միասին։

619. Երկու բանվորներ միասին աշխատելով առաջադրանքը կարող են կատարել 3 ժ 30 ր-ում։ Եթե աշխատի միայն առաջին բանվորը, ապա առաջադրանքը կկատարի 6 ժ-ում։ Այդ առաջադրանքը որքա՞ն ժամանակում կկատարի երկրորդ բանվորը։

620. M վայրից միաժամանակ դուրս եկան և 108 կմ հեռավորության վրա գտնվող N վայրը մեկնեցին հեծանվորդն ու մոտոցիկլավարը։ Մոտոցիկլավարի արագությունը 4,5 անգամ մեծ էր հեծանվորդի արագությունից, ուստի նա N վայրը հասավ 7 ժ շուտ։ Գտեք հեծանվորդի և մոտոցիկլավարի միջին արագությունները։

621. Ավտոբուսը A քաղաքից մեկնեց դեպի 400 կմ հեռավորության վրա գտնվող B քաղաքը։ Երեք ժամ հետո նրա ետևից մեկնեց մոտոցիկլավարը, որի արագությունը 1,6 անգամ մեծ է ավտոբուսի արագությունից։ Գտեք ավտոբուսի և մոտոցիկլավարի միջին արագությունները, եթե հայտնի է, որ նրանք տեղ հասան միաժամանակ։

622. Անտառահատների բրիգադը որոշակի ժամկետում պետք է կտրեր 200 $м^3$ փայտ։ 4 օր աշխատելուց հետո բրիգադը համալրվեց նոր մարդկանցով, որի շնորհիվ սկսեց օրական 20 %-ով ավելի կտրել և առաջադրանքը կատարեց ժամկետից 1 օր շուտ։ Որքա՞ն էր բրիգադի փայտ կտրելու օրական նորման սկզբում։

Ինքնուրույն աշխատանք № 4

1. Լուծեցեք $\frac{24}{x}-1=\frac{x-17}{1-x}$ հավասարումը։

2. Պարզեցրեք

$$\frac{6}{1-x}-\frac{1-2x}{1+x+x^2}-\frac{3x-5-4x^2}{x^3-1}$$

արտահայտությունը և գտեք նրա արժեքը $x=-2$ դեպքում։

3. Ապացուցեք, որ

$$3\cdot\left(\frac{k+1}{9k^2-16}+\frac{k+7}{(3k-4)^2}\right):\left(\frac{6+3k}{3k-4}\right)^2-\frac{6k+10}{4+3k}$$

արտահայտությունը ընդունում է միևնույն արժեքը փոփոխականի բոլոր այն արժեքների դեպքում, որոնցում որոշված է։

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ինչպիսի՞ արտահայտությունն է կոչվում ռացիոնալ արտահայտություն։ Ինչպիսի՞ ռացիոնալ արտահայտությունն է կոչվում ամբողջ և ինչպիսին՝ կոտորակային։

2. Ինչպիսի՞ արտահայտությունն է կոչվում կոտորակ։ Բերեք կոտորակի օրինակ և այնպիսի կոտորակային արտահայտության օրինակ, որը կոտորակ չէ։

3. Ի՞նչ է կոտորակի որոշման տիրույթը։ Բերեք կոտորակի օրինակ և գրեք նրա որոշման տիրույթը։

4. Ձևակերպեցեք կոտորակի հիմնական հատկությունը։ Կարո՞ղ են արդյոք երկու նույնաբար հավասար կոտորակներ ունենալ տարբեր որոշման տիրույթներ։

5. Երկու կոտորակների արտադրյալը կամ քանորդը ինչպե՞ս ձևափոխել կոտորակի։

6. Կոտորակի աստիճանը ինչպե՞ս ձևափոխել կոտորակի։

7. Ձևակերպեցեք a թվի n ցուցիչով աստիճանի սահմանումը հետևյալ դեպքերի համար. 1) $n\in N, n>1$; 2) $n=1$; 3) $n=0$, $a\neq 0$; 4) n-ը ամբողջ բացասական թիվ է, $a\neq 0$։

8. Գրեցեք ամբողջ ցուցիչով աստիճանների հինգ հատկությունները։

9. Դրական թվի ինչպիսի՞ գրառումն է կոչվում նրա ստանդարտ տեսք։ Ի՞նչ է թվի կարգը։

10. Միևնույն կամ տարբեր հայտարարներով կոտորակների գումարը կամ տարբերությունը ինչպես ձևափոխել կոտորակի։

11. Ի՞նչ հաջորդականությամբ են լուծվում կոտորակի հայտարարում փոփոխական պարունակող հավասարումները։

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

§ 78. ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ ԵՎ ՆՐԱ ԳՐԱՖԻԿԸ

$ax=b$ տեսքի հավասարումը կոչվում է մեկ փոփոխականով գծային հավասարում։ Այդ հավասարման մեջ x-ը փոփոխականն է, a-ն՝ փոփոխականի գործակիցը, b-ն՝ ազատ անդամը (տես § 53)։

$ax+by=c$ տեսքի հավասարումը, որտեղ x-ը և y-ը փոփոխականներ են, a-ն և b-ն՝ փոփոխականների գործակիցները, իսկ c-ն՝ ազատ անդամը, **կոչվում է երկու փոփոխականով գծային հավասարում:**

Դիցուք տրված է $2x-7y=16$ հավասարումը։ Եթե x-ի և y-ի փոխարեն տեղադրենք համապատասխանաբար 1 և -2 կամ 8 և 0 թվերը, ապա հավասարումը կվերածվի ճիշտ հավասարության՝ $2+14=16$ կամ $16-0=16$։ Եթե տեղադրենք -2 և 1 կամ 3 և -1 թվերը՝ կհանգենք սխալ հավասարության՝ $-11=16$ կամ $13=16$։

Թվերի այնպիսի զույգը, որտեղ նշված է, թե որ թիվն է համարվում առաջին և որը՝ երկրորդ, մենք անվանել ենք կարգավորյալ թվազույգ (տես § 40)։

Այսպիսով, $(1; -2)$ և $(8; 0)$ թվազույգերը $2x-7y=16$ հավասարումը վերածում են ճիշտ հավասարության, կամ բավարարում են այդ հավասարմանը, իսկ $(-2; 1)$ և $(13; -1)$ թվազույգերը հավասարումը չեն վերածում ճիշտ հավասարության, կամ չեն բավարարում նրան։

Սահմանում։ Այն կարգավորյալ թվազույգը, որը երկու փոփոխականով հավասարումը վերածում է ճիշտ հավասարության, կոչվում է այդ հավասարման լուծում:

$(1; -2)$ թվազույգը $2x-7y=16$ հավասարման լուծումն է, իսկ $(3; -1)$ թվազույգը՝ ոչ։

Հավասարման արմատ տերմինը վերաբերում է միայն մեկ փոփոխականով հավասարումներին։ **Հավասարման լուծում** տերմինը վերաբերում է ինչպես մեկ, այնպես էլ մի քանի փոփոխականով հավասարումներին։

Լուծել երկու փոփոխականով հավասարումը, նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումների բազմությունը:

Մենք արդեն գտանք $2x-7y=16$ հավասարման երկու լուծում։ Նրա մյուս լուծումները կարելի է գտնել հետևյալ կերպ. x փոփոխականին

տանք կամայական արժեք, օրինակ 12։ Հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք 12, կստանանք մեկ փոփոխականով գծային հավասարում՝ $24-7y=16$ կամ $y=\frac{8}{7}$։ $\left(12; \frac{8}{7}\right)$ թվազույգը տրված հավասարման լուծումն է։ Հանգունորեն y փոփոխականին տանք կամայական արժեք, օրինակ 2։ Հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք 2, կստանանք $2x-14=16$ հավասարումը, որտեղից $x=15$։ (15; 2) թվազույգը ևս տրված հավասարման լուծումն է։

Այստեղից պարզ է, որ $2x-7y=16$ գծային հավասարումն ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ։

Աղյուսակի ձևով գրենք տրված հավասարման մի քանի լուծումներ.

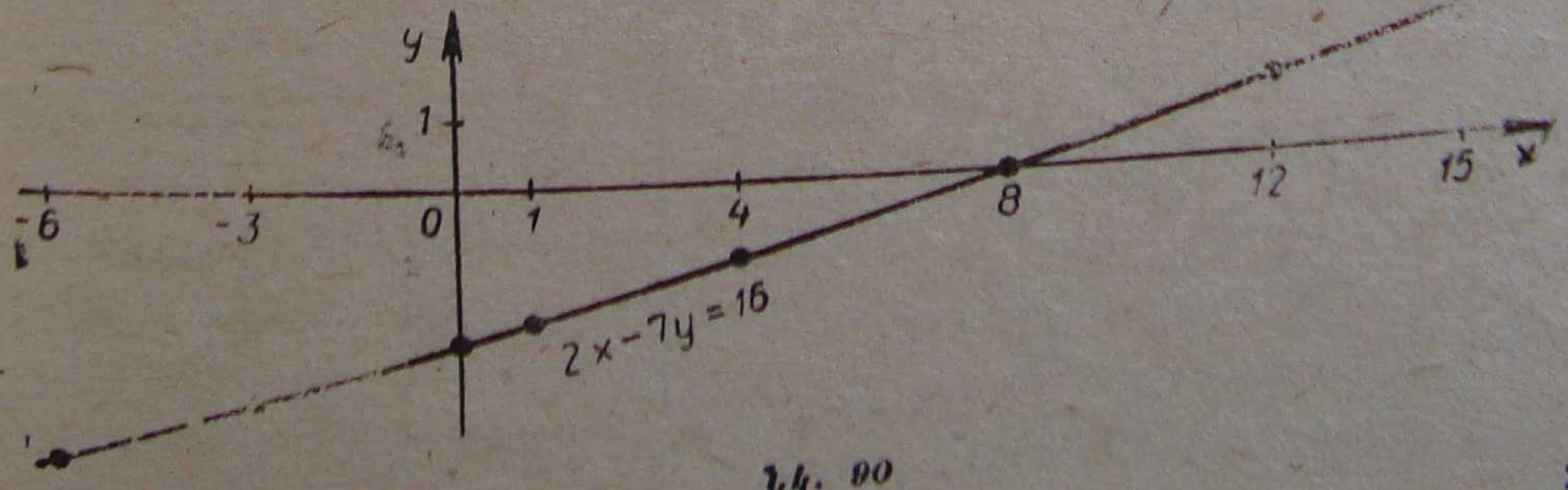
x	-6	-3	0	1	4	8	12	15
y	-4	$-\frac{22}{7}$	$-\frac{16}{7}$	-2	$-\frac{8}{7}$	0	$\frac{8}{7}$	2

Հավասարման յուրաքանչյուր լուծում կարելի է կոորդինատային հարթության վրա պատկերել կետի տեսքով։ Կառուցենք այդ կետերը (նկ. 90)։ Մենք տեսնում ենք, որ դրանք բոլորը պատկանում են միևնույն ուղղին։

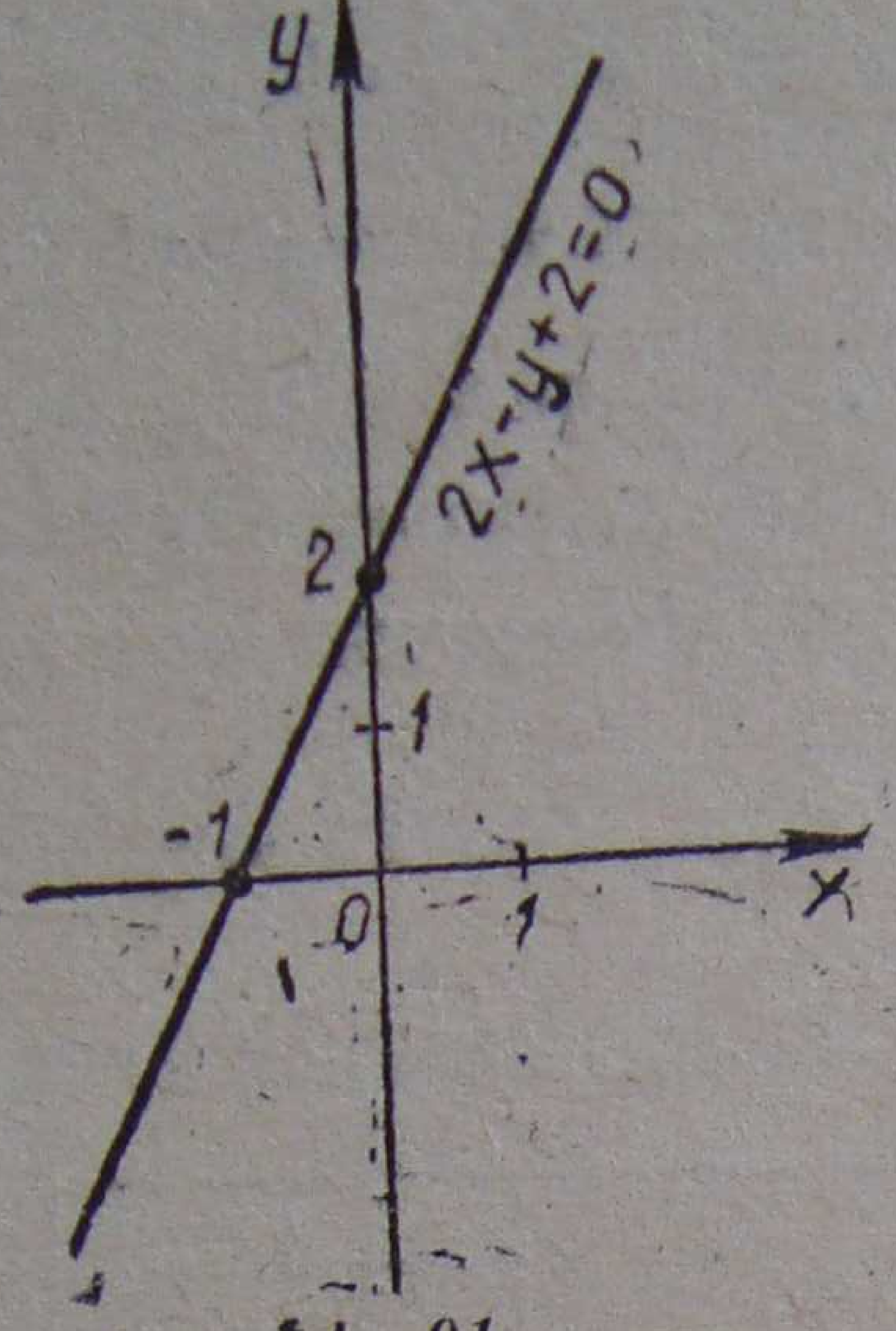
Երկու փոփոխականով հավասարման գրաֆիկ կոչվում է կոորդինատային հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները այդ հավասարման լուծումներն են։

Այսպիսով, $2x-7y=16$ գծային հավասարման համար որպես գրաֆիկ է ծառայում ուղիղ գիծը։ Հանգունորեն կարելի է կառուցել $2x-y+2=0$ հավասարման գրաֆիկը։ Դրա համար բավական է կառուցել գրաֆիկին պատկանող որևէ երկու կետ, օրինակ (0; 2) և (—1; 0) կետերը, և դրանցով տանել ուղիղ գիծ (ճշտությունն ապահովելու համար ցանկալի է վերցնել ևս մեկ կետ, օրինակ (1; 4) (նկ. 91)։

Դիցուք $ax+by=c$ գծային հավասարման փոփոխականներից որևէ մեկի գործակիցը հավասար է զրոյի, իսկ մյուսի գործակիցը տարբեր է զրոյից։ Հնարավոր է երկու դեպք։



Նկ. 90



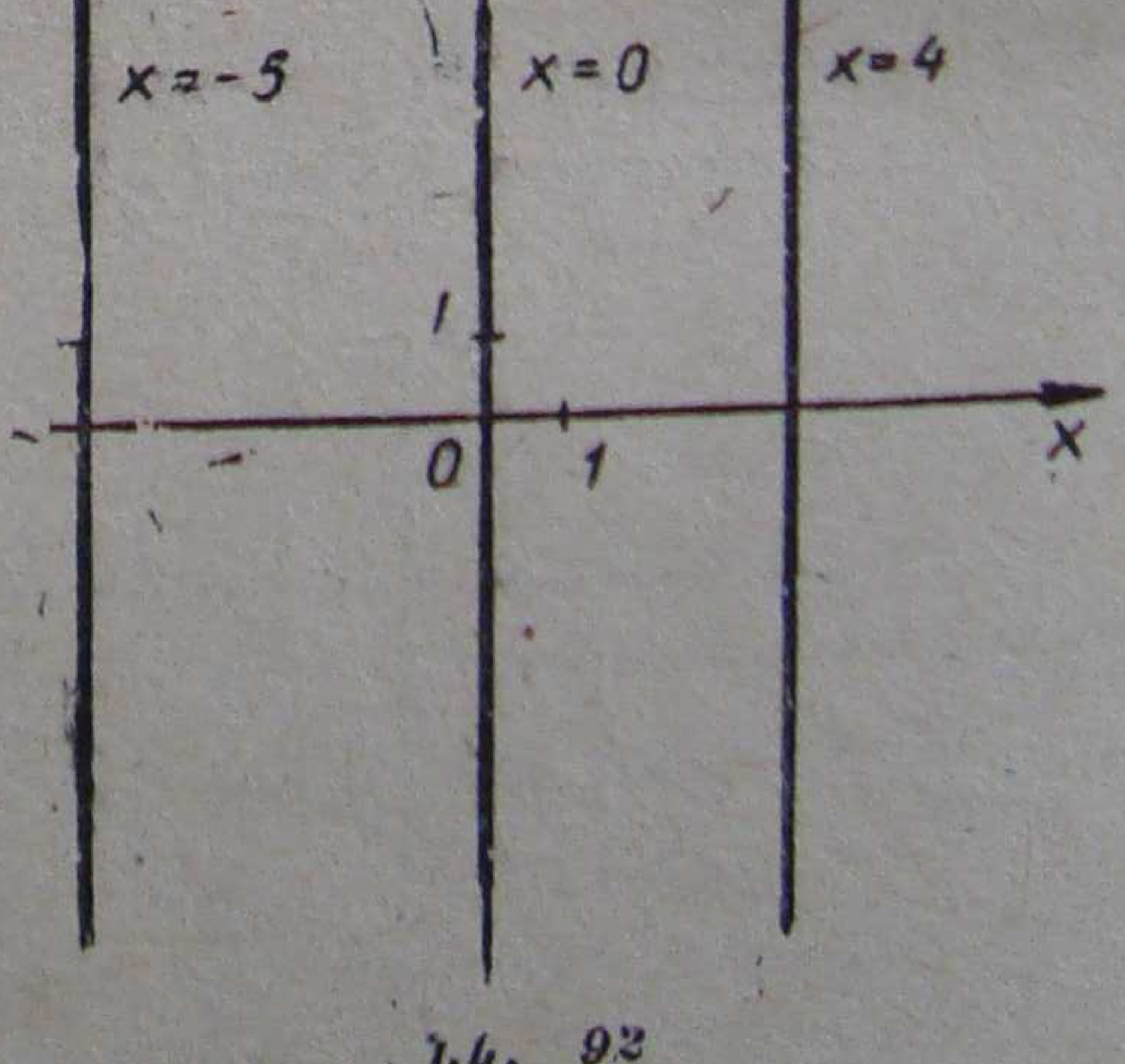
Նկ. 91

1-ին դեպք: Եթե $a=0$, $b\neq 0$, ապա հավասարումն ընդունում է $0\cdot x+by=c$ տեսքը, որտեղից՝ $by=c$, $y=\frac{c}{b}$, Այս հավասարման լուծում է ամեն մի $(x; \frac{c}{b})$ թվազույգ, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է։ Հավասարման գրաֆիկը ուղիղ գիծ է, որը զուգահեռ է 0x առանցքին և 0y առանցքը հատում է $(0; \frac{c}{b})$ կետում։ $c=0$ դեպքում գրաֆիկը ձուլվում է 0x առանցքին; $y=0$-ն 0x առանցքի հավասարումն է (Նկ. 81)։

2-րդ դեպք: $a\neq 0$, $b=0$։ Հավասարումն ընդունում է $ax+0\cdot y=c$ տեսքը, որտեղից՝ $ax=c$, $x=\frac{c}{a}$։ Այս հավասարման լուծում է ամեն մի $\left(\frac{c}{a}; y\right)$ թվազույգ, որտեղ y-ը ցանկացած թիվ է։ Հավասարման գրաֆիկը ուղիղ գիծ է, որը զուգահեռ է 0y առանցքին և 0x առանցքը հատում է $(\frac{c}{a}; 0)$ կետում։ $c=0$ դեպքում գրաֆիկը ձուլվում է 0y առանցքին։ $x=0$-ն 0y առանցքի հավասարումն է։ 92-րդ նկարում պատկերված են $x=-5$, $x=0$, $x=4$ հավասարումների գրաֆիկները։

Հետևություն: $ax+by=c$ հավասարման գրաֆիկը ուղիղ գիծ է, եթե փոփոխականների գործակիցներից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի:

Հավասարման գրաֆիկի հասկացությունը տարբերվում է ֆունկցիայի գրաֆիկի հասկացությունից (§ 41)։ Այսպես, օրինակ, $x=4$ հավասարման գրաֆիկը (Նկ. 92) ոչ մի ֆունկցիայի գրաֆիկ չէ։



Նկ. 92

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ x և y փոփոխականների գործակիցներից երկուսն էլ հավասար են զրոյի։

ա) Եթե $a=b=c=0$, ապա հավասարումն ընդունում է $0\cdot x+0\cdot y=0$ տեսքը։ Նրան բավարարում է ցանկացած (x; y) թվազույգ։ Հավասարումն ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ։

բ) Դիցուք $a=b=0$, $c\neq 0$, ընդու-

նենք, օրինակ, $c=1$։ Հավասարումն ընդունում է $0\cdot x+0\cdot y=1$ տեսքը։ Այս հավասարումը չունի ոչ մի լուծում։

$ax+by=c$ տեսքի գծային հավասարումը, պայմանով, որ փոփոխականների գործակիցներից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի, կոչվում է երկու փոփոխականով առաջին աստիճանի հավասարում։

Վարժություններ

Գտեք հավասարման մի քանի լուծում և կառուցեք գրաֆիկը.

623. ա) $2x+3y-6=0$, գ) $x+5=0$,

բ) $2x-3y-6=0$, դ) $y-4=0$։

624. ա) $2x-3y+6=0$, գ) $x-4=0$,

բ) $2x+3y+6=0$, դ) $y+5=0$։

§ 79. ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԵՐԿՈՒ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ ԵՎ ՆՐԱ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Տրված է x և y փոփոխականներով երկու գծային հավասարում՝ $a_1x+b_1y=c_1$ և $a_2x+b_2y=c_2$։ Սրանցից կազմենք հավասարումների համակարգ:

Երկու փոփոխականով երկու հավասարումների համակարգը դա պարզապես երկու հավասարումներ են, որտեղ ենթադրվում է, որ համակարգի երկու հավասարումներում էլ միևնույն տառը նշանակում է միևնույն մեծությունը:

Համակարգը նշանակելու համար օգտագործվում է ձևավոր փակագիծ։

Երկու փոփոխականով երկու գծային հավասարումների համակարգն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Երկու փոփոխականով հավասարումների համակարգի լուծում է կոչվում այնպիսի կարգավորյալ թվազույգը, որը լուծում է համակարգի յուրաքանչյուր հավասարման համար։

Լուծել հավասարումների համակարգը, նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումների բազմությունը:

Նախ դիտարկենք գծային հավասարումների համակարգի լուծման գրաֆիկական եղանակը: Եթե համակարգի հավասարումներից յուրաքանչյուրի փոփոխականների գործակիցներից գոնե մեկը հավասար չէ

գրոյի, ապա կոորդինատային հարթության վրա կարելի է կառուցել այդ երկու հավասարումների գրաֆիկներն ու այնուհետև դիտարկել դրանց փոխդասավորությունը։

Բերենք գծային հավասարումների համակարգերի երեք օրինակ։

1. $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2. \end{cases}$

Գրաֆիկները հատվում են միմիայն M(3; 1) կետում (նկ. 93)։ Համակարգն ունի միակ լուծում՝ $x=3$, $y=1$։

2. $\begin{cases} x+y=4, \\ x+y=1. \end{cases}$

Գրաֆիկները զուգահեռ են և չեն հատվում (նկ. 94)։ Համակարգը չունի ոչ մի լուծում։

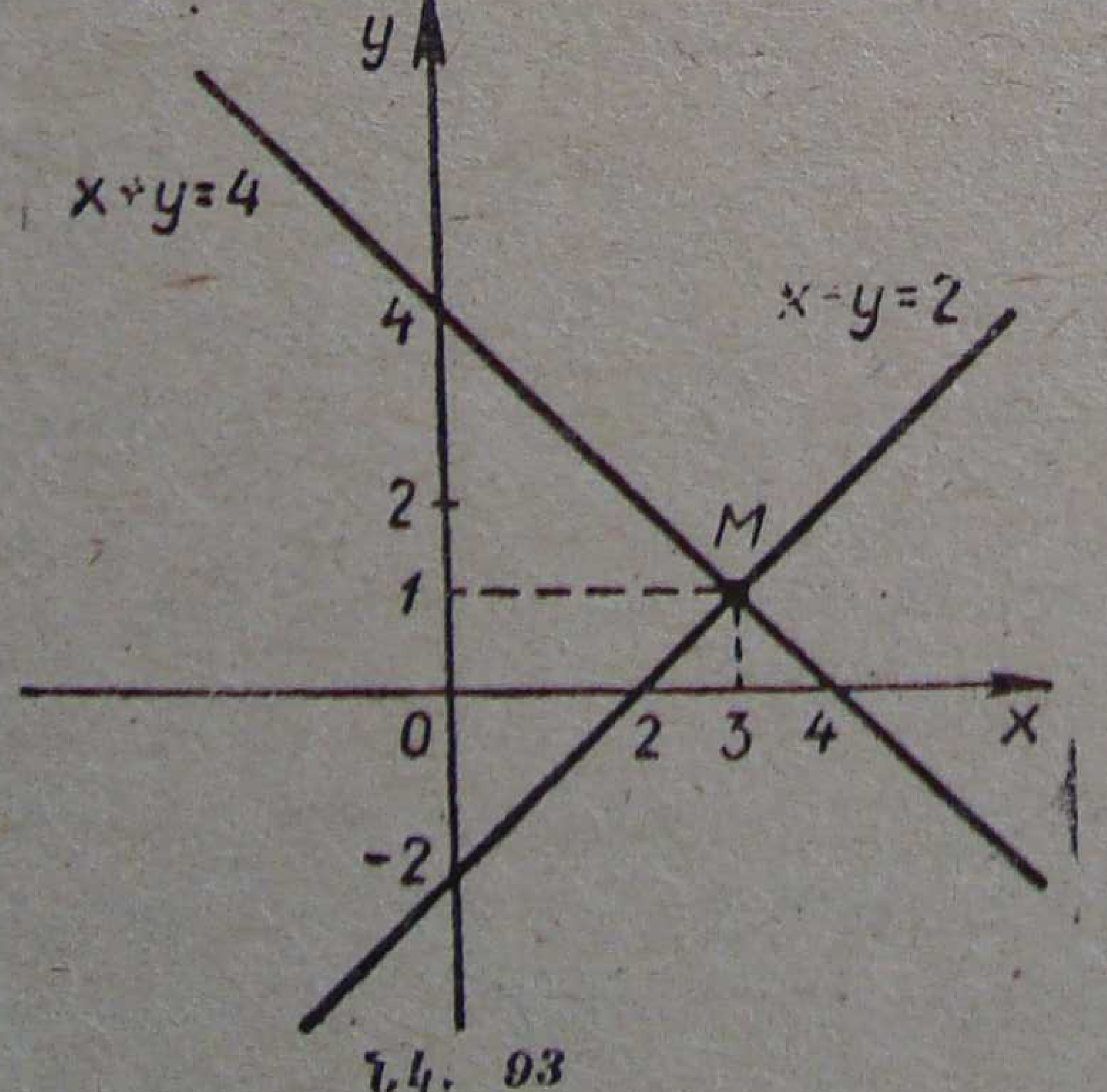
3. $\begin{cases} 6x-2y=16, \\ 9x-3y=24. \end{cases}$

Այս համակարգի հավասարումների գրաֆիկները համընկնող ուղիղների զույգ են (նկ. 95)։ Համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, օրինակ՝ $(0; -8)$, $\left(\frac{8}{3};\ 0\right)$ $(1; -5)$, $(3; 1)$ և այլն։

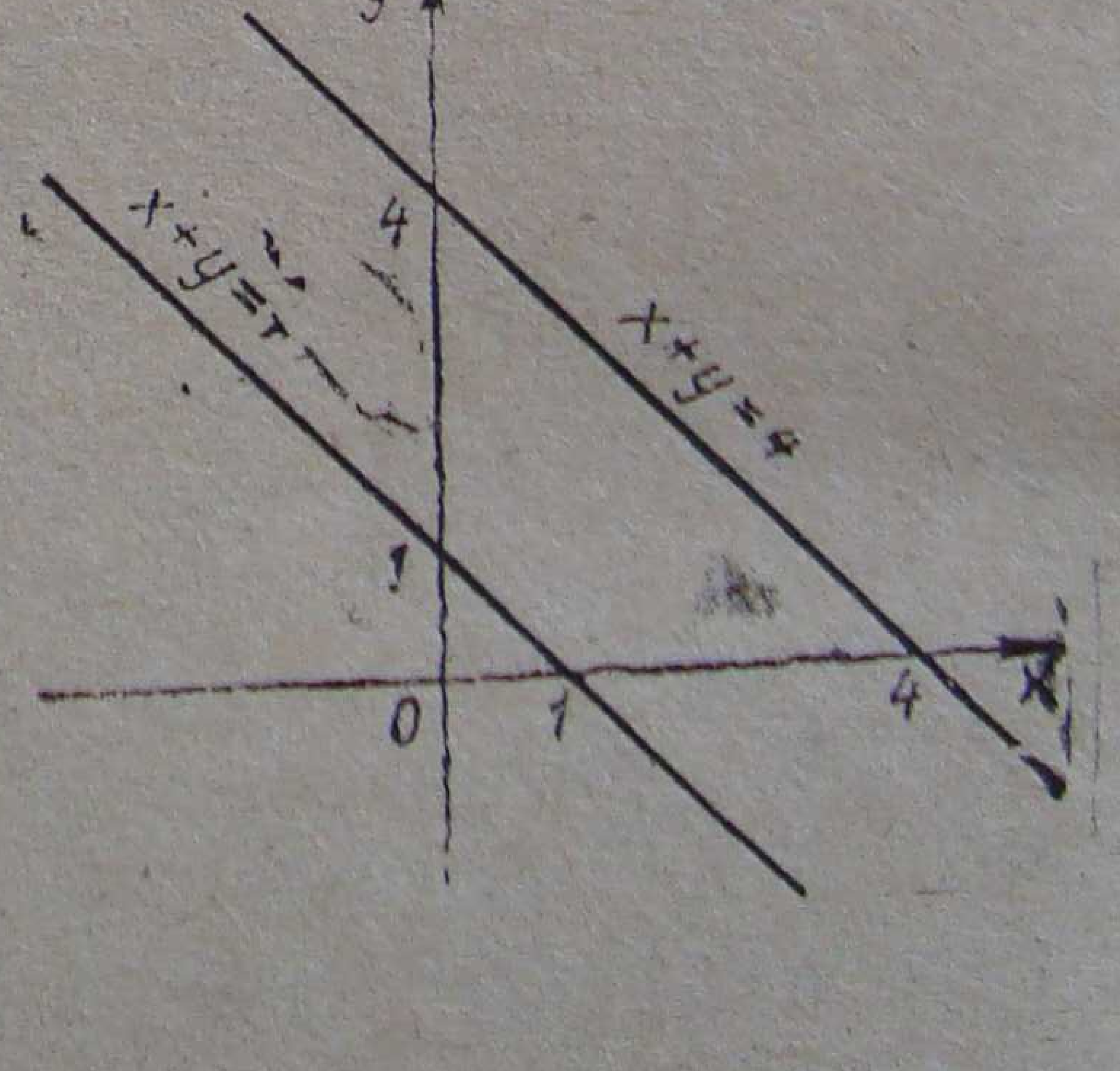
Այսպիսով, երկու փոփոխականով երկու գծային հավասարումների համակարգը լուծելիս հնարավոր է երեք դեպք։

1. Ուղիղ գծերը հատվում են մեկ կետում։ Դա նշանակում է, որ համակարգն ունի միակ լուծում։

2. Ուղիղները զուգահեռ են և չեն համընկնում, այսինքն՝ ուղիղները ոչ մի ընդհանուր կետ չունեն։ Դա նշանակում է, որ համակարգը չունի ոչ մի լուծում։



Նկ. 93



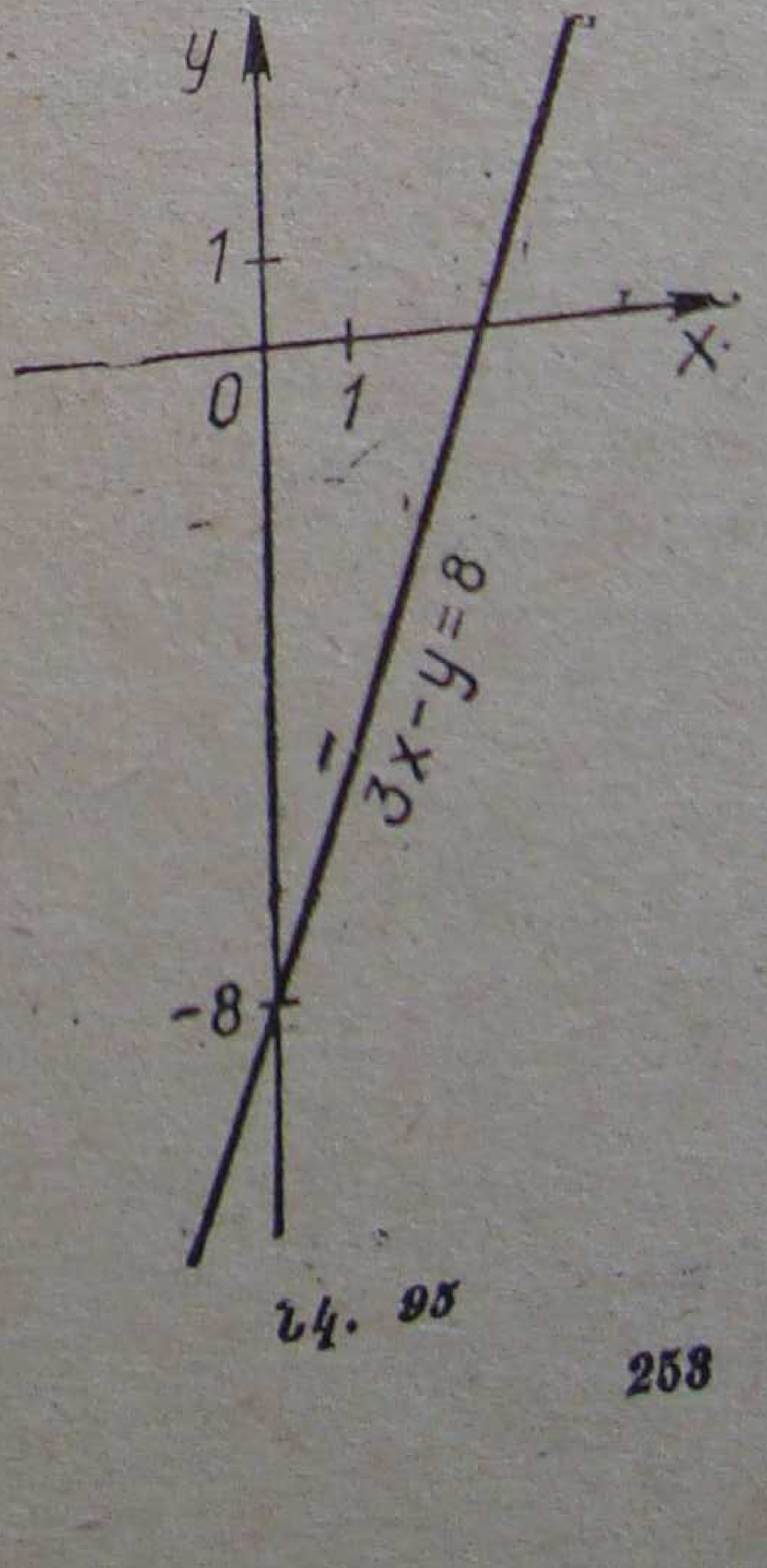
3. Ուղիղները համընկնում են։ Դրանց յուրաքանչյուր կետը կարելի է դիտել որպես երկու ուղիղների ընդհանուր կետ։ Ուղիղներն ունեն անվերջ բազմությամբ ընդհանուր կետեր։ Դա նշանակում է, որ հավասարումների համակարգն ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ։

Եթե $b \neq 0$, ապա $ax+by=c$ հավասարումը կարելի է բերել $y=kx+l$ տեսքի, որտեղ $k=-\frac{a}{b}$, $l=\frac{c}{b}$, իրոք՝ $by=-ax+c$, $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$։

k թիվը կոչվում է $y=kx+l$ ուղղի անկյունային գործակից: Ցույց տանք, որ եթե երկու ուղիղների անկյունային գործակիցները հավասար են, ապա ուղիղները զուգահեռ են:

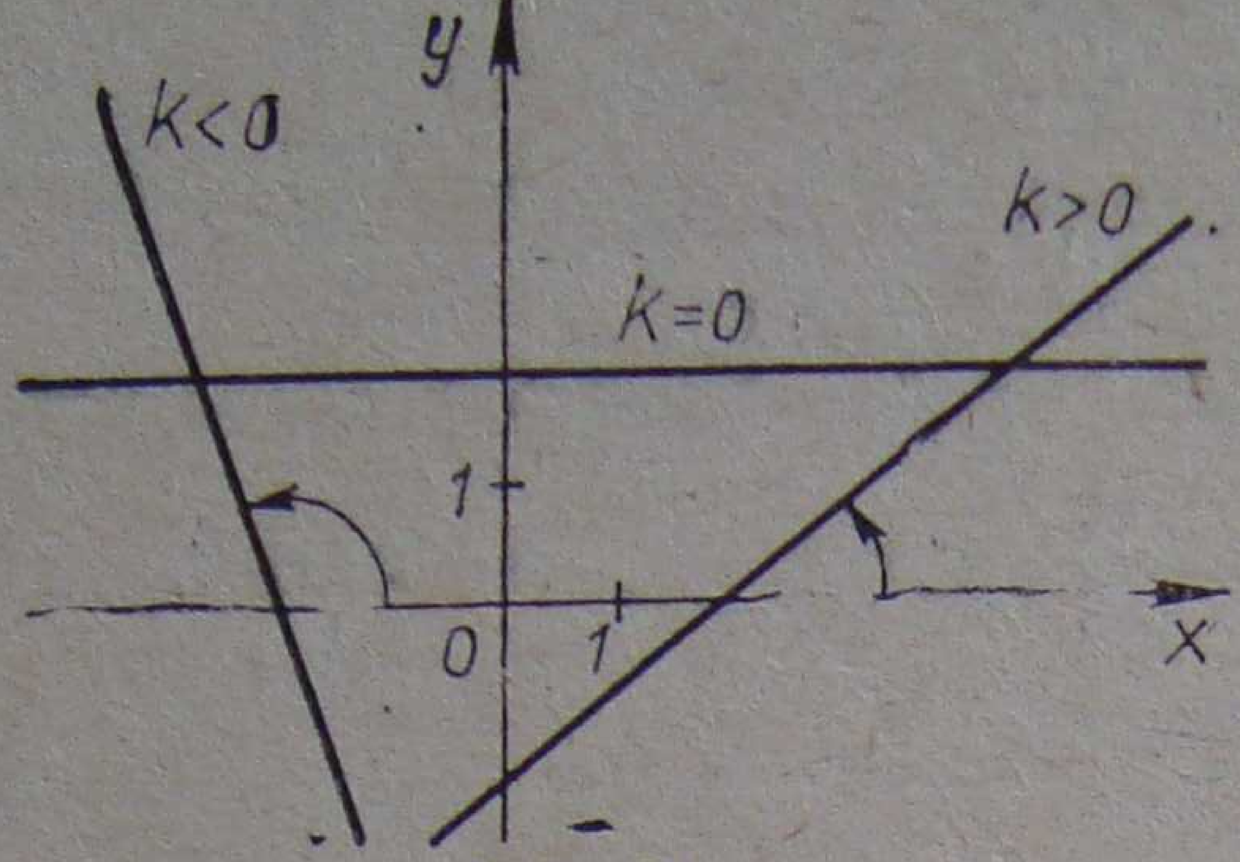
Դիտարկենք $2x-y=-1$ և $2x-y=3$ ուղիղները։ Հավասարումները բերելով համապատասխանաբար $y=2x+1$ և $y=2x-3$ տեսքերի, տեսնում ենք, որ ուղիղներն ունեն միևնույն անկյունային գործակիցը՝ 2։ x աբսցիսի միևնույն արժեքների դեպքում $y=2x+1$ ուղղի կետերի օրդինատները ճիշտ և ճիշտ 4 միավորով մեծ են $y=2x-3$ ուղղի կետերի օրդինատներից։ Այստեղից էլ հետևում է, որ ուղիղները չեն կարող ընդհանուր կետ ունենալ, այսինքն՝ զուգահեռ են (տես § 57, նկ. 77 և 79)։

Հակադարձ պնդումը նույնպես ճիշտ է, այսինքն՝ եթե երկու ուղիղներ զուգահեռ են, ապա նրանց անկյունային գործակիցները հավասար են: Դիցուք տրված են երկու զուգահեռ ուղիղներ՝ $y=k_1x+l_1$ և $y=k_2x+l_2$։ Ցույց տանք, որ $k_1=k_2$։ Ենթադրենք, թե $k_1 \neq k_2$։ Այս ենթադրության դեպքում $y=k_1x$ և $y=k_2x$ ուղիղները հատվում են (կոորդինատների սկզբնակետում)։ Բայց $y=k_1x$ ուղիղը զուգահեռ է $y=k_1x+l_1$ ուղղին, իսկ $y=k_2x$ ուղիղը՝ $y=k_2x+l_2$ ուղղին, հետևաբար $y=k_1x+l_1$ և $y=k_2x+l_2$ ուղիղները ևս պետք է հատվեն, որը հակասում է պայմանին։ Ուստի $k_1=k_2$։



Նկ. 95

$y=kx$ ուղիղն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և $(1;\ k)$ կետով։ Եթե $k>0$, ապա $(1;\ k)$ կետը պատկանում է կոորդինատային առաջին քառորդին, հետևաբար $y=kx$ ուղիղը $0x$ առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն։ Ընդ որում անկյունը հաշվվում է $0x$ առանցքից՝ ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Եթե $k<0$, ապա $(1;\ k)$ կետը պատկանում է կոորդինատային չորրորդ քառորդին, ուստի $y=kx$ ուղիղը $0x$



Նկ. 96

առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն։ Բայց $y=kx$ և $y=kx+l$ ուղիղները l-ի ցանկացած արժեքի դեպքում զուգահեռ են, ուստի ճիշտ է հետևյալ պնդումը. $k>0$ դեպքում $y=kx+l$ ուղիղը $0x$ առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն, իսկ $k<0$ դեպքում՝ բութ անկյուն (նկ. 96)։

Դիտարկենք հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2։\end{cases}$$

Դիցուք $b_1\neq 0$, $b_2\neq 0$։

Այս համակարգը բերենք

$$\begin{cases}y=k_1x+l_1,\\y=k_2x+l_2,\end{cases}$$

տեսքի, որտեղ $k_1=-\frac{a_1}{b_1}$, $k_2=-\frac{a_2}{b_2}$, $l_1=\frac{c_1}{b_1}$, $l_2=\frac{c_2}{b_2}$։

Եթե $\frac{a_1}{b^1}=\frac{a_2}{b_2}$, այսինքն՝ եթե x և y փոփոխականների գործակիցները համեմատական են, ապա $k_1=k_2$։ Եթե $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$ այսինքն եթե x-ի և y-ի գործակիցները համեմատական չեն, ապա $k_1\neq k_2$։

Այսպիսով, երբ x և y փոփոխականների գործակիցները համեմատական են, ապա հավասարումների գրաֆիկները զուգահեռ են և համակարգը կամ ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ, կամ բոլորովին լուծում չունի: Եթե x-ի և y-ի գործակիցները համեմատական չեն, ապա հավասարումների գրաֆիկները հատվում են և համակարգն ունի միակ լուծում:

Վարժություններ

Հավասարումների հետևյալ համակարգը լուծեցեք գրաֆիկորեն.

625. ա) $\begin{cases}4x-y=0,\\x-y=-6,\end{cases}$ գ) $\begin{cases}3x+6y=2,\\2x+4y=5,\end{cases}$

բ) $\begin{cases}5x+3y=-6,\\2x-5y=10,\end{cases}$ դ) $\begin{cases}3x+4y=6,\\x+2=0,\end{cases}$

626. ա) $\begin{cases} 2y+x=5, \\ y-x=1, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 2x+3y=9, \\ y-3=0, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} x+y=12, \\ 2x-y=0, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 6x-2y=1, \\ 9x-3y=-5: \end{cases}$

627. ա) $\begin{cases} 3x+2y=-11, \\ 4x-5y=-7, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 2x+7y=-10, \\ 3y-x=5, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 2x-6=0, \\ 3y+12=0, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 4x-6y=10, \\ 6x-9y=15: \end{cases}$

628. ա) $\begin{cases} 3x-2y=12, \\ 2x+3y=8, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 3x+8y=1, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 9x-15y=21, \\ 6x-10y=14, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 4x+5y=-9, \\ 5x+3y=5: \end{cases}$

§ 80. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԳՈՒՄԱՐԵԼՈՒ ԵՂԱՆԱԿՈՎ

Դիցուք տրված է հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 2x+7y=8, \\ 5x-3y=-21: \end{cases} \qquad (1)$$

Քանի որ x*-ի և* y*-ի գործակիցները համեմատական չեն* $(2:5\neq\neq 7:(-3))$*, ուստի այս համակարգն ունի միակ լուծում՝* $(-3;\ 2)$ *(ստուգեցեք)։*

Անդամ առ անդամ գումարելով (1) համակարգի հավասարումները, կստանանք՝ $(2x+7y)+(5x-3y)=8-21$*, կամ* $7x+4y=-13$*։*

Ապացուցենք, որ (1) համակարգի $(-3;\ 2)$ *լուծումը այս հավասարման լուծումներից է։ Դրանում կարելի է համոզվել ուղղակի տեղադրելով՝* $-21+8=-13$ *հավասարությունը ճիշտ է։*

Բայց մենք անենք ընդհանուր դատողություններ։ Քանի որ $(-3;\ 2)$*-ը (1) համակարգի հավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումն է, ուստի հետևյալ երկու հավասարությունները ճիշտ են.* $-16+14=8$ *և* $-15-6=-21$*։ Դրանք անդամ առ անդամ գումարելով կստանանք ճիշտ հավասարություն՝*

$$(-6+14)+(-15-6)=8-21,$$

Համոզվենք, որ $(-3;\ 2)$*-ը*

$$(2x+7y)+(5x-3y)=-21$$

հավասարման լուծում է։

Այդ նպատակով հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք —3, իսկ y-ի փոխարեն՝ 2։ Մենք կհանգենք նախորդ թվային հավասարությանը, որը ըստ ապացուցածի՝ ճիշտ է. այն ստացվել է որպես երկու ճիշտ հավասարությունների գումարման արդյունք։ Հետևաբար $(-3; 2)$-ը $7x+4y=-13$ հավասարման լուծումն է։

Այժմ նոր համակարգ կազմենք հետևյալ կերպ. վերցնենք (1) համակարգի հավասարումները անդամ առ անդամ գումարելուց ստացված հավասարումը և (1) համակարգի հավասարումներից մեկը, օրինակ առաջինը.

$$\begin{cases} 7x+4y=-13, \\ 2x+7y=8, \end{cases} \qquad (2)$$

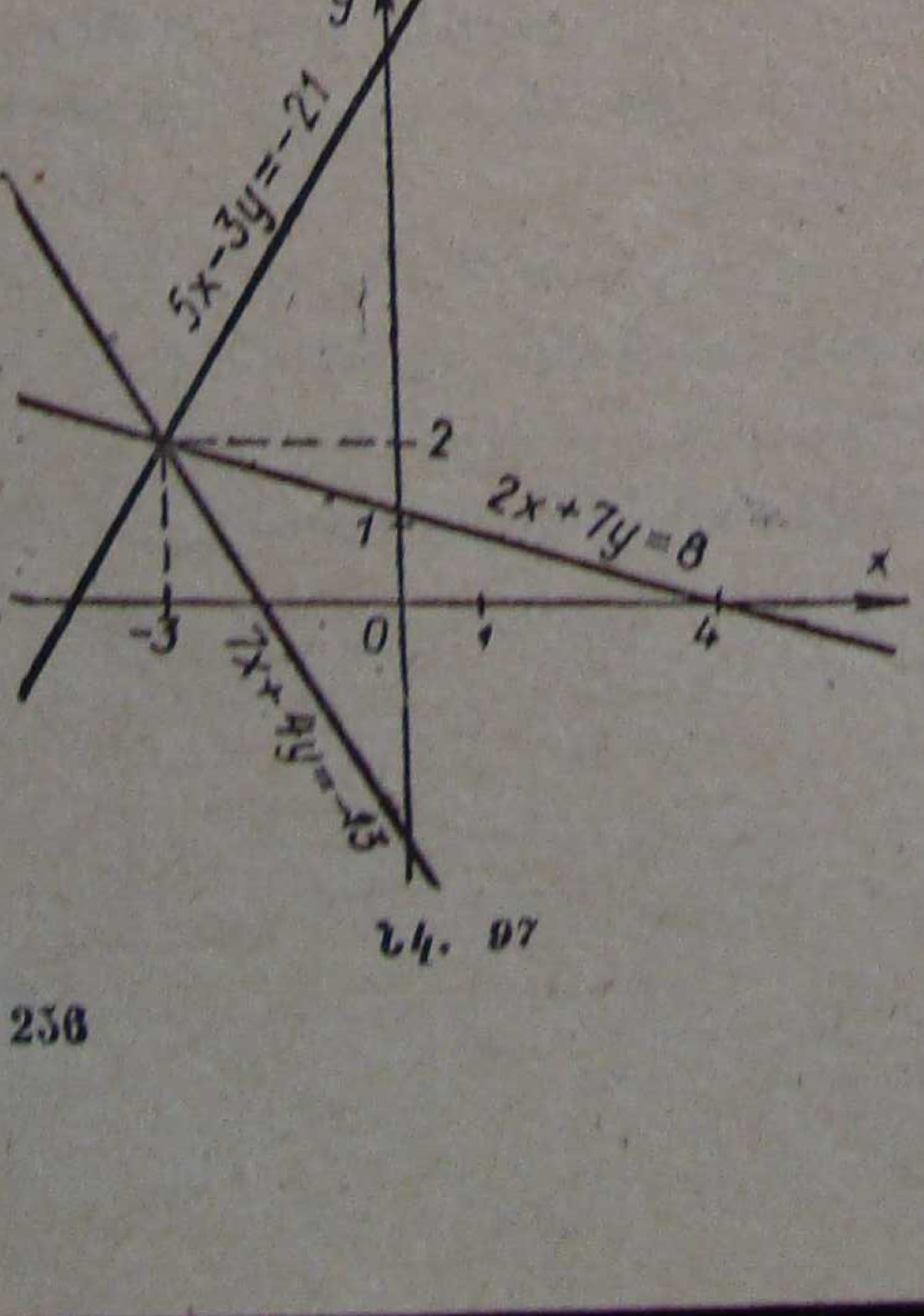
Քանի որ $(-3; 2)$-ը այդ հավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումն է, ապա այն նաև (2) համակարգի լուծումն է։ (2) համակարգը այլ լուծումներ չունի, քանի որ x-ի և y-ի գործակիցները համեմատական չեն $(7:2 \neq 4:7)$։ Այսպիսով, (2) համակարգի լուծումը նույնն է, ինչ որ (1) համակարգինը։

Նույն բանը կարելի է ասել (1) և (3) համակարգերի մասին.

$$\begin{cases} 7x+4y=-13, \\ 5x-3y=-21, \end{cases} \qquad (3)$$

(1) համակարգը նույն լուծումն ունեցող (2) կամ (3) համակարգերով փոխարինելը հեշտացնում է տրված (1) համակարգի լուծումը, եթե (2) կամ (3) համակարգերն ունենում են ավելի պարզ տեսք, քան (1) համակարգը։

Այն փաստը, որ $(-3; 2)$-ը ինչպես (1) համակարգի, այնպես էլ (1)-ի հավասարումները անդամ առ անդամ գումարելուց ստացված $7x+4y=-13$ հավասարման լուծումն է, նշանակում է, որ $7x+4y=-13$ հավասարման գրաֆիկն անցնում է (1) համակարգի հավասարումների գրաֆիկների հատման կետով (նկ. 97)։



Նկ. 97

Հետևություն։ Երբ տրված է երկու փոփոխականով երկու գծային հավասարումների համակարգ, որն ունի միակ լուծում, ապա կարելի է այն փոխարինել նոր համակարգով՝ կազմված տրված համակարգի որևէ հավասարումից և այդ համակարգի երկու հավա-

սարումները գումարելուց ստացված հավասարումից։ Նոր համակարգը ևս ունի միակ լուծում, ընդ որում նույնը, ինչ որ տրված համակարգը։

Սրանով հիմնավորվեց գծային հավասարումների համակարգի լուծման մի եղանակ, որը կարճության համար կոչվում է հավասարումների գումարման եղանակ։

Օրինակ 1։ *Լուծել հետևյալ համակարգը.*

$$\begin{cases} 2x+5y=2, \\ 3x-5y=28; \end{cases} \qquad (1)$$

Անդամ առ անդամ գումարենք համակարգի հավասարումները։ Կստանանք $5x=30$, *կամ* $x=6$։ *Կազմենք նոր համակարգ.*

$$\begin{cases} x=6, \\ 2x+5y=2; \end{cases} \qquad (2)$$

(2) համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք 6, կստանանք $12+5y=2$, $y=-2$։

Պատասխան. $\{(6; -2)\}$։

(Համակարգի լուծումների բազմությունը պարունակում է մեկ տարր՝ մեկ կարգավորյալ թվազույգ՝ $(6; -2)$։*)*

Օրինակ 2։ *Լուծել հետևյալ համակարգը.*

$$\begin{cases} 3x+y=13, \\ 5x-2y=18; \end{cases}$$

Փոփոխականների գործակիցները համեմատական չեն, հետևաբար համակարգն ունի միակ լուծում։

Համակարգի երկու հավասարումներից արտաքսենք փոփոխականներից որևէ մեկը, օրինակ y-ը։ Դրա համար առաջին հավասարումն անդամ առ անդամ բազմապատկենք 2-ով, կստանանք՝ $6x+2y=26$։ *Այնուհետև անդամ առ անդամ գումարենք այս հավասարումն ու տրված համակարգի երկրորդ հավասարումը, կստանանք՝* $11x=44$, $x=4$։ *Կազմենք նոր համակարգ՝*

$$\begin{cases} x=4, \\ 3x+y=13; \end{cases}$$

Այս համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով 4, կստանանք՝ $12+y=13$, $y=1$։

Պատասխան. $\{(4; 1)\}$։

Ստուգենք գտած լուծման ճշտությունը։ Այդ նպատակով տրված համակարգի յուրաքանչյուր հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք

4, իսկ y-ի փոխարեն՝ 1։ Կստանանք՝

$3\cdot4+1=13$ (ճիշտ է), $5\cdot4-2\cdot1=18$ (ճիշտ է)։

Օ ր ի ն ա կ 3: Լուծել հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases}8x-21y=50,\\6x+35y=-64.\end{cases}$$

x-ի գործակիցներն ունեն միևնույն նշանը, իսկ y-ի գործակիցները՝ հակառակ նշանը, այնպես որ դրանք համեմատական չեն։ Համակարգն ունի միակ լուծում։

Երկու հավասարումներից y-ն արտաքսելու համար առաջին հավասարումն անդամ առ անդամ բազմապատկենք 5-ով, իսկ երկրորդը՝ 3-ով։ Կստանանք

$$\begin{cases}40x-105y=250,\\18x+105y=-192\end{cases}$$

համակարգը։ Անդամ առ անդամ գումարելով ստացված հավասարումները, կստանանք՝ $58x=58$, $x=1$։ Կազմենք

$$\begin{cases}x=1,\\8x-21y=50\end{cases}$$

համակարգը։ Երկրորդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով 1, կստանանք՝ $8-21y=50$, $-21y=42$, $y=-2$։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. $\{1; -2)\}$։

Վարժություններ

Հետևյալ համակարգերը լուծեցեք հավասարումները գումարելու եղանակով.

629. ա) $\begin{cases}2x+5y=13,\\3x-5y=-18,\end{cases}$ գ) $\begin{cases}3x+2y=304,\\2x+3y=296,\end{cases}$

բ) $\begin{cases}2x-3y=8,\\2x+5y=-8,\end{cases}$ դ) $\begin{cases}5x-9y=17,\\3x-7y=15.\end{cases}$

630. ա) $\begin{cases}10x+15y-20=0,\\6x+9y-12=0,\end{cases}$ գ) $\begin{cases}2x+7y=81,\\3x-5y=13,\end{cases}$

բ) $\begin{cases}2a-7b=-20,\\16a+3b=17,\end{cases}$ դ) $\begin{cases}4p-3q=-27,\\5p+7q=20,\end{cases}$

631. ա) $\begin{cases}11x-8y=2,\\3x+4y=16,\end{cases}$ գ) $\begin{cases}5a+3b=-4,\\4a+5b=-11,\end{cases}$

բ) $\begin{cases} 3p+4q=18, \\ 3q-4p=1, \end{cases}$ *դ)* $\begin{cases} 3x-9y=7, \\ 7x-21y=9. \end{cases}$

632. *ա)* $\begin{cases} 12a-7b=-26, \\ 5a+12b=19, \end{cases}$ *գ)* $\begin{cases} 42p-25q=47, \\ 28p+45q=19, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 15x-10y=20, \\ 18x-12y=25, \end{cases}$ *դ)* $\begin{cases} 12n-5t=9, \\ 9n+4t=30. \end{cases}$

§ 81. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՏԵՂԱԴՐՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՈՎ

Գոյություն ունի գծային հավասարումների համակարգերի լուծման երկու եղանակ։ Դրանցից առաջինը՝ հավասարումները գումարելու եղանակը մենք դիտարկեցինք նախորդ պարագրաֆում։ Երկրորդ եղանակը կոչվում է տեղադրման եղանակ։ Այն պարզաբանենք օրինակներով։

Օ ր ի ն ա կ 1։ *(տես § 80-ի 2-րդ օրինակը)։ Լուծել համակարգը.*

$$\begin{cases} 3x+y=13, \\ 5x-2y=18. \end{cases}$$

Առաջին հավասարումից y-ն արտահայտենք x-ով, կստանանք՝

$$y=13-3x. \qquad (1)$$

Երկրորդ հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք 13—3x արտահայտությունը։ Կստանանք՝

$$5x-2(13-3x)=18.$$

Սա մեկ փոփոխականով հավասարում է։ Լուծենք՝

$$5x-26+6x=18,\ 11x=44,\ x=4.$$

x-ի ստացված արժեքը տեղադրենք առաջին հավասարման մեջ և գտնենք y-ը.

$$y=13-3\cdot4=13-12=1.$$

Պ ա տ ա ս խ ա ն. $\{(4; 1)\}$։

Օ ր ի ն ա կ 2։ *(տես § 80-ի 3-րդ օրինակը)։ Լուծել*

$$\begin{cases} 8x-21y=50, \\ 6x+35y=-64 \end{cases}$$

համակարգը։

Երկրորդ հավասարումից x-ն արտահայտենք y-ով, դա հարմար է, քանի որ 6-ը փոփոխականների գործակիցներից ամենափոքրն է (ըստ մո-

դուլի)։ Կստանանք՝ $6x=-35y-64$, $x=-\frac{35y+64}{6}$, *Ստացված* *ար*-*դյունքը* առաջին հավասարման մեջ տեղադրենք x-ի փոխարեն՝

$$-\frac{4(35y+64)}{3}-21y=50, \quad -140y-256-63y=150, \quad -203y=406,$$

$$y=-2։$$

Այժմ գտնենք x-ը՝

$$x=-\frac{35\cdot(-2)+64}{6}=-\frac{-70+64}{6}=1։$$

Պատասխան. $\{(1; -2)\}$։

Վարժություններ

Հավասարումների հետևյալ համակարգը լուծեցեք տեղադրման եղա-*նակով.*

633. ա) $\begin{cases} y=x-5, \\ x+y=37, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 2a-3b=-3, \\ a+3b=21, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 2p-3q=16, \\ p+2q=1, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} a+b=14, \\ a=8+b։ \end{cases}$

634. ա) $\begin{cases} x+y=90, \\ 1{,}05x+y=92, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x+y=96, \\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} x+y=52, \\ x=3y, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 8a+6b=135, \\ 2a+2b=37։ \end{cases}$

635. ա) $\begin{cases} x+y=82, \\ 2x+3y=216, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} a-2b=6, \\ a+2b=10, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{2x-y}{3}+\frac{y}{6}=\frac{5}{6} \\ 6x=3y, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 3x+9y-15=0, \\ x=8-3y։ \end{cases}$

636. ա) $\begin{cases} 2x+y=11, \\ 5x-2y=41, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 6x-3y=4, \\ y=2x-5, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} a+2b=5, \\ 5a=7-2b, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} a+2b=7, \\ 10b+a=10a+b+18։ \end{cases}$

Լուծեցեք հավասարումների հետևյալ համակարգը.

637. ա) $\begin{cases} \frac{5x}{6}+\frac{3y}{4}=19, \\ \frac{7x}{3}-\frac{3y}{2}=10, \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 9-3y=\frac{x-2}{3}, \\ 2x-4=\frac{y-3}{5}, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{2a+1}{2}-\frac{1+3b}{5}=\frac{47}{15}, \\ \frac{a}{3}-2=\frac{b}{5}, \end{cases}$

դ) $\begin{cases} \frac{a+1}{2}=\frac{b+1}{3}, \\ \frac{a+3}{6}+2=\frac{b-2}{3}\text{ :} \end{cases}$

638. ա) $\begin{cases} \frac{4a}{3}+\frac{3b}{4}=18, \\ \frac{7a}{3}-\frac{5b}{8}=16, \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \frac{1-3b}{3}-\frac{1-2a}{2}=\frac{5}{6}, \\ \frac{a}{2}+\frac{2b}{3}=4, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}=2y-5, \\ 3y-\frac{y-x}{5}=16, \end{cases}$

դ) $\begin{cases} \frac{y-1}{4}-2=\frac{x+1}{3}, \\ \frac{x+3}{4}+4=\frac{y+1}{3}\text{ :} \end{cases}$

639. ա) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{4}=5, \\ \frac{x+y}{12}+\frac{x-y}{3}=6, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{12a+14b}{21}-10=\frac{b-2a}{4}, \\ \frac{3a+5b}{3}=\frac{8a-3b}{2}-2, \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \frac{28y+17}{9}-\frac{4-7x}{3}=3x+1, \\ \frac{3x-2y}{3}-\frac{x+8}{2}=1-5y, \end{cases}$

դ) $\begin{cases} 2a-2-\frac{5a+3b}{7}=b-\frac{9b+11}{14}, \\ a-\frac{2b-5}{5}=2b-3-\frac{4b-3a}{2}\text{ :} \end{cases}$

640, ա) $\begin{cases} \frac{a+b}{4}-\frac{a-b}{3}=10, \\ \frac{a+b}{8}+\frac{a-b}{6}=5, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{3x-5y}{2}+3=\frac{x+2y}{4}, \\ 7-\frac{x-2y}{4}=\frac{x}{3}+\frac{y}{2}, \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \frac{5y-7}{2}+\frac{4x-3}{6}=13-5y, \\ \frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}=10-3x, \end{cases}$

դ) $\begin{cases} a-\frac{3-5b}{9}=b+3-\frac{5b-3a}{6}, \\ b-\frac{22+9a}{8}=a+1-\frac{3b-5a}{4}: \end{cases}$

§ 82. ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՀԱՅՏԱՐԱՐՆԵՐՈՒՄ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Դիտարկենք կոտորակային արտահայտություններ պարունակող երկու փոփոխականով երկու այնպիսի հավասարումների համակարգեր, որոնցում փոփոխականներ կան նաև հայտարարներում: Դա նշանակում է, որ համակարգի հավասարումներից մեկում կամ երկուսում էլ կոտորակների հայտարարում կան մեկ կամ երկու փոփոխական (տես § 77):

Օրինակ 1: *Տրված է հետևյալ համակարգը.*

$$\begin{cases} \frac{3x+1}{x-1}+\frac{2y+3}{y+1}=5, \\ \frac{x+2}{x+1}+\frac{y+1}{y+2}=2: \end{cases}$$

Յուրաքանչյուր հավասարման բոլոր անդամները տեղափոխենք ձախ մասը, բերենք ընդհանուր հայտարարի և կատարենք նման անդամների միացում: Կստանանք՝

$$\begin{cases} \frac{x+4y+3}{(x-1)(y+1)}=0, \\ \frac{x-y-1}{(x+1)(y+2)}=0, \end{cases}$$

Կոտորակների համարիչները հավասարեցնենք զրոյի և կազմենք գծային հավասարումների համակարգ.

$$\begin{cases} x+4y+3=0, \\ x-y-1=0։ \end{cases}$$

Այս համակարգի լուծումն է $\left(\frac{1}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ թվազույգը։

Փոփոխականների ստացված արժեքների դեպքում տրված համակարգի ոչ մի կոտորակի հայտարարը զրո չի դառնում։ Հետևաբար գծային համակարգի ստացված լուծումը բավարարում է նաև հավասարումների տրված համակարգին.

Պատասխան. $\left\{\left(\frac{1}{5}; -\frac{4}{5}\right)\right\}$։

Օրինակ 2։ Տրված է հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} \frac{3x+1}{x+1}+\frac{2y+3}{y-2}=5, \\ \frac{5x+12}{5(x+2)}+\frac{y+1}{y+3}=2։ \end{cases}$$

Ձևափոխելով համակարգի հավասարումները, կստանանք՝

$$\begin{cases} \frac{7x-2y+11}{(x+1)(y-2)}=0, \\ \frac{5x-y+7}{5(x+2)(x+3)}=0։ \end{cases}$$

Կոտորակների համարիչները հավասարեցնելով զրոյի, կհանգենք գծային հավասարումների

$$\begin{cases} 7x-2y=-11, \\ 5x-y=-7, \end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումն է՝ $x=-1$, $y=2$։

Գծային համակարգի այս լուծումը բավարարում է տրված համակարգի երկրորդ հավասարմանը, բայց չի բավարարում առաջինին (քանի որ վերջինիս երկու հայտարարներն էլ զրո են դառնում)։ Գծային համակարգի միակ $(-1; 2)$ լուծումը լուծում չէ հավասարումների տրված համակարգի համար։

Պատասխան. $\varnothing$։

Օրինակ 3: *Տրված է հետևյալ համակարգը.*

$$\begin{cases}\dfrac{3x+1}{x-1}+\dfrac{2y+3}{y+1}=\dfrac{5xy}{(x-1)(y+1)},\\ \dfrac{x}{x+2}+\dfrac{3y-4}{3(y-4)}=\dfrac{2xy}{(x+2)(y-4)}:\end{cases}$$

Ձևափոխելով համակարգի հավասարումները, կստանանք՝

$$\begin{cases}\dfrac{6x-y-2}{(x-1)(y+1)}=0,\\ \dfrac{8x-3y+4}{(x+2)(y-4)}=0:\end{cases}$$

Կոտորակների համարիչները հավասարեցնելով զրոյի, կհանգենք գծային հավասարումների

$$\begin{cases}6x-y=2,\\ 8x-3y=-4\end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումն է՝ $x=1$, $y=4$:

Գծային համակարգի այս լուծումը չի բավարարում տրված համակարգի ոչ առաջին հավասարմանը (քանի որ $x=1$ *դեպքում նրա երկու մասերն էլ անիմաստ են), ոչ էլ երկրորդ հավասարմանը, (քանի որ* $y=4$ *դեպքում անիմաստ են նաև նրա երկու մասերը)։ Գծային համակարգն ունի (1; 4) միակ լուծում, բայց քանի որ այն չի բավարարում տրված համակարգին, ուստի վերջինս լուծում չունի։*

Պատասխան. $\varnothing$:

Կոտորակների հայտարարներում փոփոխականներ պարունակող հավասարումների համակարգեր լուծելիս հաճախ կիրառվում է օժանդակ փոփոխական մուծելու եղանակը։ Այդ եղանակի էությունը երևում է հետևյալ օրինակից։

Օրինակ 4: *Տրված է*

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x+2y}-\dfrac{7}{x-2y}=4,\\ \dfrac{20}{x+2y}+\dfrac{3}{x-2y}=1\end{cases}$$

համակարգը։ Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$\frac{1}{x+2y}=u,\ \ \frac{1}{x-2y}=v,$$

որից հետո համակարգն ընդունում է

$$\begin{cases} 4u-7v=4, \\ 20u+3v=1 \end{cases}$$

տեսքը։

Լուծելով այս համակարգը, գտնում ենք՝ $u=\frac{1}{8}$, $v=-\frac{1}{2}$։

Դառնանք x և y հիմնական փոփոխականներին և կազմենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \frac{1}{x+2y}=\frac{1}{8}, \\ \frac{1}{x-2y}=-\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{կամ} \quad \begin{cases} x+2y=8, \\ x-2y=-2։ \end{cases}$$

Վերջին համակարգից գտնում ենք՝ $x=3$, $y=2,5$։

Այժմ պարզենք, թե գծային համակարգի գտնված լուծումը տրված համակարգի լուծո՞ւմն է, թե ոչ։

$x=3$, $2y=5$ արժեքների դեպքում կոտորակների $x+2y$ և $x-2y$ հայտարարները զրո չեն դառնում։ Ուստի $(3; 2,5)$-ը տրված համակարգի լուծումն է։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. $\{(3; 2,5)\}$։

Վարժություններ

Լուծեցեք հավասարումների համակարգերը.

641. ա) $\begin{cases} \frac{4}{p+1}=\frac{3}{2+q}, \\ \frac{5}{q+4}=\frac{1}{2p-5}, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} \frac{a+3}{b}=\frac{a+2}{b-2}, \\ 5a-2b+9=0, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{x+1}{y+1}=\frac{5}{4}, \\ \frac{x-2}{y-1}=\frac{1}{2}, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \frac{3}{b}+7a=39, \\ \frac{12}{b}-a=1, \end{cases}$

642. ա) $\begin{cases} \frac{a-2}{b}=\frac{a+1}{8+b}, \\ 8a-3b=16, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} \frac{11}{b}+2a=10,2, \\ 5a+\frac{8}{b}=21,6, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{2y-12}=\dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{1}{5}, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{4}{p-1}=\dfrac{5}{q-1}; \\ \dfrac{1}{2q-1}=\dfrac{1}{2p+1}: \end{cases}$

643. ա) $\begin{cases} 3p-2q=5, \\ \dfrac{p+1}{q-1}-\dfrac{p-1}{q}=\dfrac{6}{q}, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{2a+7}{4}-\dfrac{3a+5b}{6(2a-3)}=\dfrac{2a+3}{4}, \\ 12a-7b=21, \end{cases}$

644. ա) $\begin{cases} 5x-6y+9=0, \\ \dfrac{7+4y}{3}-\dfrac{4x-5y}{2y+1}=\dfrac{8y+17}{6}, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{2a-19}{2}=a-\dfrac{2b-a}{23-a}, \\ 5a+7b=245: \end{cases}$

Հավասարումների հետևյալ համակարգերը լուծելու համար մուծեցեք օժանդակ փոփոխականներ.

645. ա) $\begin{cases} \dfrac{20}{m}-\dfrac{3}{n}=-20, \\ \dfrac{6}{m}+\dfrac{4}{n}=43, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{10}{x}-\dfrac{6}{y}=\dfrac{3}{4}, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \dfrac{4}{a}+\dfrac{5}{b}=32, \\ \dfrac{7}{a}-\dfrac{3}{b}=9, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{2}{3x}-\dfrac{10}{y}=-\dfrac{7}{3}, \\ \dfrac{1}{3x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{5}{6}: \end{cases}$

646. ա) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{6}, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{y}=-\dfrac{5}{6}, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=7, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{y}=38, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \dfrac{4}{a}+\dfrac{21}{b}=43, \\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{7}{b}=9, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{7,5}{p}+\dfrac{7,5}{2q}=1, \\ \dfrac{3}{p}+\dfrac{15}{2q}=1: \end{cases}$

§ 83. ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Լուծենք մի քանի խնդիրներ՝ երկու փոփոխականով երկու հավասարումների համակարգ կազմելու միջոցով: Այդ խնդիրների մի մասը կարելի է լուծել մեկ փոփոխականով մեկ գծային հավասարում կազմելու միջոցով (տես § 54—55):

Խ ն դ ի ր 1: *Դարակներից մեկում գրքերի թիվը երկու անգամ քիչ է, քան մյուսում։ Եթե առաջին դարակից վերցնենք 6 գիրք, իսկ երկրորդին ավելացնենք 8 գիրք, ապա գրքերի թիվը առաջին դարակում կստացվի 7 անգամ քիչ, քան երկրորդում։ Քանի՞ գիրք կա յուրաքանչյուր դարակում։*

Լ ու ծ ու մ։ *Առաջին դարակի գրքերի թիվը նշանակենք* x*-ով, իսկ երկրորդ դարակինը՝* y*-ով։ Ըստ պայմանի՝* $y=2x$։ *Եթե առաջին դարակից վերցնենք 6 գիրք, ապա այնտեղ կմնա* $(x-6)$ *գիրք, եթե երկրորդ դարակին ավելացնենք 8 գիրք, ապա այնտեղ կստացվի* $(y+8)$ *գիրք։ Բայց դրանից հետո առաջին դարակի գրքերի թիվը դարձավ 7 անգամ քիչ, քան երկրորդ դարակինը, հետևաբար՝* $7(x-6)=y+8$։

Այսպիսով ստացանք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases}2x=y,\\7(x-6)=y+8,\end{cases} \quad \text{կամ} \quad \begin{cases}2x=y,\\7x-y=50։\end{cases}$$

Լուծելով համակարգը, գտնում ենք՝ $x=10$, $y=20$։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. *10 և 20 գիրք։*

Խ ն դ ի ր 2: *650 կմ հեռավորությամբ վայրերից միաժամանակ միմյանց ընդառաջ մեկնեցին երկու գնացքներ և հանդիպեցին 10 ժ հետո։ Եթե երկրորդ գնացքը մեկներ առաջինից 4 ժ 20 ր շուտ, ապա հանդիպումը կկայանար առաջինի մեկնելուց 8 ժ հետո։ Որոշեցեք յուրաքանչյուր գնացքի միջին արագությունը։*

Լ ու ծ ու մ։ *Գնացքների արագությունները նշանակենք համապատասխանաբար* x *(կմ/ժ-երով) և* y *(կմ/ժ-երով)։ 10 ժամում առաջին գնացքը կանցնի* $10x$ *կմ, իսկ երկրորդը՝* $10y$ *կմ, հետևաբար* $10x+10y=650$։

8 ժ-ում առաջին գնացքը կանցնի $8x$ *կմ, իսկ 12 ժ 20 ր-ում երկրորդ գնացքը կանցնի* $\frac{37}{3}y$ *կմ, հետևաբար* $8x+\frac{37}{3}y=650$։ *Մենք ստացանք*

$$\begin{cases}x+y=65,\\24x+37y=1950\end{cases}$$

համակարգը։ Այն լուծենք տեղադրման եղանակով. $x=65-y$, $24(65-y)+37y=1950$, $1560-24y+37y=1950$, $13y=390$, $y=30$, $x=65-30=35$։

Համակարգի լուծումն է՝ (35; 30)։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. *35 և 30 կմ/ժ։*

Խ ն դ ի ր 3: *Երկու բանվորների հանձնարարվել է պատրաստել որոշ քանակությամբ միանման դետալներ։ Երբ առաջինը աշխատեց 7 ժ, իսկ երկրորդը՝ 4 ժ, ապա պարզվեց որ նրանք կատարել են ամբողջ աշ-*

խատանքի $\frac{5}{9}$-ը։ Միասին աշխատելով ևս 4 ժ, նրանք տեսան, որ աշխատանքի $\frac{1}{18}$-ը դեռ մնում է։ Բանվորներից յուրաքանչյուրը քանի՞ ժամում կկատարեր ամբողջ աշխատանքը, եթե աշխատեր մենակ։

Լուծում։ Ենթադրենք, թե առաջին բանվորը կարող է աշխատանքը կատարել x ժ-ում, իսկ երկրորդը՝ y ժ-ում։ Այդ դեպքում 1 ժ-ում առաջին բանվորը կկատարի աշխատանքի $\frac{1}{x}$ մասը, իսկ երկրորդը՝ $\frac{1}{y}$ մասը։ Պայմանի համաձայն՝ $\frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9}$։ Բացի այդ, նրանք աշխատեցին ևս 4 ժ և հասցրին կատարել ամբողջ աշխատանքի $\frac{17}{18}$ մասը, ուստի $\frac{11}{x}+\frac{8}{y}=\frac{17}{18}$։

Ստացանք հավասարումների

$$\begin{cases}\frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9},\\ \frac{11}{x}+\frac{8}{y}=\frac{17}{18}\end{cases}$$

համակարգը, որը $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v$ նշանակումներից հետո ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases}7u+4v=\frac{5}{9},\\ 11u+8v=\frac{17}{18}\end{cases}$$

Համակարգը լուծենք, երկու անգամ կիրառելով հավասարումներն անդամ առ անդամ գումարելու մեթոդը։ Առաջին հավասարման բոլոր անդամները բազմապատկենք 2-ով, իսկ երկրորդինը՝ —1-ով և անդամ առ անդամ գումարենք ստացված հավասարումները.

$$3u=\frac{10}{9}-\frac{17}{18}=\frac{1}{6}, u=\frac{1}{18}$$

Այժմ առաջին հավասարման բոլոր անդամները բազմապատկենք —11-ով, իսկ երկրորդինը՝ 7-ով և անդամ առ անդամ գումարենք ստացված հավասարումները.

$$12v=-\frac{55}{9}+\frac{119}{18}=\frac{1}{2}, v=\frac{1}{24}$$

Այսպիսով, $x=18$, $y=24$։

Համակարգի երկրորդ հավասարումը կարելի է կազմել այլ կերպ։ Վերջին 4 ժ-ում բանվորները կատարեցին աշխատանքի այն մասը, որ հավասար է $\frac{17}{8}-\frac{5}{9}=\frac{7}{18}$։ Ուստի՝ $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{7}{18}$։ Նույն այդ $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$ նշանակումների դեպքում համակարգն ընդունում է

$$\begin{cases} 7u+4v=\frac{5}{9}, \\ 4u+4v=\frac{7}{18} \end{cases}$$

տեսքը։

Այս համակարգը ավելի պարզ է, քան նախորդը։ Համակարգի լուծումն իհարկե նույնն է՝ $u=\frac{1}{18}$, $v=\frac{1}{24}$։

Պատասխան. 18 և 24 ժ։

Խնդիր 4։ Շոգենավը գետի հոսանքի ուղղությամբ գնաց 100 կմ, իսկ հոսանքին հակառակ՝ 64 կմ, այդ ամենի վրա ծախսելով 8 ժ 10 ր։ Մի ուրիշ անգամ շոգենավը հոսանքին հակառակ գնաց 80 կմ և նույնքան էլ՝ հոսանքի ուղղությամբ, և այդ ամենը տևեց 8 ժ 20 ր։ Որոշեցեք շոգենավի արագությունը կանգնած ջրում և գետի հոսանքի արագությունը։

Լուծում։ Շոգենավի արագությունը կանգնած ջրում նշանակենք x-ով (կմ/ժ-երով), իսկ գետի հոսանքի արագությունը՝ y-ով (կմ/ժ-երով)։ Այդ դեպքում շոգենավի արագությունը հոսանքի ուղղությամբ կլինի $x+y$ (կմ/ժ-երով), իսկ հոսանքին հակառակ՝ $x-y$ (կմ/ժ-երով)։ Կազմենք հավասարումների

$$\begin{cases} \frac{100}{x+y}+\frac{64}{x-y}=\frac{49}{6}, \\ \frac{80}{x+y}+\frac{80}{x-y}=\frac{25}{3}, \end{cases} \quad \text{կամ} \quad \begin{cases} 100u+64v=\frac{49}{6}, \\ 80u+80v=\frac{25}{3} \end{cases}$$

համակարգը, որտեղ $u=\frac{1}{x+y}$, $v=\frac{1}{x-y}$։

Լուծելով համակարգը, գտնում ենք՝ $u=\frac{1}{24}$, $v=\frac{1}{16}$։

Հանգեցինք հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=\frac{1}{24}, \\ \frac{1}{x-y}=\frac{1}{16}, \end{cases} \quad \text{կամ} \quad \begin{cases} x+y=24, \\ x-y=16, \end{cases}$$

Սկզբում անդամ առ անդամ գումարենք երկու հավասարումները, այնուհետև անդամ առ անդամ հանենք։ Կստանանք՝ $2x=40$, $2y=8$, $x=20$, $y=4$։

Պատասխան. 20 և 4 կմ/ժ։

Վարժություններ

Լուծեցեք հետևյալ խնդիրները.

647. Երկու թվերի տարբերությունը հավասար է 51-ի։ Եթե առաջին թիվը բաժանենք երկրորդի վրա, ապա քանորդում կստացվի 7, իսկ մնացորդում՝ 3։ Գտեք այդ թվերը։

648. Եթե որոնելի թվերից առաջինը բազմապատկենք 8-ով, իսկ երկրորդը՝ 3-ով և այդ արտադրյալները գումարենք, ապա կստացվի 310։ Իսկ եթե առաջին թիվը բաժանենք 8-ի, իսկ երկրորդը՝ 3-ի, ապա այդ քանորդների գումարը կլինի 10։ Գտեք այդ թվերը։

649. Եթե կոտորակի համարիչը փոքրացնենք 3-ով, իսկ հայտարարը մեծացնենք 2-ով, ապա կստացվի $\frac{1}{3}$։ Իսկ եթե համարիչը մեծացնենք 1-ով, իսկ հայտարարը փոքրացնենք 1-ով, ապա կստացվի $\frac{3}{4}$։ Գտեք կոտորակը։

650. Եթե կոտորակի համարիչը փոքրացնենք 4-ով, իսկ հայտարարը՝ 1-ով, ապա կստացվի $\frac{1}{2}$։ Իսկ եթե համարիչին ավելացնենք հայտարարը, իսկ հայտարարից հանենք 5, ապա կստացվի 3։ Գտեք կոտորակը։

651. Մեկ էջի վրա տեղավորվում է միջին հաշվով 1300 խոշոր տառ կամ 1850 մանր տառ։ Հոդվածը կազմում է 37250 տառ և զբաղեցնում է 24 լրիվ էջ։ Քանի՞ էջ է մեքենագրված խոշոր տառատեսակով և քանի՞ էջ՝ մանր տառատեսակով։

652. Ուղղաթիռի արագությունը 85 կմ/ժ-ով մեծ է ավտոմոբիլի արագությունից, իսկ նրանց արագությունների հարաբերությունը հավասար է 35:18։ Որոշեցեք ուղղաթիռի և ավտոմոբիլի արագությունները։

653. Եռանկյան անկյուններից մեկի մեծությունը 16° է, իսկ մյուս երկուսի մեծությունների տարբերությունը՝ 28°։ Գտեք եռանկյան անկյունների մեծությունները։

654. 6 ժ-ում նավակը 28 կմ անցավ գետի հոսանքի ուղղությամբ և 10 կմ՝ հոսանքին հակառակ։ Մի ուրիշ անգամ հոսանքի ուղղությամբ 20 կմ գնալու և ետ դառնալու համար պահանջվեց $7\frac{1}{2}$ ժ։ Գտեք նավակի արագությունը կանգնած ջրում և գետի հոսանքի արագությունը։

655. Բանվորների բրիգադը որոշ առաջադրանք ստացավ։ Եթե բրիգադում մեկ հոգի պակաս լիներ, ապա առաջադրանքը կկատարվեր 2 օր ուշ, իսկ եթե 4 հոգի ավելի լիներ, ապա՝ 3 օր շուտ։ Բրիգադում քանի՞ բանվոր կար և քանի՞ օրվա համար էր նախատեսված առաջադրանքը։

656. Տրված է մի երկնիշ թիվ, որի թվանշանների գումարը հավասար է 8-ի։ Եթե այդ թվի թվանշանների տեղերը փոխենք, ապա նոր ստացված թիվը նախորդից փոքր կլինի 18-ով։ Գտեք այդ թիվը։

657. 15 ալբոմի համար վճարեցին 2 ռ. 40 կ ավելի, քան 20 ընդհանուր տետրի համար։ Երեք ալբոմը նույնքան արժե, որքան հինգ ընդհանուր տետրը։ Որքա՞ն է տետրի արժեքը և ալբոմի արժեքը։

658. Ուղղաթիռը 300 կմ թռավ քամու ուղղությանը հակառակ և ետ դարձավ։ Այդ տևեց 3 ժ 30 ր։ Այնուհետև նա քամու ուղղությանը հակառակ թռավ 30 կմ, իսկ քամու ուղղությամբ՝ 50 կմ, այդ ամենի վրա ծախսելով 27 ր։ Գտեք քամու արագությունը (այն համարելով հաստատուն) և ուղղաթիռի սեփական արագությունը։

659. Լաբորատորիայում 150,5 գ համաձուլվածք ստանալու համար վերցրին 14 սմ^3 արույր և 3 սմ^3 արծաթ։ Մեկ ուրիշ անգամ վերցրին 16 սմ^3 արույր, 5 սմ^3 արծաթ և ստացան 188,5 գ համաձուլվածք։ Գտեք արույրի և արծաթի խտությունները։

660. Խառնուրդ պատրաստելու համար վերցրին 24 սմ^3 կավիճ և 16 սմ^3 մարմար, որոնք կազմեցին 100,8 գ։ Մեկ ուրիշ անգամ 150 գ խառնուրդ պատրաստելու համար պահանջվեց 40 սմ^3 կավիճ և 20 սմ^3 մարմար։ Որոշեցեք կավճի և մարմարի խտությունները։

661. A-ից B ճանապարհի մի մասը հորիզոնական է, իսկ մյուսը՝ վերելք։ Հեծանվորդն այդ հեռավորությունը հաղթահարեց 3 ժ-ում։ Ետդարձը տևեց 2 ժ 24 ր։ Հեծանվորդի արագությունը հորիզոնական ընթանալիս 12 կմ/ժ է, վերելքի ժամանակ՝ 6 կմ/ժ, իսկ վայրէջքի ժամանակ՝ 15 կմ/ժ։ Գտեք ճանապարհի հորիզոնական և թեք հատվածների երկարությունները։

662. Ավտոբուսը քաղաքից քաղաք հեռավորությունն անցավ պահանջված ժամկետում՝ շարժվելով որոշակի արագությամբ։ Եթե արագությունը մեծացվեր 9 կմ/ժ-ով, ապա նա տեղ կհասներ 1 ժ շուտ, իսկ եթե փոքրացվեր 6 կմ/ժ-ով, ապա տեղ կհասներ 1 ժ ուշ։ Գտեք ավտոբուսի արագությունը և շարժման տևողությունը։

663. Եթե երկրորդ գրապահարանից 7 գիրք տեղափոխենք առաջին գրապահարանը, ապա երկրորդ պահարանի գրքերի թիվը առաջինից ավելի կլինի 1,4 անգամ։ Եթե առաջին պահարանից վերցնեն 53 գիրք, իսկ երկրորդից՝ 67, ապա առաջին պահարանի գրքերի թվի հարաբերությունը երկրորդի գրքերի թվին կլինի 3,5։ Քանի՞ գիրք կա յուրաքանչյուր պահարանում։

664. Երկու բանվորներ առաջադրանքը պետք է կատարեին 24 ժ-ում։ 16 ժ համատեղ աշխատելուց հետո առաջին բանվորը նոր առաջադրանք ստացավ, ուստի երկրորդ բանվորը առաջադրանքը կատարելու համար աշխատեց ևս 14 ժ։ Առաջադրանքը որքա՞ն ժամանակում կարող էր կատարել յուրաքանչյուր բանվորը, աշխատելով մենակ։

665. Եթե եռանկյան բարձրությունը մեծացնենք 5 սմ-ով, իսկ հիմքի երկարությունը՝ 10 սմ-ով, ապա եռանկյան մակերեսը կմեծանա 425 սմ²-ով։ Իսկ եթե բարձրությունը փոքրացնենք 10 սմ-ով, իսկ հիմքի երկարությունը մեծացնենք 5 սմ-ով, ապա մակերեսը կփոքրանա 75 սմ²-ով։ Գտեք եռանկյան բարձրությունը և հիմքի երկարությունը։

666. Եթե ուղղանկյուն հրապարակի լայնությունը մեծացնենք 3 մ-ով, իսկ երկարությունը փոքրացնենք 2 մ-ով, ապա մակերեսը կմեծանա 16 մ²-ով։ Եթե հրապարակի լայնությունը փոքրացնենք 2 մ-ով, իսկ երկարությունը մեծացնենք 1 մ-ով, ապա մակերեսը կփոքրանա 19 մ²-ով։ Գտեք հրապարակի երկարությունն ու լայնությունը։

§ 84. ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ՀԵՏԵՎՈՒԹՅԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիտարկենք փոփոխական պարունակող այնպիսի առաջադրությունների օրինակներ, որոնցում փոփոխականը կարող է ընդունել ոչ բացառապես թվային արժեքներ (տես § 4)։

Օ ր ի ն ա կ 1։ Վերցնենք քաղաքների բազմությանը պատկանող x փոփոխականով երկու առաջադրություն։

A) x քաղաքը գտնվում է Լեհաստանում։

B) x քաղաքը գտնվում է Եվրոպայում։

A առաջադրությունը վերածվում է ճշմարիտասույթի, եթե, օրինակ, x քաղաքը Վարշավան է, և կեղծ ասույթի, եթե x-ը Բուխարեստն է։ Բայց Լեհաստանը գտնվում է Եվրոպայում։ Հետևաբար, եթե x փոփոխականի որոշ արժեքի դեպքում A առաջադրությունը վերածվում է ճշմարիտ ասույթի, ապա x-ի նույն այդ արժեքի դեպքում B առաջադրությունը նույնպես վերածվում է ճշմարիտ ասույթի։ Այսպիսով, եզրակացնում ենք այն փաստից, որ Վարշավան գտնվում է Լեհաստանում, հետևում է, որ Վարշավան գտնվում է Եվրոպայում։ A առաջադրությունից հետևում է B առաջադրությունը։ Դա գրվում է այսպես՝ $A \Rightarrow B$։ Հակառակ պնդումը ճիշտ չէ։ B առաջադրությունից, իհարկե չի հետևում A առաջադրությունը. եթե x-ի որոշ արժեքի դեպքում B առաջադրությունը ճշմարիտ ասույթ է, ապա x-ի նույն այդ արժեքի համար A առաջադրությունը կարող է լինել ինչպես ճշմարիտ, այնպես էլ կեղծ։

Օ ր ի ն ա կ 2։ Դարձյալ դիտարկենք քաղաքների բազմությանը պատկանող x փոփոխականը։

A) x քաղաքը գտնվում է Սովետական Միությունում։

B) x քաղաքը գտնվում է Եվրոպայում:

Եթե x-ը Կազան քաղաքն է, ապա երկու առաջադրություններն էլ ճշմարիտ ասույթներ են: Բայց եթե x-ը Իրկուտսկի քաղաքն է, ապա A առաջադրությունը ճշմարիտ ասույթ է, իսկ B առաջադրությունը՝ կեղծ: Այսպիսով, A առաջադրությունից չի հետևում B առաջադրությունը:

Օրինակ 3: Դիտարկենք քառանկյունների բազմությանը պատկանող y փոփոխականը: Վերցնենք այսպիսի երկու առաջադրություններ.

A) y զուգահեռագիծը քառակուսի է:

B) y զուգահեռագիծը շեղանկյուն է:

Քանի որ ամեն մի քառակուսի շեղանկյուն է, ապա բոլոր այն զուգահեռագծերի համար, որոնց դեպքում A առաջադրությունը ճշմարիտ ասույթ է, B առաջադրությունը ևս ճշմարիտ ասույթ է, այսինքն՝ A⇒B: Հակառակ պնդումը (B⇒A) ճիշտ չէ. եթե ինչ որ զուգահեռագծի համար B առաջադրությունը ճշմարիտ ասույթ է, ապա այդ նույն զուգահեռագծի համար A առաջադրությունը կարող է լինել ինչպես ճշմարիտ, այնպես էլ կեղծ ասույթ՝ B-ից չի հետևում A-ն: Այլ կերպ ասած. ամեն մի քառակուսի շեղանկյուն է, բայց ամեն մի շեղանկյուն չէ, որ քառակուսի է:

Օրինակ 4: Դիցուք a-ն, b-ն, c-ն, d-ն փոփոխականներ են, որոնք արժեքներ են ընդունում զրոյից տարբեր բոլոր թվերի բազմության վրա: Դիտարկենք հետևյալ առաջադրությունները.

A) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

B) $ad=bc$:

Եթե որոշ չորս թվերի համար A առաջադրությունը ճշմարիտ ասույթ է, ապա նույն այդ թվերի համար B առաջադրությունը ևս ճշմարիտ ասույթ է (տես § 36), այնպես որ A-ից հետևում է B-ն. A⇒B: Եվ ընդհակառակը, եթե որոշ չորս թվերի համար B առաջադրությունը վերածվում է ճշմարիտ ասույթի, ապա այդ թվերի համար A առաջադրությունը ևս ճշմարիտ ասույթ է (տես § 36), այնպես որ B-ից հետևում է A-ն. B⇒A:

Երկու առաջադրություններ կոչվում են համարժեք, եթե առաջին առաջադրությունից հետևում է երկրորդը և հակառակը, երկրորդից հետևում է առաջինը: Դա գրվում է այսպես՝ A⇔B: Այսպիսով,

$$\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)\Leftrightarrow(ad=cb),$$

այսինքն, A և B առաջադրությունները համարժեք են:

⇒ նշանը կոչվում է տրամաբանական հետևության նշան, իսկ ⇔-ը՝ համարժեքության նշան:

Սահմանում: Երկու հավասարումներ կոչվում են համարժեք,

18—509

եթե նրանք ունեն լուծումների միևնույն բազմություն:

Այլ կերպ ասած, եթե երկու հավասարումներ համարժեք են, ապա առաջին հավասարման յուրաքանչյուր լուծում լուծում է նաև երկրորդ հավասարման համար, և հակառակը, երկրորդի յուրաքանչյուր լուծում առաջինի լուծում է։

Սահմանում: **Երկու փոփոխականով երկու համակարգեր կոչվում են համարժեք, եթե նրանք ունեն լուծումների միևնույն բազմությունը:**

Օրինակ 5: *$2x-5=0$ և $3x-7,5=0$ հավասարումներն ունեն միևնույն արմատը՝ 2,5։ Նրանք համարժեք են։ Կարելի է գրել.*

$$(2x-5=0)\Leftrightarrow(3x-7,5=0)։$$

Օրինակ 6: *$6x-4y=8$ և $9x-6y=12$ հավասարումներն ունեն լուծումների միևնույն բազմությունը (անվերջ)․ դրանց գրաֆիկները համընկնող ուղիղների զույգ են։ Այդ հավասարումները համարժեք են.*

$$(6x-4y=8)\Leftrightarrow(9x-6y=12)։$$

Օրինակ 7։

$$\begin{cases}2x+7y=8,\\5x-3y=-21,\end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases}7x+4y=-13,\\2x+7y=8\end{cases}$$

համակարգերն ունեն միակ լուծում՝ $(-3; 2)$ տես § 80), հետևաբար համարժեք են։ Կարելի է գրել.

$$\begin{cases}2x+7y=8,\\5x-3y=-21,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+4y=-13,\\2x+7y=8։\end{cases}$$

Օրինակ 8: *Հետևյալ երկու համակարգերը համարժեք են.*

$$\begin{cases}x+y=2,\\2x+2y=3,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=5,\\3x-3y=7։\end{cases}$$

Դրանցից յուրաքանչյուրի լուծումների բազմությունն է $\varnothing$:

Եթե երկու հավասարումներ համարժեք են, ապա դրանք կարելի է փոխարինել մեկը մյուսով, քանի որ երկուսն էլ ունեն լուծումների միևնույն բազմություն։ Նույն բանը կարելի է ասել նաև հավասարումների համարժեք համակարգերի մասին։

Ինքնուրույն աշխատանք № 15

1. 13 ժ անընդհատ գնալով կատերը գետի հոսանքի ուղղությամբ գնաց 140 կմ, իսկ հոսանքին հակառակ՝ 24 կմ։ Մեկ ուրիշ անգամ նա 13 ժ-ում գետի հոսանքի ուղղությամբ գնաց 100 կմ, իսկ հոսանքին հակառակ՝ 32 կմ։ Գտեք կատերի արագությունը կանգնած ջրում և գետի հոսանքի արա-

գությունը։

2. Հավասարումների հետևյալ համակարգը լուծեցեք գրաֆիկորեն.

$$\begin{cases} 7x+3y=-2, \\ 3x-2y=9. \end{cases}$$

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ո՞րն է կոչվում երկու փոփոխականով հավասարման լուծում։ Ո՞րն է կոչվում երկու փոփոխականով հավասարման գրաֆիկ։

2. Ո՞ր տիպի հավասարումն է կոչվում երկու փոփոխականով գծային հավասարում։ Ինչպե՞ս են կառուցում նրա գրաֆիկը։

3. Ո՞րն է կոչվում երկու փոփոխականով երկու գծային հավասարումների համակարգի լուծում։ Ի՞նչ է նշանակում լուծել երկու հավասարումների համակարգը։

4. Ինչո՞ւմ է կայանում երկու փոփոխականով երկու գծային հավասարումների համակարգի լուծման գրաֆիկական եղանակը։ Ինչպիսի դեպքեր են հնարավոր։

5. Ինչի՞ է հավասար $ax+by=c$ $(b\neq 0)$ ուղղի անկյունային գործակիցը և ի՞նչ է բնորոշում նրա նշանը։

6. Օրինակների միջոցով բացատրեցեք, թե ինչու են ուղիղները զուգահեռ, եթե $k_1=k_2$, և ինչու զուգահեռ չեն, եթե $k_1\neq k_2$։

7. Բացատրեցեք գծային հավասարումների համակարգի լուծումը հավասարումները գումարելու եղանակով։

8. Բացատրեցեք գծային հավասարումների համակարգի լուծումը տեղադրման եղանակով։

9. Պատմեցեք կոտորակների հայտարարներում փոփոխականներ պարունակող երկու հավասարումների համակարգի լուծման ընթացքը։

10. Ձևակերպեցեք երկու հավասարումների կամ հավասարումների երկու համակարգերի համազորության սահմանումը։

Գլուխ XI

ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 85. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ։ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Անհավասարության հասկացությանը մենք հաճախ ենք հանդիպել (տես § 3, 4, 20, 27, 45, 46)։ Այժմ անցնենք անհավասարությունների ավելի մանրամասն ուսումնասիրությանը։

Հավասարության և անհավասարության նշանների միջոցով գրվում են թվերի բաղդատման արդյունքները։ Ինչպիսին էլ լինեն a *և* b *թվերը, նրանց միջև գոյություն ունի հետևյալ երեք հնարավոր առնչություններից միմիայն մեկը՝* $a<b$, $a=b$, $a>b$։

Յուրաքանչյուր թիվ կոորդինատային ուղղի վրա պատկերվում է որևէ կետի տեսքով (տես § 19)։ Ենթադրենք, թե a *և* b *թվերը համապատասխանաբար* A *և* B *կետերի կոորդինատներն են։* $a<b$ *դեպքում* A *կետը կոորդինատային ուղղի վրա գտնվում է* B *կետից ձախ։* $a=b$ *դեպքում* A *և* B *կետերը համընկնում են։* $a>b$ *դեպքում* A *կետը գտնվում է* B *կետից աջ։ Եվ ընդհակառակը, եթե* A *կետը գտնվում է* B *կետից ձախ, ապա* A *կետի* a *կոորդինատը փոքր է* B *կետի* b *կոորդինատից,* $a<b$։ *Եթե* A *կետը գտնվում է* B *կետից աջ, ապա* $a>b$։ *Եթե* A *և* B *կետերը համընկնում են, ապա* $a=b$։

Կոորդինատային ուղղի վրա դրական թվերը պատկերվում են կոորդինատների սկզբնակետից աջ գտնվող կետերով, իսկ բացասական թվերը՝ սկզբնակետից ձախ գտնվող կետերով։ Հետևաբար ամեն մի դրական թիվ մեծ է զրոյից, և հակառակը, զրոյից մեծ թիվը դրական է։ Ցանկացած բացասական թիվ փոքր է զրոյից, և հակառակը, զրոյից փոքր թիվը բացասական է։

Եթե $a>b$, *ապա* $a-b$ *տարբերությունը դրական թիվ է։ Եթե* $a<b$, *ապա* $a-b$*-ն՝ բացասական թիվ է։ Եթե* $a=b$, *ապա* $a-b$ *տարբերությունը հավասար է զրոյի։*

Ճիշտ են և հակադարձ պնդումները։ Եթե $a-b$ *տարբերությունը դրական թիվ է, ապա* $a>b$։ *Եթե* $a-b$ *տարբերությունը բացասական թիվ է, ապա* $a<b$։ *Եթե* $a-b$ *տարբերությունը հավասար է զրոյի, ապա* $a=b$։

Այսպիսով, եթե $a \neq b$ *և պահանջվում է որոշել, թե* $a>b$ *և* $a<b$ *անհավասարություններից որն է ճիշտ, ապա կարելի է կազմել* $a-b$ *տարբերությունը և փորձել պարզել նրա նշանը, եթե պարզվի, որ* $a-b>0$, *ապա* $a>b$, *իսկ եթե* $a-b<0$, *ապա* $a<b$։

Ճիշտ անհավասարությունների համար ճշմարիտ է հետևյալ հատկությունը։

Այն բանից, որ $a>b$ **և** $b>c$ **անհավասարությունները ճիշտ են, բխում է, որ** $a>c$ **անհավասարությունը ևս ճիշտ է։**

Սա ճիշտ անհավասարությունների փոխանցականության հատկությունն է *(տես § 68, 76)*։

Ապացուցում։ Քանի որ $a>b$, *ապա* $a-b$*-ն դրական թիվ է։ Քանի որ* $b>c$, *ապա* $b-c$*-ն նույնպես դրական թիվ է։ Երկու դրական թվերի* $(a-b)+(b-c)$ *գումարը դրական թիվ է։ Բայց* $(a-b)+(b-c)=a-c$, *ուստի* $a-c$*-ն դրական թիվ է։ Այստեղից հետևում է, որ* $a>c$։

Ապացուցենք անհավասարությունների վերաբերյալ երկու թեորեմ։

Թեորեմ 1. Եթե ճիշտ անհավասարության երկու մասերին ավելացնենք (կամ եթե անհավասարության երկու մասերից էլ հանենք) միևնույն թիվը, ապա կստացվի ճիշտ անհավասարություն։

Ապացուցում։ Տրված է $a>b$ *անհավասարությունը և կամայական* c *թիվը։ Պահանջվում է ապացուցել, որ* $a+c>b+c$։ *Դիտարկենք* $(a+c)-(b+c)$ *տարբերությունը, այն հավասար է* $a-b$։ *Բայց* $a-b>0$, *ուստի* $(a+c)-(b+c)>0$, *հետևաբար* $a+c>b+c$։

Հանգունորեն, եթե $a>b$, *ապա* $(a-c)-(b-c)=a-b>0$, *ուստի* $a-c>b-c$։ *Օրինակ,* $5<8$ *անհավասարությունը ճիշտ է։ Եթե անհավասարության երկու մասերին ավելացնենք 2, ապա կստանանք* $7<10$ *անհավասարությունը, որը նույնպես ճիշտ է։ Իսկ եթե երկու մասերից հանենք 3, ապա կստանանք* $2<5$ *ճիշտ անհավասարությունը։*

Թեորեմ 2. Եթե ճիշտ անհավասարության երկու մասերը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) միևնույն դրական թվով, ապա կստացվի ճիշտ անհավասարություն։ Եվ եթե ճիշտ անհավասարության երկու մասերը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) միևնույն բացասական թվով և անհավասարության նշանը փոխենք հակադիր նշանով, ապա դարձյալ կստացվի ճիշտ անհավասարություն։

Ապացուցում։ 1) Տրված է $a>b$ *անհավասարությունը և* $k>0$ *թիվը։ Պահանջվում է ապացուցել, որ* $ak>bk$։ *Դիտարկենք* $ak-bk$ *տարբերությունը, այն հավասար է* $(a-b)k$*-ի։ Բայց* $a-b$ *և* k *դրական թվերի արտադրյալը դրական թիվ է՝* $(a-b)k>0$, *այսինքն՝* $ak-bk>0$։ *Այստեղից հետևում է, որ* $ak<bk$։

2) Տրված է $a>b$ *և* $k<0$։ *Քանի որ* $a-b$*-ն դրական թիվ է, իսկ* k*-ն՝ բացասական, ապա դրանց արտադրյալը բացասական թիվ է, այսինքն՝*

$ak-bk=(a-b)k<0$, ուստի $ak<bk$։

Օրինակ, $6<9$ անհավասարությունը ճիշտ է։ Եթե նրա երկու մասերը բազմապատկենք 2 դրական թվով, ապա կստանանք $12<18$ անհավասարությունը, որը նույնպես ճիշտ է։ Իսկ եթե տրված անհավասարությունը անդամ առ անդամ բազմապատկենք -3 բացասական թվով և $<$ նշանը փոխենք $>$ նշանով, ապա կստանանք $-18>-27$ ճիշտ անհավասարությունը։

Քննարկենք ևս երկու օրինակ։

1. $2<3$ անհավասարության երկու մասերը բազմապատկել a-ով և գրել ճիշտ անհավասարություններ։

Լուծում։ $2a<3a$, եթե $a>0$; $2a>3a$,

2. $ab<ac$ ճիշտ անհավասարության երկու մասերը բաժանել a-ի և գրել ճիշտ անհավասարություններ։

Լուծում։ $b-c$, եթե $a>0$։ $b>c$, եթե $a<0$։

Անհավասարությունների վերը նշված հատկությունները գրենք տրամաբանական հետևության և համարժեքության նշաններով (տես § 84)։

1. $(a>b)\Leftrightarrow(a-b>0)$;
2. $(a<b)\Leftrightarrow(a-b<0)$;
3. $(a>b, b>c)\Rightarrow(a>c)$։

Վարժություններ

667. Տրված անհավասարություններից յուրաքանչյուրը անդամ առ անդամ բազմապատկեցեք 2-ով, -3-ով, -1-ով և գրեցեք ճիշտ անհավասարություններ.

ա) $-5<4$, բ) $-6<-3$, գ) $8>-1$, դ) $7>2$։

668. Տրված անհավասարություններից յուրաքանչյուրը անդամ առ անդամ բաժանեցեք 3-ի, -5-ի, -1-ի և գրեցեք ճիշտ անհավասարություններ.

ա) $-6>-10$, բ) $9>-5$, գ) $-7<3$, դ) $5<8$։

669. Տրված է $5>-3$ անհավասարությունը։ Այն անդամ առ անդամ բազմապատկեցեք նաև x-ով, այնուհետև $-y$-ով և գրեցեք ճիշտ անհավասարություններ։

670. Տրված է $-8<7$ անհավասարությունը։ Այն անդամ առ անդամ բաժանեցեք նախ a-ի, այնուհետև $-b$-ի և գրեցեք ճիշտ անհավասարություններ։

671. Գրեցեք սույն պարագրաֆի 1-ին և 2-րդ թեորեմների պայմանն

ու եզրակացությունը՝ օգտագործելով անհավասարության և տրամաբանական հետևության նշանները։

672. ա) Եթե թվերից մեկը մեծ է մյուսից, ապա և առաջին թվի խորանարդը մեծ է երկրորդ թվի խորանարդից։ Ճի՞շտ է արդյոք հակադարձ պնդումը։

բ) Եթե մի թվի մոդուլը մեծ է մյուսի մոդուլից, ապա և առաջին թվի քառակուսին մեծ է երկրորդ թվի քառակուսուց։ Ճի՞շտ է արդյոք հակադարձ պնդումը։

Գրեցեք ստացված արդյունքները, օգտագործելով անհավասարության և համարժեքության նշանները։

§ 86. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՃԻՇՏ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ

Պայմանավորվենք $a>b$ *և* $c>d$ *կամ* $a<b$ *և* $c<d$ *տեսքի երկու անհավասարություններն անվանել նույն նշանի անհավասարություններ, իսկ* $a>b$ *և* $c<d$ *կամ* $a<b$ *և* $c<d$ *տեսքինները՝ հակադիր նշանի անհավասարություններ։*

Թ ե ո ր ե մ 1. **Եթե անդամ առ անդամ գումարենք նույն նշանի երկու ճիշտ անհավասարություններ, ապա կստացվի ճիշտ անհավասարություն (նույն նշանի):**

Ապացուցում։ Տրված է՝ $a>b$, $c>d$ ։ *Կազմենք* $(a+c)-(b+d)$ *տարբերությունը։ Այն հավասար է* $(a-b)+(c-d)$։ *Բայց* $a-b>0$, *քանի որ* $a>b$ *և* $c-d>0$, *քանի որ* $c>d$։ *Երկու դրական թվերի գումարը դրական թիվ է, ուստի* $(a+c)-(b+d)>0$, *որտեղից էլ հետևում է, որ* $a+c>b+d$։

Թ ե ո ր ե մ 2. **Եթե մի ճիշտ անհավասարությունից անդամ առ անդամ հանենք հակադիր նշանի մեկ այլ ճիշտ անհավասարություն, ապա կստացվի առաջին անհավասարության (այսինքն՝ «նվազելի» անհավասարության) նշանն ունեցող ճիշտ անհավասարություն:**

Ապացուցում։ Տրված է՝ $a>b$, $c<d$։ *Կազմենք* $(a-c)-(b-d)$ *տարբերությունը։ Այն հավասար է երկու դրական թվերի գումարի՝* $(a-b)+(d-c)$, *ուստի* $(a-c)-(b-d)>0$։ *Հետևաբար,* $a-c>b-d$։

Թ ե ո ր ե մ 3. **Եթե անդամ առ անդամ բազմապատկենք դրական թվերից կազմված և նույն նշանն ունեցող երկու ճիշտ անհավասարություններ, ապա կստացվի ճիշտ անհավասարություն (նույն այդ նշանի):**

Ապացուցում։ Տրված է՝ $a>b$, $c>d$ *և ընդ որում* a, b, c, d *թվերը դրական են։ Քանի որ* $a>b$ *և* $c>0$, *ապա* $ac>bc$, *քանի որ* $c>d$ *և* $b>0$, *ապա* $bc>bd$։

$ac>bc$ և $bc>bd$ *անհավասարությունների փոխանցականության շնորհիվ հետևում է, որ* $ac>bd$։

Թ ե ո ր ե մ 4. Եթե անդամ առ անդամ բաժանենք դրական թվերից կազմված և հակադիր նշաններ ունեցող երկու ճիշտ անհավասարություններ, ապա կստացվի առաջին անհավասարության (այսինքն՝ **«բաժանելիի»**) **նշանն ունեցող ճիշտ անհավասարություն:**

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ։ Տրված է՝ $a>b$, $c<d$, *ընդ որում* a, b, c, d *թվերը դրական են։ Կազմենք* $\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bc}{cd}$ *տարբերությունը և պարզենք նրա նշանը։ Քանի որ* $a>b$, $d>c$, *ապա նախորդ թեորեմի համաձայն՝* $ad>bc$, *այսինքն՝* $ad-bc>0$; $\frac{ad-bc}{cd}$ *կոտորակի համարիչն ու հայտարարը դրական թվեր են, ուրեմն կոտորակն ինքն էլ դրական թիվ է, հետևաբար* $\frac{a}{c}-\frac{b}{d}$ *տարբերությունը դրական թիվ է։ Այստեղից հետևում է, որ* $\frac{a}{c}>\frac{b}{b}$ ։

Թ ե ո ր ե մ 5. Եթե դրական թվերից կազմված ճիշտ անհավասարության երկու մասերը բարձրացնենք բնական ցուցիչով աստիճան, ապա կստացվի ճիշտ անհավասարություն (նույն նշանի):

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ։ Տրված են $a>b$ *անհավասարությունը,* n *բնական թիվը և* a, b *դրական թվերը։ Անդամ առ անդամ բազմապատկելով* $a>b$ *և* $a>b$ *միևնույն անհավասարությունները, ըստ 3-րդ թեորեմի կստանանք՝* $a^2>b^2$։ *Անդամ առ անդամ բազմապատկելով նոր ստացված և տրված անհավասարությունները, կստանանք՝* $a^3>b^3$։ *Հաջորդաբար շարունակելով այս պրոցեսը, կհանգենք պահանջվելիք* $a^n>b^n$ *անհավասարությանը։*

Դատելով հանգունորեն, կարելի է ապացուցել, որ $a<b$ *ճիշտ անհավասարությունից բխում է* $a^n<b^n$ *ճիշտ անհավասարությունը։*

Օ ր ի ն ա կ ն ե ր:

1) $+\begin{array}{r}-4<2\\ -3<-1\\ \hline -7<1\end{array}$ 2) $-\begin{array}{r}-5<3\\ 6>-4\\ \hline -11<7\end{array}$ 3) $\times\begin{array}{r}7>6\\ 8>5\\ \hline 56>30\end{array}$ 4) $:\begin{array}{r}56<63\\ 28>21\\ \hline 2<3\end{array}$

Դիտարկենք մի քանի խնդիրներ, որոնք լուծելիս օգտագործվում են անհավասարություններ։

Խ ն դ ի ր 1. *Կոտորակի համարիչն ու հայտարարը իրարից տարբեր դրական թվեր են։ Եթե դրանց ավելացնենք միևնույն դրական թիվը, ապա կանոնավոր կոտորակը կմեծանա, իսկ անկանոնը՝ կփոքրանա։ Ապացուցել։*

$ac>bc$ և $bc>bd$ անհավասարություններից փոխանցականության շնորհիվ հետևում է, որ $ac>bd$։

Թեորեմ 4. Եթե անդամ առ անդամ բաժանենք դրական թվերից կազմված և հակադիր նշաններ ունեցող երկու ճիշտ անհավասարություններ, ապա կստացվի առաջին անհավասարության (այսինքն՝ «բաժանելիի») նշանն ունեցող ճիշտ անհավասարություն։

Ապացուցում։ Տրված է՝ $a>b$, $c<d$, ընդ որում a, b, c, d թվերը դրական են։ Կազմենք $\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bc}{cd}$ տարբերությունը և պարզենք նրա նշանը։ Քանի որ $a>b$, $d>c$, ապա նախորդ թեորեմի համաձայն՝ $ad>bc$, այսինքն՝ $ad-bc>0$։ $\frac{ad-bc}{cd}$ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը դրական թվեր են, ուրեմն կոտորակն ինքն էլ դրական թիվ է, հետևաբար $\frac{a}{c}-\frac{b}{d}$ տարբերությունը դրական թիվ է։ Այստեղից հետևում է, որ $\frac{a}{c}>\frac{b}{b}$։

Թեորեմ 5. Եթե դրական թվերից կազմված ճիշտ անհավասարության երկու մասերը բարձրացնենք բնական ցուցիչով աստիճան, ապա կստացվի ճիշտ անհավասարություն (նույն նշանի)։

Ապացուցում։ Տրված են $a>b$ անհավասարությունը, n բնական թիվը և a, b դրական թվերը։ Անդամ առ անդամ բազմապատկելով $a>b$ և $a>b$ միևնույն անհավասարությունները, ըստ 3-րդ թեորեմի կստանանք՝ $a^2>b^2$։ Անդամ առ անդամ բազմապատկելով նոր ստացված և տրված անհավասարությունները, կստանանք՝ $a^3>b^3$։ Հաջորդաբար շարունակելով այս պրոցեսը, կհանգենք պահանջվելիք $a^n>b^n$ անհավասարությանը։

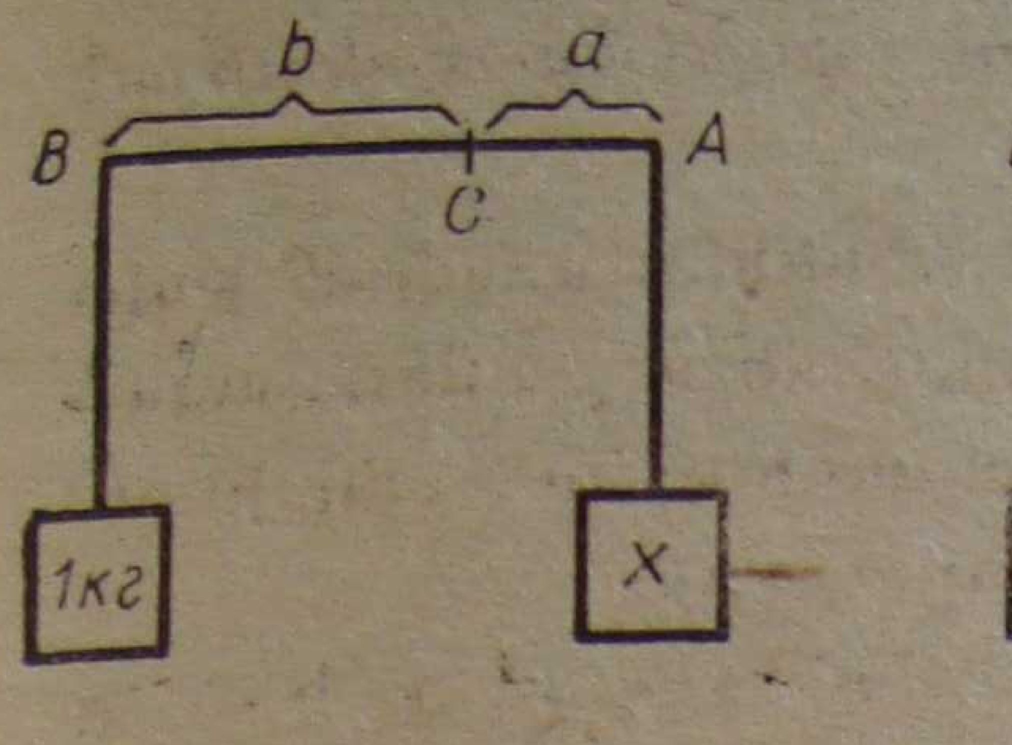
Դատելով հանգունորեն, կարելի է ապացուցել, որ $a<b$ ճիշտ անհավասարությունից բխում է $a^n<b^n$ ճիշտ անհավասարությունը։

Օրինակներ։

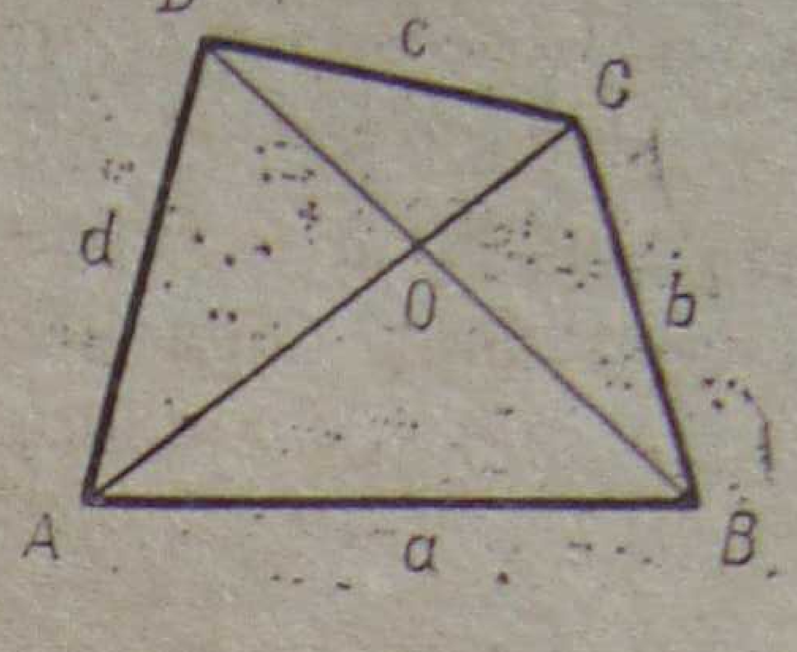
$$1)\ +\begin{array}{r}-4<2\\ -3<-1\\ \hline -7<1\end{array}\qquad 2)\ -\begin{array}{r}-5<3\\ 6>-4\\ \hline -11<7\end{array}\qquad 3)\ \times\begin{array}{r}7>6\\ 8>5\\ \hline 56>30\end{array}\qquad 4)\ :\begin{array}{r}56<63\\ 28>21\\ \hline 2<3\end{array}$$

Դիտարկենք մի քանի խնդիրներ, որոնք լուծելիս օգտագործվում են անհավասարություններ։

Խնդիր 1. Կոտորակի համարիչն ու հայտարարը իրարից տարբեր դրական թվեր են։ Եթե դրանց ավելացնենք միևնույն դրական թիվը, ապա կանոնավոր կոտորակը կմեծանա, իսկ անկանոնը՝ կփոքրանա։ Ապացուցել։



Նկ. 98



Նկ. 99

Լուծում։ Տրված է $\frac{a}{b}$ կոտորակը և $m>0$ թիվը, ընդ որում a, b թվերը դրական են։ Դիտարկենք տարբերությունը և պարզենք նրա նշանը։

Եթե $a<b$ (կոտորակը կանոնավոր է), ապա նշված տարբերությունը դրական թիվ է, ուստի $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$։

Իսկ եթե $a>b$ (կոտորակը անկանոն է), ապա տարբերությունը բացասական է, ուստի $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$։

Խնդիր 2։ *Ունենք ակնհայտորեն սխալ կշեռք (անհավասար բազուկներով լծակ) և 1 կգ զանգվածով կշռաքար։ Սկզբում հավասարակշռեցին որոշ բեռ, այն դնելով կշեռքի աջ նժարին, իսկ կշռաքարը՝ ձախ նժարին։ Այնուհետև հավասարակշռեցին մեկ այլ բեռ, այն դնելով կշեռքի ձախ նժարին, իսկ կշռաքարը՝ աջ նժարին։ Կարո՞ղ է արդյոք այդ երկու բեռների գումարային զանգվածը մեծ լինել 2 կգ-ից (նկ. 98)։*

Լուծում։ Դիցուք աջ և ձախ բազուկների երկարություններն են համապատասխանաբար a և b (սմ-երով), իսկ առաջին և երկրորդ բեռների զանգվածները՝ x և y (կգ-երով)։ Լծակի հավասարակշռության պայմանի (ուժերի և համապատասխան բազուկների երկարությունների արտադրյալները հավասար են) համաձայն կստանանք նախ $x\cdot a=1\cdot b$, իսկ այնուհետև $1\cdot a=y\cdot b$, որտեղից $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{a}{b}$։ Խնդիրը հանգեց այն հարցին, թե $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ գումարը 2-ից մեծ է, թե փոքր։ Ունենք.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}>0 \quad (a\neq b)։$$

Տարբերությունը ստացվեց դրական, ուստի $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$, եթե $a\neq b$։

(Ակնհայտ է, որ $a=b$ դեպքում $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$։)

Այսպիսով, երկու բեռների գումարային զանգվածը մեծ է 2 կգ-ից։

Խնդիր 3։ Ապացուցել, որ ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերի երկարությունների գումարը փոքր է պարագծից, բայց մեծ է կիսապարագծից։

Լուծում. ABCD ուռուցիկ քառանկյան կողմերի երկարությունները նշանակենք $|AB|=a$, $|BC|=b$, $|CD|=c$, $|AD|=d$, իսկ AC և BD անկյունագծերի հատման կետը O տառով (նկ. 99)։

ABC և ADC եռանկյուններից համապատասխանաբար՝ $|AC|<a+b$, $|AC|<c+d$։ Անդամ առ անդամ գումարելով երկու անհավասարությունները, ստացվում է՝ $|AC|<\frac{1}{2}(a+b+c+d)$։ Դատելով համանմանորեն, ստանում ենք՝ $|BD|<\frac{1}{2}(a+b+c+d)$։ Անդամ առ անդամ գումարելով այս երկու անհավասարությունները, ստանում ենք՝ $|AC|+|BD|<a+b+c+d$։

Խնդրի երկրորդ մասը լուծելու համար օգտվենք այն բանից, որ ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետը գտնվում է քառանկյան ներսում։

O գագաթ ունեցող չորս եռանկյուններից ստանում ենք.

$$a<|AO|+|BO|, b<|BO|+|CO|, \quad c<|CO|+|DO|, d<|DO|+|AO|։$$

Անդամ առ անդամ գումարելով այս չորս անհավասարությունները, կստանանք.

$$a+b+c+d<2(|AO|+|BO|+|CO|+|DO|)=2(|AC|+|BD|)։$$

Այսպիսով,

$$\frac{1}{2}(a+b+c+d)<|AC|+|BD|<a+b+c+d.$$

Վարժություններ

Անդամ առ անդամ գումարեցեք երկու անհավասարությունները.

673. ա) $17>3$, $16>4$, գ) $4>-3$, $-2>-7$,
բ) $-2<5$, $-7<4$, դ) $-6<-3$, $-8<-1$։

674. ա) $6<13$, $5<14$, գ) $-5<4$, $-2<-1$,
բ) $12>-9$, $5>-3$, դ) $-7>-11$, $-15>-17$։

Առաջին անհավասարությունից անդամ առ անդամ հանեցեք երկրորդը․

675. ա) $5<7$, $9>3$, գ) $15>-3$, $-4<-2$,
բ) $12>5$, $-3<7$, դ) $-13<-11$, $-7>-19$։

676. ա) $4>3$, $7<9$, գ) $-14>-23$, $-15<9$,
բ) $-5<12$, $17>11$, դ) $-17<-13$, $-14>-18$։

Անդամ առ անդամ բազմապատկեցեք հետևյալ երկու անհավասարությունները․

677. ա) $14<16$, $2<3$, գ) $16>13$, $6>5$,
բ) $36>12$, $3>2$, դ) $2<23$, $3<4$։

678. ա) $24>5$, $2>1$, գ) $9>6$, $3>2$,
դ) $5<12$, $3<5$, դ) $2<3$, $17<24$։

Առաջին անհավասարությունը անդամ առ անդամ բաժանենք երկրորդի վրա․

679. ա) $24>15$, $8<20$, գ) $36<45$, $9>5$,
բ) $16>9$, $4<9$, դ) $5<12$, $10>6$։

680. ա) $14>9$, $7<18$, գ) $25>18$, $5<9$,
բ) $4<9$, $36>18$, դ) $50<81$, $10>3$։

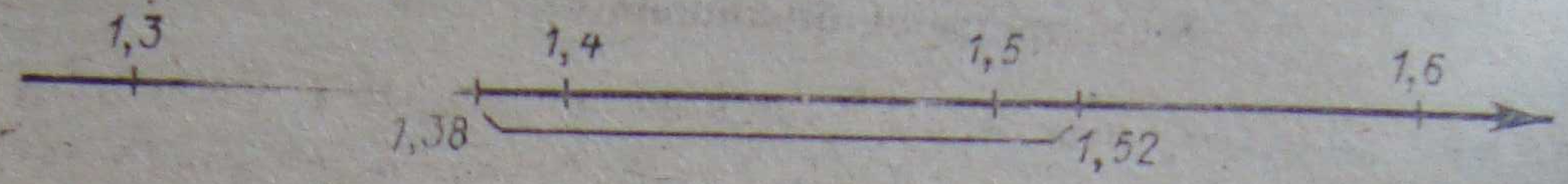
§ 87. ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐԻ ՃՇԳՐՏՈՒԹՅԱՆ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄԸ

VI գլխում մենք ծանոթացանք մոտավոր հաշվումներին վերաբերող շատ սահմանումների։ Այժմ, երբ մենք գիտենք ճիշտ թվային անհավասարությունների հետ կատարվող գործողությունների կանոնները, մենք կարող ենք ուսումնասիրել թվաբանական գործողությունների արդյունքների գնահատման հարցը։ Դրա համար պետք է սովորել հաշվել այդ արդյունքների սխալները։

Նախապես հիշեցնենք հետևյալը (տես § 45)։ Դիցուք, օրինակ, ինչ-որ հատվածի x երկարությունը կարող է ընդունել 35 սմ և 38 սմ եզրերի միջև գտնվող ցանկացած արժեք, այնպես որ $35\leqslant x\leqslant 38$։ Որպես x երկարության լավագույն մոտավոր արժեք կհամարենք նրա եզրերի կիսագումարը՝ 36,5, իսկ որպես բացարձակ սխալի եզր, այսինքն՝ որպես այդ մոտավորության ճշգրտություն, կընդունենք եզրերի կիսատարբերությունը՝ 1,5։ Այսպիսով, եթե $35\leqslant x\leqslant 38$, ապա $x=36{,}5\pm 1{,}5$ սմ։

Ընդհանրապես, եթե $a\leqslant x\leqslant b$, ապա $x=$ $x=\frac{a+b}{2}\pm\left(\frac{b-a}{2}\right)$,

Մյուս կողմից, եթե տրված է ինչ-որ հատվածի երկարության մոտավոր արժեքը և նշված է այդ մոտավորության բացարձակ սխալի եզրը (այսինքն՝ ճշգրտությունը), ապա կարելի է նշել այն եզրերը, որոնց միջև



Նկ. 100

գտնվում է տրված հատվածի x երկարությունը: Օրինակ, եթե հայտնի է, որ $x=23\pm0,5$ սմ, ապա x երկարության ստորին եզրը հավասար է 22,5 սմ-ի, իսկ վերին եզրը՝ 23,5 սմ-ի, այնպես որ $22,5\leqslant x\leqslant 23,5$:

Ընդհանրապես, եթե $x=a\pm h$, ապա $a-h\leqslant x\leqslant a+h$:

Այնուհետև ենթադրենք, թե որոշ չափումից ստացվել է այսպիսի արդյունք՝ $1,38\leqslant x\leqslant 1,52$ և մենք ցանկանում ենք եզրերը կլորացնել տասնորդականի ճշգրտությամբ: Սխալ կլիներ, եթե մենք գրեինք $1,4\leqslant x\leqslant 1,5$, քանի որ այդպիսի կլորացման դեպքում հանիրավի նեղացվում է տրված միջակայքը և կորչում են չափվող մեծության հնարավոր արժեքները (նկ. 100):

Եզրերը կլորացնելիս ստորին (ձախ, փոքր) եզրը կլորացվում է միայն պակասորդով, իսկ վերին (աջ, մեծ) եզրը՝ միայն հավելորդով: Հետևաբար ճիշտ կլիներ գրել՝ $1,3\leqslant x\leqslant 1,6$:

Գումարի գնահատումը

Խնդիր 1: Եռանկյան կողմերի երկարություններն են՝ $a=10,2\pm0,2$ սմ, $b=8,7\pm0,2$ սմ, $c=5,5\pm0,2$ սմ: Հաշվել եռանկյան P պարագիծը:

Լուծում: Կազմենք երեք կրկնակի անհավասարություն և գումարենք անդամ առ անդամ.

$$\begin{array}{r} 10,0\leqslant a\leqslant 10,4 \\ +\;8,5\leqslant b\leqslant 8,9 \\ 5,3\leqslant c\leqslant 5,7 \\ \hline 23,8\leqslant a+b+c\leqslant 25,0: \end{array}$$

Մենք կստանանք պարագծի եզրերը՝ $23,8\leqslant P\leqslant 25,0$: Որպես պարագծի մոտավոր արժեք ընդունենք նրա եզրերի կիսագումարը՝ $\frac{23,8+25,0}{2}=24,4$, իսկ որպես բացարձակ սխալի եզր (այսինքն, որպես ճշգրտություն)՝ նրա եզրերի կիսատարբերությունը՝ $\frac{25,0-23,8}{2}=0,6$: Այսպիսով, $P=24,4\pm0,6$ սմ:

Հարաբերական սխալի եզրը (այսինքն՝ հարաբերական ճշգրտությունը) հավասար է $\frac{0,6}{24,4}\approx 2,5\%$:

Խ ն դ ի ր 2: *Հավասարասրուն եռանկյան պարագիծն է՝* $P=28,4\pm$ $\pm 0,5$ *սմ, իսկ հիմքը՝* $a=7,9\pm 0,5$ *սմ։ Հաշվել* b *կողմնային կողմի երկարությունը։*

Լուծում։ $a+2b=P,\ b=\dfrac{P-a}{2}$,

Կազմենք երկու կրկնակի անհավասարություն և առաջինից անդամ առ անդամ հանենք երկրորդը (պահպանելով անհավասարությունների հանման կանոնը).

$$\begin{array}{r} 27,9\leqslant P\leqslant 28,9 \\ -\ 8,4\geqslant a\geqslant\ 7,4 \\ \hline 19,5\leqslant P-a\leqslant 21,5 \end{array}$$

Այսպիսով, $P-a=2b=20,5\pm 1,0$ *սմ,* $b=10,25\pm 0,5$ *սմ։*

Ճշգրտությունը հավասար է 0,5 սմ-ի, իսկ հարաբերական ճշգրտությունը՝ $\dfrac{0,5}{10,25}\approx 5\ \%$։

Խ ն դ ի ր 3. *Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյան մեծությունն է՝* $\hat{A}=32^\circ\pm 1^\circ$*։ Հաշվել եռանկյան գագաթի B անկյան մեծությունը։*

Լուծում։ $2\hat{A}+\hat{B}=180^\circ,\ \hat{B}=180^\circ-2\hat{A}$։

Ունենք. $31^\circ\leqslant\hat{A}\leqslant 33^\circ,\ 62^\circ\leqslant 2\hat{A}\leqslant 66^\circ,\ -66^\circ\leqslant -2\hat{A}\leqslant -62^\circ,$

$180^\circ-66^\circ\leqslant 180^\circ-2\hat{A}\leqslant 180^\circ-62^\circ,\ 114^\circ\leqslant\hat{B}\leqslant 118^\circ,\ \hat{B}=116^\circ\pm 2^\circ$։

Արտադրյալի գնահատումը

Խ ն դ ի ր 4: *Եռանկյան կողմերի երկարություններն են՝* $a=14,4\pm$ $\pm 0,2$ *սմ,* $b=8,3\pm 0,2$ *սմ։ Հաշվել եռանկյան S մակերեսը։*

Լուծում։ Կազմենք երկու կրկնակի անհավասարություն և անդամ առ անդամ բազմապատկենք.

$$\begin{array}{r} 14,2\leqslant a\leqslant 14,6 \\ 8,1\leqslant b\leqslant\ 8,5 \\ \hline 115\leqslant ab\leqslant 125 \end{array}$$

Այսպիսով, $S=120\pm 5$ *սմ։ Հարաբերական ճշգրտությունն է* $\dfrac{5}{120}\approx$ $\approx 4,2\ \%$։

Խ ն դ ի ր 5: *Հաշվել* $R=5,4\pm 0,2$ *սմ և* $r=2,8\pm 0,2$ *սմ շառավիղ-*

ներ ունեցող շրջանագծերով սահմանափակված օղակի մակերեսը (ընդունել, որ $\pi=3,14$)։

1-ին լուծում։ Հաշվենք $S=\pi(R^2-r^2)$ բանաձևով։

$$\begin{array}{c} 5,2\leqslant R\leqslant 5,6 \\ 5,2\leqslant R\leqslant 5,6 \\ \hline 27,0\leqslant R^2\leqslant 31,4, \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2,6\leqslant r\leqslant 3,0 \\ 2,6\leqslant r\leqslant 3,0 \\ \hline 6,76\leqslant r^2\leqslant 9,00; \end{array}$$

$$-\begin{array}{c} 27,0\leqslant R^2\leqslant 31,4 \\ 9,00\geqslant r^2\geqslant 6,76 \\ \hline 18,0\leqslant R^2-r^2\leqslant 24,7; \end{array}$$

$$3,14\cdot 18,0\leqslant \pi(R^2-r^2)\leqslant 3,14\cdot 24,7,$$

$$56,52\leqslant S\leqslant 77,56;$$

Այսպիսով. $S=67,04\pm10,52$ *սմ², կամ, կլորացնելով,* $S=67\pm11$ *սմ²։*

2-րդ լուծում։ Հաշվենք $S=\pi(R+r)(R-r)$ բանաձևով։

$$+\begin{array}{c} 5,2\leqslant R\leqslant 5,6 \\ 2,6\leqslant r\leqslant 3,0 \\ \hline 7,8\leqslant R+r\leqslant 8,6; \end{array} \qquad -\begin{array}{c} 5,2\leqslant R\leqslant 5,6 \\ 3,0\geqslant r\geqslant 2,6 \\ \hline 2,2\leqslant R-r\leqslant 3,0; \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 7,8\leqslant R+r\leqslant 8,6 \\ 2,2\geqslant R-r\leqslant 3,0 \\ \hline 17,1\leqslant(R+r)(R-r)\leqslant 25,8 \end{array}$$

$$3,14\cdot 17,1\leqslant \pi(R+r)(R-r)\leqslant 3,14\cdot 25,8$$

$$53,69\leqslant S\leqslant 81,02;$$

Այսպիսով, $S=67,36\pm13,67$ *սմ², կամ, կլորացնելով,* $S=67\pm13,5$ *սմ²։ Մակերեսի* $53,69\leqslant S\leqslant 81,02$ *միջակայքը ավելի լայն է 1-ին լուծումից ստացված* $56,52\leqslant S\leqslant 77,56$ *միջակայքից, ուստի վերջինս գերադասելի է երկրորդ լուծումից։*

Քանորդի գնահատումը

Խնդիր 6։ *Ուղղանկյան մակերեսն է* $S=82\pm4$ *սմ², իսկ կողմը՝* $a=6,4\pm0,2$ *սմ։ Հաշվել ուղղանկյան* b *կողմի երկարությունը։*

Լուծում։ *Կազմենք երկու կրկնակի անհավասարություն և առաջինը անդամ առ անդամ բաժանենք երկրորդի վրա (պահպանելով անհավասարությունների բաժանման կանոնը)․*

$$:\begin{array}{c} 78,0\leqslant S\leqslant 86,0 \\ 6,6\geqslant a\geqslant 6,2 \\ \hline 11,8\leqslant \frac{S}{a}\leqslant 13,9; \end{array}$$

ներ ունեցող շրջանագծերով սահմանափակված օղակի մակերեսը (ընդունել, որ $\pi = 3,14$)։

1-ին լուծում։ Հաշվենք $S = \pi(R^2 - r^2)$ բանաձևով։

$$\begin{array}{c} 5,2 \leqslant R \leqslant 5,6 \\ 5,2 \leqslant R \leqslant 5,6 \\ \hline 27,0 \leqslant R^2 \leqslant 31,4, \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2,6 \leqslant r \leqslant 3,0 \\ 2,6 \leqslant r \leqslant 3,0 \\ \hline 6,76 \leqslant r^2 \leqslant 9,00; \end{array}$$

$$-\begin{array}{c} 27,0 \leqslant R^2 \leqslant 31,4 \\ 9,00 \geqslant r^2 \geqslant 6,76 \\ \hline 18,0 \leqslant R^2 - r^2 \leqslant 24,7; \end{array}$$

$$3,14 \cdot 18,0 \leqslant \pi(R^2 - r^2) \leqslant 3,14 \cdot 24,7,$$

$$56,52 \leqslant S \leqslant 77,56;$$

Այսպիսով. $S = 67,04 \pm 10,52$ սմ², կամ, կլորացնելով, $S = 67 \pm 11$ սմ²։

2-րդ լուծում։ Հաշվենք $S = \pi(R+r)(R-r)$ բանաձևով։

$$+\begin{array}{c} 5,2 \leqslant R \leqslant 5,6 \\ 2,6 \leqslant r \leqslant 3,0 \\ \hline 7,8 \leqslant R+r \leqslant 8,6; \end{array} \qquad -\begin{array}{c} 5,2 \leqslant R \leqslant 5,6 \\ 3,0 \geqslant r \geqslant 2,6 \\ \hline 2,2 \leqslant R-r \leqslant 3,0; \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 7,8 \leqslant R+r \leqslant 8,6 \\ 2,2 \geqslant R-r \leqslant 3,0 \\ \hline 17,1 \leqslant (R+r)(R-r) \leqslant 25,8 \end{array}$$

$$3,14 \cdot 17,1 \leqslant \pi(R+r)(R-r) \leqslant 3,14 \cdot 25,8$$

$$53,69 \leqslant S \leqslant 81,02;$$

Այսպիսով, $S = 67,36 \pm 13,67$ սմ², կամ, կլորացնելով, $S = 67 \pm 13,5$ սմ²։ Մակերեսի $53,69 \leqslant S \leqslant 81,02$ միջակայքը ավելի լայն է 1-ին լուծումից ստացված $56,52 \leqslant S \leqslant 77,56$ միջակայքից, ուստի վերջինս գերադասելի է երկրորդ լուծումից։

Քանորդի գնահատումը

Խնդիր 6։ *Ուղղանկյան մակերեսն է $S = 82 \pm 4$ սմ², իսկ կողմը՝ $a = 6,4 \pm 0,2$ սմ։ Հաշվել ուղղանկյան b կողմի երկարությունը։*

Լուծում։ Կազմենք երկու կրկնակի անհավասարություն և առաջինը անդամ առ անդամ բաժանենք երկրորդի վրա (պահպանելով անհավասարությունների բաժանման կանոնը)։

$$:\begin{array}{c} 78,0 \leqslant S \leqslant 86,0 \\ 6,6 \geqslant a \geqslant 6,2 \\ \hline 11,8 \leqslant \dfrac{S}{a} \leqslant 13,9; \end{array}$$

Այսպիսով, $b=\frac{S}{a}=12,85\pm1,05$ սմ, կամ $b=12,8\pm1,0$ սմ։ Հարաբերական ճշգրտությունը հավասար է $\frac{10}{128}\approx 8\,\%$։

Խնդիր 7։ Հաշվել նյութի d խտությունը, եթե նրանից պատրաստված $D=2,49\pm0,01$ դմ տրամագծով գունդն ունի $m=42,6\pm0,05$ կգ զանգված (ընդունել, որ $\pi=3,14$)։

Լուծում։ Գնդի ծավալն է $V=\frac{1}{6}\cdot\pi D^3$, իսկ խտությունը՝ $d=\frac{m}{V}$։

Հաշվենք $d=\frac{6m}{\pi D^3}$ բանաձևով։

1) $42,55\leqslant m\leqslant 42,65$; $255,30\leqslant 6m\leqslant 255,90$,

2) $2,48\leqslant D\leqslant 2,50$; $6,150\leqslant D^2\leqslant 6,250$; $15,25\leqslant D^3\leqslant 15,63$, $3,14\cdot 15,25\leqslant \pi\cdot D^3\leqslant 3,14\cdot 15,63$; $47,88\leqslant \pi D^3\leqslant 49,08$,

3)
$$\begin{array}{c} 255,30\leqslant 6m\leqslant 255,90 \\ 49,08\geqslant \pi D^3\geqslant 47,88 \\ \hline 5,201\leqslant \frac{6m}{\pi D^3}\leqslant 5,345 \end{array}$$

Այսպիսով. $d=5,273\pm0,072$ կգ/դմ^3, կամ, կլորացնելով, $d=5,27\pm\pm0,08$ կգ/դմ^3; $5,27\pm0,07$ կգ/դմ^3 կլորացումը կնեղացներ խտության միջակայքը ($5,34<5,345$)։

Հարաբերական ճշգրտությունը հավասար է $\frac{0,08}{5,27}\approx 1,5\,\%$։

Պատասխան. 5270 ± 80 կգ/մ^3։

Այսպիսով, գիտենալով թվաբանական գործողությունների բաղադրիչների եզրերը, մենք կարող ենք որոշել գործողությունների արդյունքների եզրերը և հաշվել այդ արդյունքների սխալները։

Ավելի բարդ հաշվումների ժամանակ օգտվում են սխալների եզրերի վերաբերյալ ստորև ձևակերպված թեորեմներից (բերում ենք առանց ապացուցման)։

Գումարի (տարբերության) բացարձակ սխալի եզրը հավասար է գումարելիների (նվազելիի և հանելիի) բացարձակ սխալների եզրերի գումարին։

Արտադրյալի (քանորդի) հարաբերական սխալի եզրը հավասար է արտադրիչների (բաժանելիի և բաժանարարի) հարաբերական սխալների եզրերի գումարին։

Արտադրյալի (քանորդի) բացարձակ սխալի եզրը որոշվում է բազմապատկելով հարաբերական սխալը և արտադրյալի (քանորդի) մոտավոր արժեքը. $h=\varepsilon\cdot|a|$, (§ 46)։

Հաշվեցեք որոնելի մեծության մոտավոր արժեքը և որոշեցեք վերջինիս բացարձակ սխալի եզրը։

681. *ա)* Քառակուսու կողմի երկարության չափման արդյունքն է (մմ-երով). $215 < a < 220$։ Գտեք քառակուսու պարագիծը։

բ) Գտեք ուղղանկյան պարագիծը, եթե նրա կողմերի երկարությունների չափման արդյունքներն են (սմ-երով). $a = 612{,}5 \pm 2{,}5$, $b = 437{,}5 \pm 2{,}5$։

682. *ա)* Ուղղանկյան կողմերի երկարությունների չափման արդյունքներն են (սմ-երով). $120 < a < 122$, $58 < b < 60$։ Հաշվեցեք ուղղանկյան մակերեսը։

բ) Եռանկյան բարձրության և հիմքի երկարության չափման արդյունքներն են (մմ-երով). $h = 261 \pm 1$, $a = 151{,}5 \pm 3{,}5$։ Հաշվեցեք եռանկյան մակերեսը։

683. Շրջանագծի երկարությունը հաշվվում է $C = \pi D$ բանաձևով։ Ընդունելով, որ $\pi = 3{,}14$, հաշվեցեք շրջանագծի երկարությունը (սմ-երով), եթե. ա) $75 < d < 79$, բ) $d = 58 \pm 2$։

684. Շրջանի մակերեսը հաշվվում է $S = \pi R^2$ բանաձևով։ Ընդունելով, որ $\pi = 3{,}14$, հաշվեցեք շրջանի մակերեսը (սմ-երով), եթե. ա) $R = 64 \pm 2$, բ) $24 < R < 26$։

685. Կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է $S = \pi Rl$ բանաձևով։ Ընդունելով, որ $\pi = 3{,}14$, հաշվեցեք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե հիմքի շառավղի և ծնորդի երկարությունների չափման արդյունքներն են (սմ-երով).

ա) $2{,}5 < R < 2{,}7$, $5{,}3 < l < 5{,}5$, *բ)* $32 < R < 36$, $55 < l < 59$, *գ)* $R = 33{,}5 \pm 1{,}5$, $l = 58 \pm 1$։

686. Համասեռ նյութի ρ խտությունը հաշվելու համար կիրառվում է $\rho = \dfrac{m}{V}$ բանաձևը, որտեղ m-ը նյութի զանգվածն է (գ-երով), իսկ V-ն՝ ծավալը (սմ-երով)։ Հաշվեցեք նյութի խտությունը և պարզեցեք, թե կարող է արդյոք այն լողալ ջրում, եթե.

ա) $29{,}5 < m < 31{,}5$, $22 < V < 26$, *բ)* $m = 85 \pm 1$, $V = 123 \pm 3$։

§ 88. ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑՈՒՄԸ

Դիտարկենք a փոփոխականով $a^2 + 1 > 0$ անհավասարությունը։ a փոփոխականի ցանկացած արժեքի դեպքում այն վերածվում է ճիշտ թվային անհավասարության, այսպես՝ $a = 1$ դեպքում ստացվում է $2 > 0$, $a = -3$ դեպքում՝ $10 > 0$ և այլն։

Իսկ, օրինակ, $2a^2+3<0$ անհավասարությանը չի բավարարում a-ի ոչ մի արժեք. $a=1$ դեպքում ստացվում է $5<0$ ոչ ճիշտ անհավասարությունը, $a=-2$ դեպքում՝ դարձյալ ոչ ճիշտ $11<0$ անհավասարությունը և այլն։

Տրված է $3(2-a)<10$ անհավասարությունը։ $a=2$ դեպքում ստացվում է ճիշտ անհավասարություն, իսկ $a=-2$ դեպքում՝ ոչ ճիշտ։ Այսպիսով, 2 արժեքը բավարարում է տրված անհավասարությանը, իսկ -2 արժեքը՝ ոչ (տես § 27)։

Ապացուցել փոփոխականներ պարունակող անհավասարությունը, նշանակում է հաստատել, որ փոփոխականների բոլոր այն արժեքների դեպքում, երբ անհավասարության երկու մասերի արժեքներն էլ գոյություն ունեն, տրված անհավասարությունը վերածվում է ճիշտ թվային անհավասարության (տես § 30)։

Անհավասարությունն ապացուցելիս, որպես կանոն, հարկ է պարզել նրա երկու մասերի տարբերության նշանը (տես § 85)։

Մի քանի օրինակներով դիտարկենք անհավասարությունների ապացուցման այլ եղանակներ։

Առաջին եղանակն այն է, որ ելնելով որոշ հայտնի անհավասարություններից, որոնք ճիշտ են փոփոխականների բոլոր արժեքների դեպքում, զանազան նույնական ձևափոխությունների միջոցով հանգում են այն անհավասարությանը, որը պահանջվում է ապացուցել։

Օրինակ 1: Ապացուցել $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$ անհավասարությունը, որտեղ a-ն, b-ն, c-ն կամայական թվեր են։

Կազմենք երեք անհավասարություններ, որոնք ակնհայտորեն ճիշտ են փոփոխականների բոլոր արժեքների դեպքում՝ $(a-b)^2 \geqslant 0$, $(b-c)^2 \geqslant 0$, $(c-a)^2 \geqslant 0$։ Դրանք գրենք $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, $b^2+c^2 \geqslant 2bc$, $c^2+a^2 \geqslant 2ac$ տեսքով։ Անդամ առ անդամ գումարելով այս երեք անհավասարությունները և ստացված անհավասարությունը կրճատելով 2-ով, հանգում ենք տրված անհավասարությանը։

Օրինակ 2: Եթե a-ն, b-ն, c-ն եռանկյան կողմերի երկարություններն են, ապա

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)։$$

Ենթադրենք, թե $a \geqslant b \geqslant c$։ Կազմենք երկու անհավասարություններ, որոնք խնդրի պայմանի համաձայն ճիշտ են փոփոխականների բոլոր արժեքների դեպքում՝ $a>b-c$, $b>a-c$, $c>a-b$։ Այս անհավասարություններից յուրաքանչյուրի երկու մասերն էլ ընդունում են դրական արժեքներ։ Անդամ առ անդամ քառակուսի բարձրացնելով յուրաքանչյուր անհավասարությունը և գումարելով ստացված երեք անհավասարությունները, կստանանք պահանջվող անհավասարությունը.

19—509

$$a^2+b^2+c^2>(b-c)^2+(a-c)^2+(a-b)^2,$$

$$(b-c)^2+(a-c)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(bc+ac+ab),$$

$$2(ab+ac+bc)>a^2+b^2+c^2։$$

Անհավասարություններ ապացուցելու երկրորդ եղանակը հետևյալն է։ Ենթադրում ենք, որ տրված անհավասարությունը ճիշտ է փոփոխականի բոլոր արժեքների դեպքում, և, կատարելով զանազան նույնական ձևափոխություններ, հանգում ենք որոշ անհավասարության, որը ճիշտ է փոփոխականների բոլոր արժեքների դեպքում։ Ստացված անհավասարությունը ընդունելով որպես սկզբնական և, եթե հնարավոր է, հակառակ կարգով կատարելով բոլոր նշված ձևափոխությունները, հանգում ենք այն անհավասարությանը, որը պահանջվում է ապացուցել։

Օրինակ 3։ *Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը.*

$$(5a+1)^2\leqslant 26(a^2+1)։ \qquad (1)$$

Ենթադրենք, թե (1) անհավասարությունը ճիշտ է a *փոփոխականի բոլոր արժեքների դեպքում։ Ձևափոխենք այն.*

$$25a^2+10a+1\leqslant 26a^2+26, \qquad (2)$$

$$10a\leqslant 25+a^2, \qquad (3)$$

$$(a-5)^2\geqslant 0։ \qquad (4)$$

(4) անհավասարությունը ճիշտ է a*-ի բոլոր արժեքների դեպքում։ Հենց այդպիսի անհավասարություն գտնելուն էլ մենք ձգտում էինք։ Այս անհավասարությունից, փակագծերը բացելով, կարելի է անցնել (3) անհավասարությանը։ (3) անհավասարության երկու մասերին ավելացնելով* $25a^2+1$*, կստանանք (2) անհավասարությունը։ Վերջինիս յուրաքանչյուր մասում կատարելով արտադրիչների վերլուծում, կստանանք (1) անհավասարությունը, որով և ավարտվում է ապացուցումը։*

Օրինակ 4։ *Ապացուցել*

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2, \ (a>0, \ b>0)$$

անհավասարությունը։

Կազմենք անհավասարության ձախ և աջ մասերի տարբերությունը և պարզենք նրա նշանը.

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2=a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)(a^2-b^2)=$$

$$=(a-b)^2(a+b)։$$

Քանի որ $(a-b)^2\geqslant 0$ *և* $a+b>0$*, ուստի տարբերությունը բացասական չէ, հետևաբար անհավասարության ձախ մասը փոքր չէ աջ մասից,*

a և b փոփոխականների բոլոր արժեքների դեպքում։ Սա էլ հենց պահանջվում էր ապացուցել։

Վարժություններ

Ապացուցեք հետևյալ անհավասարությունները.

687. ա) $\frac{y}{y^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$, բ) $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab$։

988. $\frac{b+2}{b} + \frac{2+b}{2} \geqslant 4$, $b>0$։

689. $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqslant (ax+by)^2$։

690. $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \geqslant (a^3+b^3)^2$։

691. $x^4+y^4 \geqslant xy^3+x^3y$, $x>0$, $y>0$։

692. ա) $x^3+1 \geqslant x^2+x$, եթե $x \geqslant -1$,

բ) $x^3+1 \leqslant x^2+x$, եթե $x \leqslant -1$։

§ 89. ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Դիցուք տրված է փոփոխական պարունակող անհավասարություն։ Փոփոխականի ցանկացած արժեքը, որը բավարարում է անհավասարությանը, կոչվում է անհավասարության լուծում:

Լուծել փոփոխականով անհավասարությունը, նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումների բազմությունը:

Մեկ փոփոխականով գծային անհավասարություն կոչվում է $ax+b>0$ կամ $ax+b<0$ տեսքի անհավասարությունը:

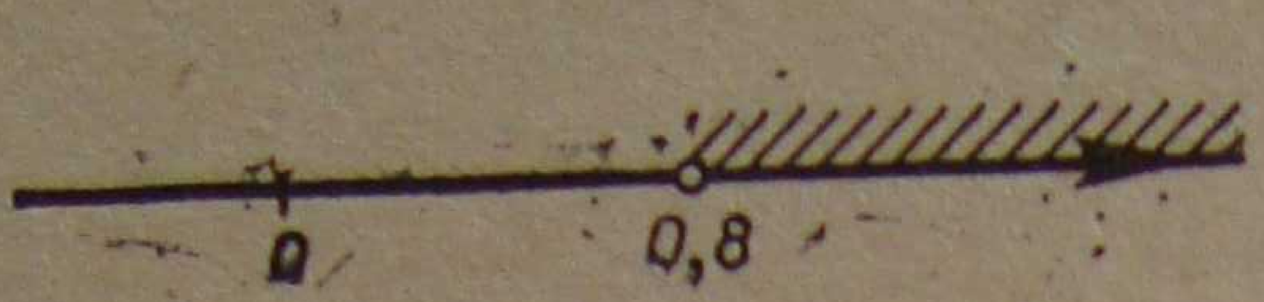
Քննարկենք մեկ փոփոխականով գծային անհավասարությունների բերվող մի քանի անհավասարությունների լուծումներ։

1) $\frac{6-5x}{3} < \frac{3x-2}{4} - \frac{2x-5}{6}$։

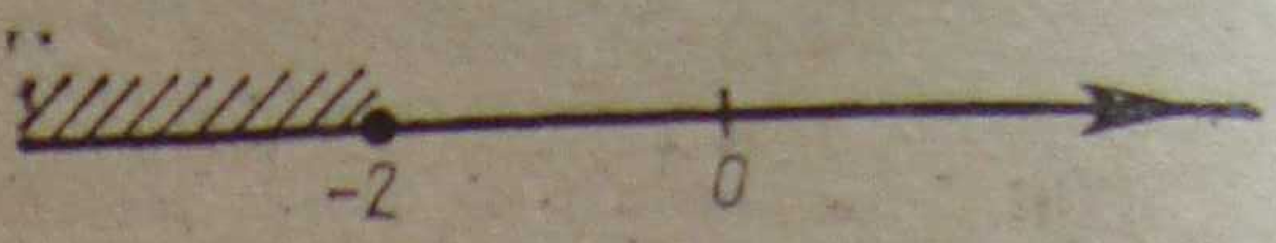
Անհավասարության երկու մասերը անդամ առ անդամ բազմապատկելով 12-ով, կստանանք.

$$24-20x<9x-6-4x+10,\ 24-20x<5x+4։$$

Փոփոխական պարունակող անդամները տեղափոխենք ձախ, իսկ ազատ անդամները՝ աջ, կստանանք. $-25x<-20$։ Վերջինիս երկու մա-



Նկ. 101



Նկ. 102

սերը բաժանելով −25 բացասական թվի վրա և փոխելով անհավասարության նշանը, կստանանք՝ $x>0{,}8$ (Նկ. 101)։

Պատասխան. $]0{,}8; +\infty[$։

2) $(x-2)^2-15 \geqslant (x+1)^2$, $x^2-4x-11 \geqslant x^2+2x+1$, $-6x \geqslant 12$, $x \leqslant -2$ (Նկ. 102)։

Պատասխան. $]-\infty; -2]$։

3) $(2x-3)^2-8x<(5-2x)^2$, $4x^2-20x+9<25-20x+4x^2$, $0 \cdot x<16$։

Սկզբնական անհավասարությանը բավարարում է x-ի ցանկացած արժեք։

Պատասխան. $]-\infty; +\infty[$։

4) $(x+2)^3-3x^3<2(1-x)^3+18x$, $x^3+6x^2+12x+8-3x^3<2-6x+6x^2-2x^3+18x$, $0 \cdot x<-6$։ Տրված անհավասարությունը լուծում չունի։

Պատասխան. $\varnothing$։

Վարժություններ

Լուծեցեք հետևյալ անհավասարությունները.

693. ա) $2x-9>17$, բ) $5x+12 \leqslant 2$։

694. ա) $4x+7<-5$, բ) $3x-8 \geqslant 4$։

695. ա) $(6-a)(a-2)>(a-8)(3-a)$, բ) $8(2y-5)<3(4+y)$։

696. ա) $3(4-13a)>17(8+5a)$, բ) $9(3y-7)<5(1+2y)$։

697. ա) $\frac{3y+4}{5}<\frac{7y-8}{6}+\frac{1+7y}{15}$, բ) $\frac{47-x}{4}-\frac{2x+3}{3}>\frac{1+21x}{8}$,

698. ա) $\frac{5x-1}{2}+\frac{3x-2}{7}>\frac{13x+9}{6}$,

բ) $\frac{3(2+a)}{2}-6<\frac{7a-2}{3}-\frac{12+4a}{5}$,

699. ա) $\frac{5y-3}{4}+\frac{3+y}{6}<\frac{11y-1}{8}$, բ) $\frac{5y+2}{2}-\frac{4y+1}{3}>\frac{4y+13}{7}$,

700. ա) $\frac{8+7x}{15}<\frac{17+3x}{10}-\frac{5x-2}{3}$,

բ) $\frac{5a-18}{10}-\frac{27-10a}{14}>\frac{3a-12}{5}-\frac{9-4a}{7}$,

§ 90. ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԵՐԿՈՒ ԳԾԱՅԻՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Մեկ փոփոխականով երկու գծային անհավասարությունների համակարգ կոչվում է

$$\begin{cases} a_1x+b_1>0, \\ a_2x+b_2>0, \end{cases} \text{ կամ } \begin{cases} a_1x+b_1>0, \\ a_2x+b_2<0, \end{cases}$$

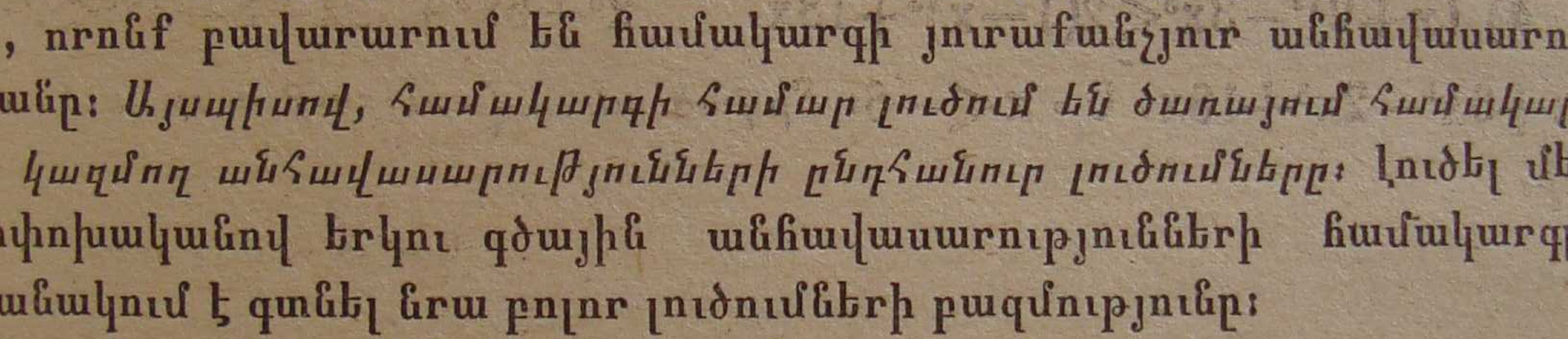
տեսքի համակարգը:

Համակարգի լուծումներ կոչվում են փոփոխականի այն արժեքները, որոնք բավարարում են համակարգի յուրաքանչյուր անհավասարությանը: *Այսպիսով, համակարգի համար լուծում են ծառայում համակարգը կազմող անհավասարությունների ընդհանուր լուծումները:* Լուծել մեկ փոփոխականով երկու գծային անհավասարությունների համակարգը, նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումների բազմությունը:

Օրինակներ: *Լուծել մեկ փոփոխականով երկու գծային անհավասարությունների հետևյալ համակարգերը.*

ա) $\begin{cases} 3x-2>x-12, \\ x-6\leqslant 3x-4, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 2x+3\leqslant 6-4x, \\ 2x-1>4x-4, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 6x-1\leqslant 4x-11, \\ x+3<3x+5, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 8x+9>2x+12, \\ 2x+11\geqslant 4x+8: \end{cases}$



Նկ. 103

Պարզեցնելով, կհանգենք այսպիսի համակարգերի.

ա) $\begin{cases} x > -5, \\ x \geqslant -1, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x \leqslant -5, \\ x > -1, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x \leqslant 0{,}5, \\ x < 1{,}5, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x > 0{,}5, \\ x \leqslant 1{,}5: \end{cases}$

Կոորդինատային ուղղի միջոցով (նկ. 103) գտնենք ըստ համակարգերի լուծումները.

Պատասխան. ա) $[-1; +\infty[$, բ) $\varnothing$, գ) $]-\infty; 0{,}5]$, դ) $]0{,}5; 1{,}5]$:

Այժմ դիտարկենք $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ կամ $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ տեսքի մեկ փոփոխականով ոչ գծային անհավասարությունների օրինակներ: Այս անհավասարությունների լուծումը հիմնված է այն բանի վրա, որ կոտորակը դրական արժեքներ ընդունում է փոփոխականի այն արժեքների դեպքում, որոնց դեպքում համարիչն ու հայտարարը ունենում են միևնույն նշանները, իսկ բացասական արժեք՝ այն դեպքում, երբ համարիչի և հայտարարի նշանները տարբեր են:

Օրինակ 1: Լուծել $\frac{5-2x}{x-1} > 0$ անհավասարությունը:

Կազմենք և լուծենք հետևյալ երկու համակարգերը.

ա) $\begin{cases} 5-2x > 0, \\ x-1 > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x < \frac{5}{2}, \\ x > 1, \end{cases}$ $1 < x < \frac{5}{2}$,

բ) $\begin{cases} 5-2x < 0, \\ x-1 < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{5}{2}, \\ x < 1, \end{cases}$ լուծում չունի:

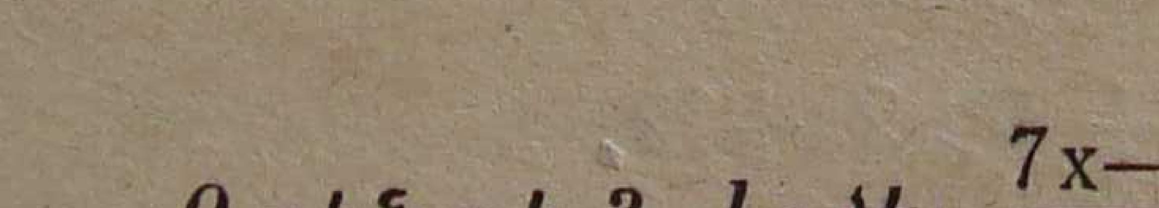
Տրված համակարգի լուծումը կազմված երկու համակարգերի լուծումների բազմությունների միավորումն է:

Պատասխան. $\left]1; \frac{5}{2}\right[$, (նկ. 104):

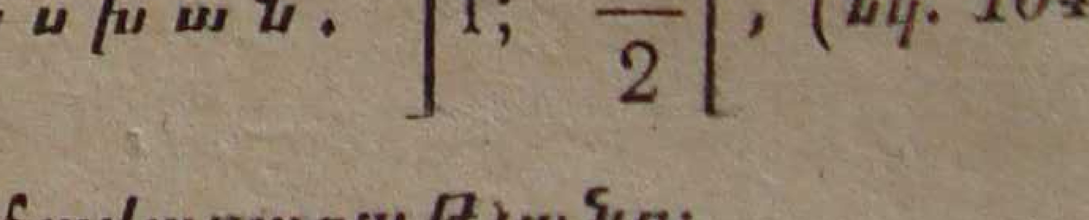
Օրինակ 2. Լուծել $\frac{7x-7}{2x-3} < 4$ անհավասարությունը:

4-ը տեղափոխենք անհավասարության ձախ մասը և ստացված տարբերությունը ձևափոխենք կոտորակի.

$$\frac{7x-7}{2x-3} - 4 < 0, \quad \frac{7x-7-8x+12}{2x-3} < 0, \quad \frac{5-x}{2x-3} < 0:$$



Նկ. 104



Նկ. 105

Կազմենք և լուծենք հետևյալ երկու համակարգերը.

ա) $\begin{cases} 5-x<0, \\ 2x-3>0, \end{cases}$ $\begin{cases} x>5, \\ x>1{,}5, \end{cases}$ $x>5,$

բ) $\begin{cases} 5-x>0, \\ 2x-3<0, \end{cases}$ $\begin{cases} x<5, \\ x<1{,}5, \end{cases}$ $x<1{,}5,$

Պատասխան, $]-\infty;\ 1{,}5[\cup[5;\ +\infty[$, (նկ. 105)։

Խնդիր։ Գտեք այն անկրճատելի կոտորակը, որն ունի հետևյալ տվյալները։ Համարիչը հայտարարից փոքր է 2-ով։ Եթե համարիչին ու հայտարարին ավելացնենք 1-ական, ապա կոտորակը մեծ կլինի $\frac{1}{2}$-ից, իսկ եթե համարիչից ու հայտարարից հանենք 1-ական, ապա այն փոքր կլինի $\frac{2}{3}$-ից։

Լուծում։ Որոնելի կոտորակը նշանակենք $\frac{x}{x+2}$։ Կազմենք համակարգ.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x+3}>\frac{1}{2}, \\ \frac{x-1}{x+1}<\frac{2}{3}; \end{cases}$$

Լուծելով համակարգը, գտնում ենք՝ $1<x<5$։ Քանի որ x-ը բնական թիվ է, ուստի հնարավոր է նրա միայն երեք արժեք՝ 2, 3, 4 և հետևաբար ստացվում է երեք կոտորակ՝ $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{6}$։

Պատասխան. $\frac{3}{5}$։

Վարժություններ

Լուծել գծային անհավասարությունների համակարգը.

701. ա) $\begin{cases} 4a+5<2a+3, \\ 2a+3>9+4a, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 10x+1>9x+7, \\ 7x-4<2x+6, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 5y+1>6y-18, \\ 3y-7<5y-13, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 5y-3>2y+7, \\ 4y+5<9y-5, \end{cases}$

702. ա) $\begin{cases} 1-3a\leqslant a-3, \\ 8a-9\leqslant 4a+7, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 8a-7>5a+4, \\ 15-3a<9a-12, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 1{,}5-3y<\frac{2y}{3}-4, \\ 6y-3>1+2y, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 9x-67>2x+101, \\ 5x-7<5+3x: \end{cases}$

703. ա) $\begin{cases} 8-2y<12y+2, \\ 8-3y<y+6, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 3(3+2a)-2(18-a)<7a, \\ 6(2+a)>9(a+3)-5(a+1), \end{cases}$

բ) $\begin{cases} (x+2)(1+x)>(4-x)(3-x), \\ 2x^2+3x>(3+x)(2x-1), \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 7-3a\geqslant 2a+10, \\ 4a+3\geqslant 9+10a: \end{cases}$

704. ա) $\begin{cases} \frac{9x-2}{4}<1+2x, \\ 7+2x>3x-1, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} \frac{3x+2}{4}\geqslant 5x-8, \\ \frac{2-6x}{5}\geqslant 3x+13, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{7a+2}{15}>a-2, \\ 2a+\frac{2a}{3}>20+6a, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \frac{2a-3}{3}>2\frac{2}{3}-\frac{a}{6}, \\ \frac{5a-1}{4}<2a+1{,}5: \end{cases}$

Գտեք հետևյալ գծային անհավասարությունների համակարգի ամբողջ լուծումների բազմությունը.

705. ա) $\begin{cases} 4\frac{2}{3}y-1<3y+3\frac{1}{3}, \\ \frac{8-y}{2}-5<\frac{3y+12}{5}-2, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} \frac{15+2y}{9}-\frac{1-y}{5}\geq\frac{y}{3}, \\ \frac{19-2y}{2}-\frac{11-2y}{4}<2y, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{14a+3}{12}>a+0{,}25, \\ \frac{2+a}{6}+1>a-\frac{1-3a}{4}, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \frac{4x+3}{3}-\frac{3x-1}{8}\leqslant 4, \\ \frac{7x+3}{5}+\frac{3x+1}{2}>4: \end{cases}$

706. ա) $\begin{cases} 6-4x<\frac{x+16}{3}-2x, \\ \frac{x}{3}+\frac{x}{2}<1\frac{2}{3}, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} \frac{3x-5}{4}+\frac{1+2x}{7}<7, \\ \frac{1+3x}{2}-\frac{2x-3}{7}>7, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{5y-2}{3}-\frac{2y-3}{5}<5, \\ \frac{3y-2}{4}\geqslant 6-\frac{8y-1}{3}, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \frac{2a-1}{3}-a\leqslant\frac{11-a}{6}-2, \\ a+\frac{3+2a}{3}>1, \end{cases}$

Լուծեցեք անհավասարությունները.

707. ա) $\frac{3x-5}{2x+7}>0$, գ) $\frac{2b+5}{2b-7}\leqslant 0$.

բ) $\frac{2y+9}{4y-1}<0$, դ) $\frac{5a+21}{a+4}\geqslant 0$,

708. ա) $\frac{15a+23}{5a+2}\leqslant 4$, գ) $\frac{2-16y}{2y+1}>-6$,

բ) $\frac{4x+3}{3x-7}>2$, դ) $\frac{7-10b}{4b-5}<-3$,

§ 91. ՄՈԴՈՒԼԻ ՆՇԱՆԻ ՏԱԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

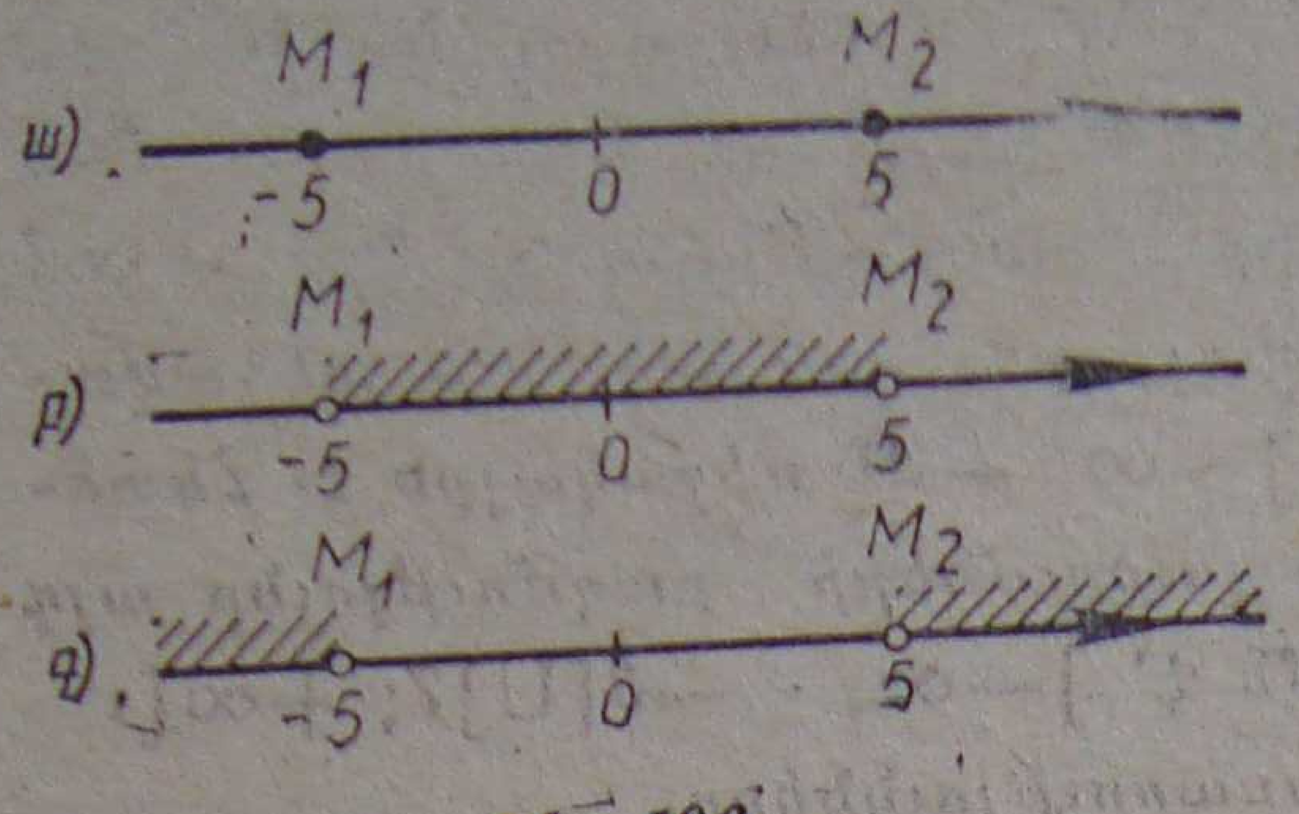
x թվի մոդուլ կոչվում է x կոորդինատով կետի հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից (տես § 20)։ Եթե M կետի կոորդինատն է x, ապա $|x|=|OM|$։ Գոյություն ունեն երկու կետեր, որոնք կոորդինատների սկզբնակետից հեռացած են, օրինակ, մասշտաբի 5 միավորի չափով, դրանք են $M_1(-5)$ և $M_2(5)$ կետերը (նկ. 106, ա)։ Հետևաբար $|x|=5$ հավասարումն ունի երկու արմատ։ Նրա արմատների բազմությունն է՝ $\{-5; 5\}$։

Դիտարկենք $|x|<5$ անհավասարությունը։ Նրան բավարարում են այն կետերի կոորդինատները, որոնց հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից փոքր է 5-ից։ Դրանք M_1M_2 հատվածի բոլոր կետերի կոորդինատներն են, բացառյալ հատվածի ծայրակետերը (նկ. 106, բ)։ Այդ կետերի կոորդինատները բավարարում են $-5<x<5$ կրկնակի անհավասարությանը։ Եվ հակադարձը, ամեն մի կետ, որի կոորդինատները բավարարում է այդ կրկնակի անհավասարությանը, պատկանում է M_1M_2 հատվածին, հետևաբար կոորդինատների սկզբնակետից նրա ունեցած հեռավորությունը փոքր է 5-ից։ Այսպիսով,

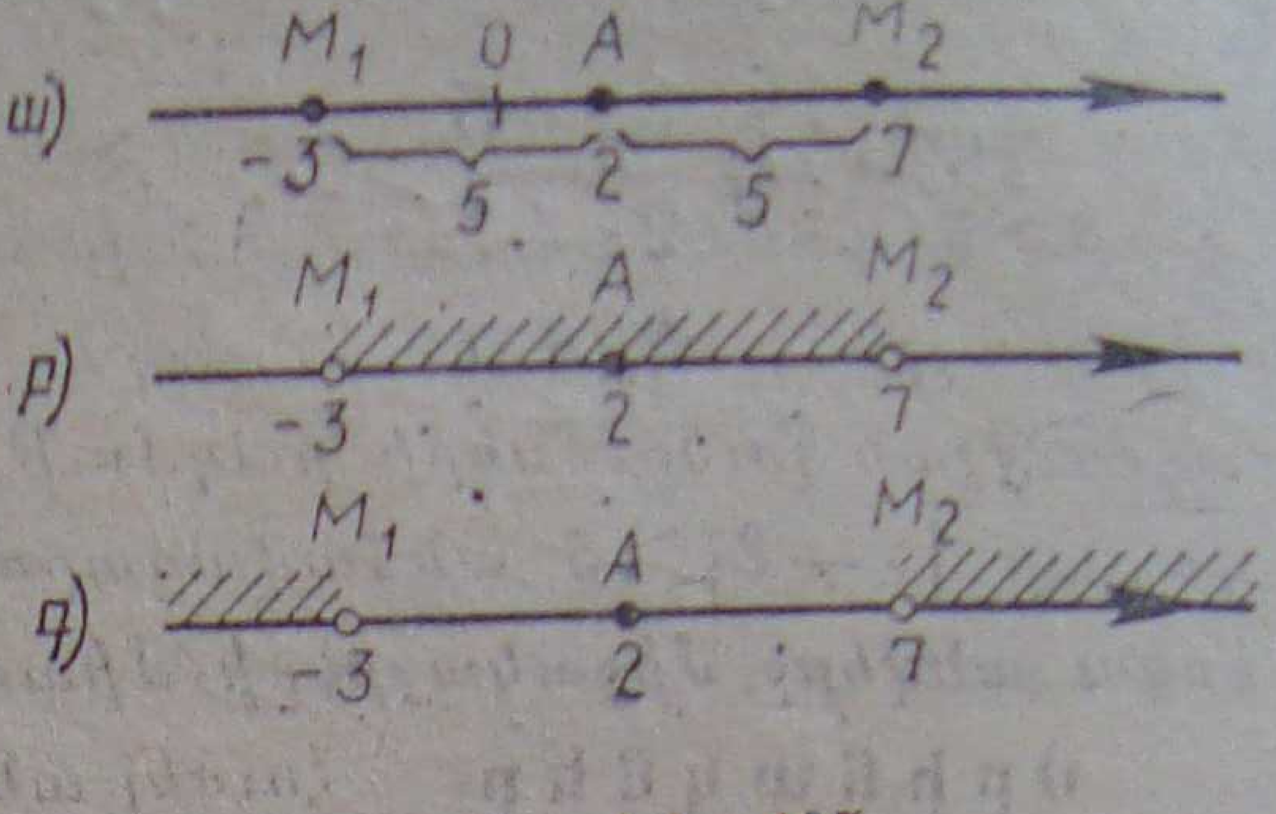
$$|x|<5 \text{ և } -5<x<5$$

անհավասարությունների լուծումների բազմությունները նույնն են՝ $]-5; 5[$,

Դիտարկենք $|x|>5$ անհավասարությունը։ Նրա լուծումները այն կետերի կոորդինատներն են, որոնց հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից մեծ է 5-ից։ Դրանք բոլոր այն կետերն են, որոնք գտնվում են $M_1(-5)$ կետից ձախ, ինչպես նաև բոլոր այն կետերը, որոնք գտնվում են $M_2(5)$ կետից աջ (նկ. 106, գ)։ $|x|>5$ անհավասարության լուծում-



Նկ. 106



Նկ. 107

ների բազմությունը հետևյալ երկու անվերջ միջակայքերի միավորումն է՝ $]-\infty; -5[\cup]5; +\infty[$։

Մենք դիտարկեցինք $|x|=a$ տեսքի հավասարում և $|x|<a$, $|x|>a$ տեսքի անհավասարություններ։ Այժմ դիտարկենք $|x-a|=b$ տեսքի հավասարում և $|x-a|<b$, $|x-a|>b$ տեսքի անհավասարություններ։

$x-a$ թվի $|x-a|$ մոդուլը հավասար է x կոորդինատով կետի հեռավորությանը a կոորդինատով կետից (տես § 25)։ Եթե A կետն ունի, օրինակ, 2 կոորդինատ, իսկ M կետը՝ x կոորդինատ, ապա $|x-2|=|AM|$։ Գոյություն ունեն երկու կետեր, որոնք $A(2)$ կետից հեռացված են, օրինակ, մասշտաբի 5 միավորի չափով, դրանք են՝ $M_1(-3)$ և $M_2(7)$ (նկ. 107, ա)։ Հետևաբար $|x-2|=5$ հավասարումն ունի երկու արմատ՝ -3 և 7։

Կարելի է մտածել և այսպես։ Եթե $x>2$, ապա $|x-2|=x-2$, իսկ $x-2=5$ հավասարումն ունի մեկ արմատ՝ 7։ Իսկ եթե $x<2$, ապա $|x-2|=2-x$։ Բայց $2-x=5$ հավասարման արմատն է -3-ը։ Հետևաբար $|x-2|=5$ հավասարումն ունի երկու արմատ՝ -3 և 7։

$|x-2|<5$ անհավասարությանը բավարարում են M_1M_2 հատվածի բոլոր կետերի կոորդինատները, բացառությամբ նրա ծայրերի (նկ. 107, բ)։ Այդ կետերի կոորդինատները բավարարում են $-5<x-2<5$ կրկնակի անհավասարությանը։ Եվ հակադարձը A(2) կետից 5 միավորից քիչ հեռավորություն ունեցող ամեն մի կետի կոորդինատ բավարարում է այդ կրկնակի անհավասարությանը։ Այսպիսով,

$$|x-2|<5 \quad \text{և} \quad -5<x-2<5$$

անհավասարությունների լուծումների բազմությունները նույնն են։ Կրկնակի անհավասարության յուրաքանչյուր մասին ավելացնելով 2, կստանանք՝ $-3<x<7$։ Հետևաբար, $|x-2|<5$ անհավասարության լուծումների բազմությունը $]-3; 7[$ բաց միջակայքն է։

$|x-2|>5$ անհավասարության լուծումները բոլոր այն կետերի

կոորդինատներն են, որոնք գտնվում են $M_1(-3)$ կետից ձախ, ինչպես նաև բոլոր այն կետերի, որոնք գտնվում են $M_2(7)$ կետից աջ (նկ. 107, գ)։

Կարելի է մտածել և այսպես։ Եթե $x>2$, ապա $|x-2|=x-2$։ Իսկ $x-2>5$ անհավասարության լուծումների բազմությունը $]7;\ +\infty[$ միջակայքն է։ Եթե $x<2$, ապա $|x-2|=2-x$։ Իսկ $2-x>5$ անհավասարության լուծումների բազմությունը $]-\infty;\ -3[$ միջակայքն է։ Հետևաբար $|x-2|>5$ անհավասարության լուծումների բազմությունը այդ երկու անվերջ միջակայքերի միավորումն է՝ $]-\infty;\ -3[\cup]7;\ +\infty[$։

Օրինակներ։ *Լուծել անհավասարությունները.*

1) $|2x+5|\leqslant 8$, $-8\leqslant 2x+5\leqslant 8$, $-13\leqslant 2x\leqslant 3$, $-6{,}5\leqslant x\leqslant 1{,}5$։

Պատասխան. $[-6{,}5;\ 1{,}5]$։

2) $|5x-2|>7$։ *ա)* Եթե $5x>2$, ապա սկզբնական անհավասարությունն ունի $5x-2>7$, կամ $x>1{,}8$ տեսքը։

բ) Եթե $5x<2$, ապա սկզբնական անհավասարությունն ունի $2-5x>7$ կամ $x<-1$ տեսքը։

Պատասխան. $]-\infty;\ -1[\cup]1{,}8;\ +\infty[$։

Վարժություններ

Լուծեցեք մոդուլի նշանի տակ փոփոխական պարունակող հետևյալ անհավասարությունները.

709. ա) $|x|>5$, բ) $|x|<8$, գ) $|x|\leqslant 2$, դ) $|x|\geqslant 4$։

710. ա) $|y|\leqslant 6$, բ) $|y|>6$, գ) $|y|\geqslant 6$, դ) $|y|<6$։

711. ա) $|a+3|\leqslant 7$, բ) $|x+9|>8$, գ) $|2+y|\geqslant 8$, դ) $|13+a|<1$։

712. ա) $|x+7|\geqslant 1$, բ) $|x+5|<11$, գ) $|13+y|\leqslant 1$, դ) $|7+a|\leqslant 4$։

713. ա) $|17-x|<8$, բ) $|14-a|\geqslant 2$։

714. ա) $|13-x|>5$, բ) $|6-a|\leqslant 12$,

715. ա) $|a-3|\leqslant 0$, բ) $|x-15|>0$։

716. ա) $|y-14|\geqslant 0$, բ) $|a-2|<0$։

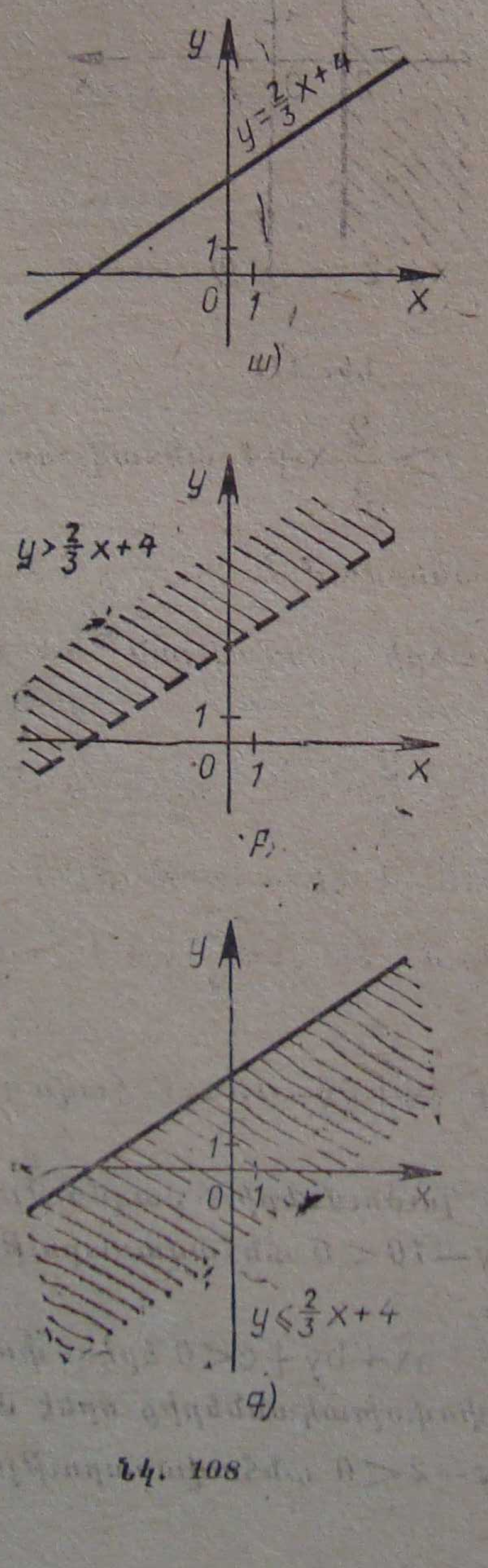
§ 92. ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Երկու փոփոխականով գծային անհավասարություն կոչվում է $ax+by+c>0$ կամ $ax+by+c<0$ տեսքի անհավասարությունը։ Ենթադրենք, թե x և y փոփոխականների a և b գործակիցներից գոնե

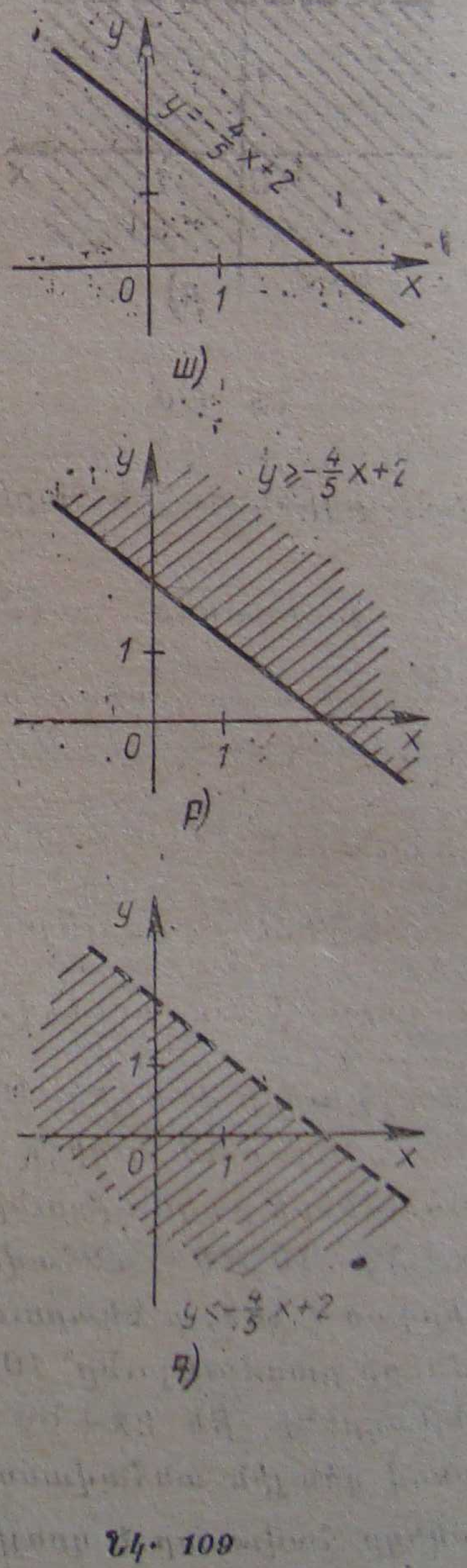
մեկը զրոյից տարբեր է,. և դիտարկենք այդ տիպի անհավասարությունների գրաֆիկական լուծումը: Երկու փոփոխականով գծային հավասարման (օրինակ, $2x-3y+12=0$, կամ $y=\frac{2}{3}x+4$) համար լուծում է ցանկացած (x, y) կարգավորյալ թվազույգ, որը հավասարումը վերածում է ճիշտ թվային հավասարության (տես § 78):

Այդ հավասարման գրաֆիկը ուղիղ գիծ է (Նկ. 108, ա):

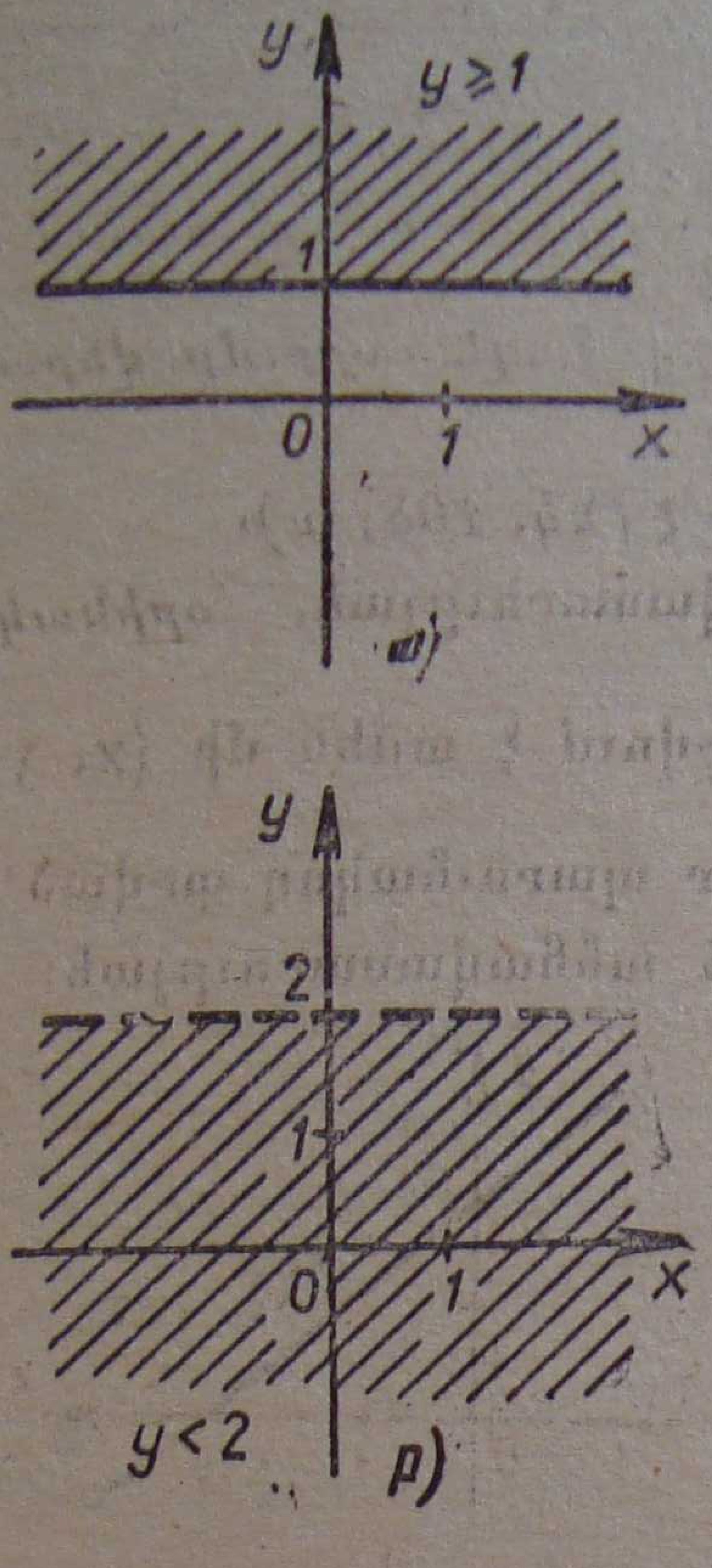
Երկու փոփոխականով գծային անհավասարության, օրինակ, $2x-$ $-3y+12<0$ կամ $y>\frac{2}{3}x+4$, լուծում կոչվում է ամեն մի (x, y) կարգավորյալ թվազույգը, որը փոփոխականներ պարունակող տրված անհավասարությունը վերածում է ճիշտ թվային անհավասարության:



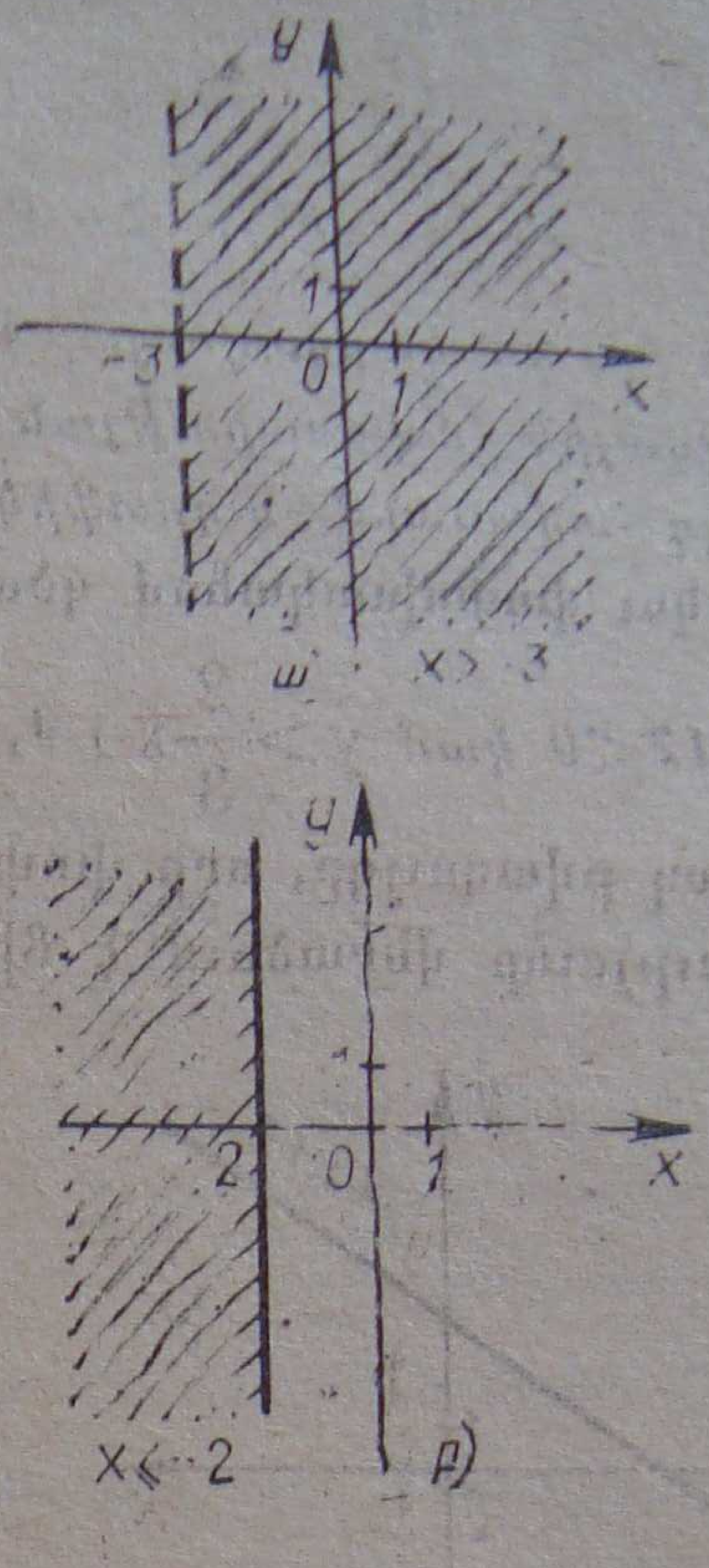
Նկ. 108



Նկ. 109



Նկ. 110



Նկ. 111

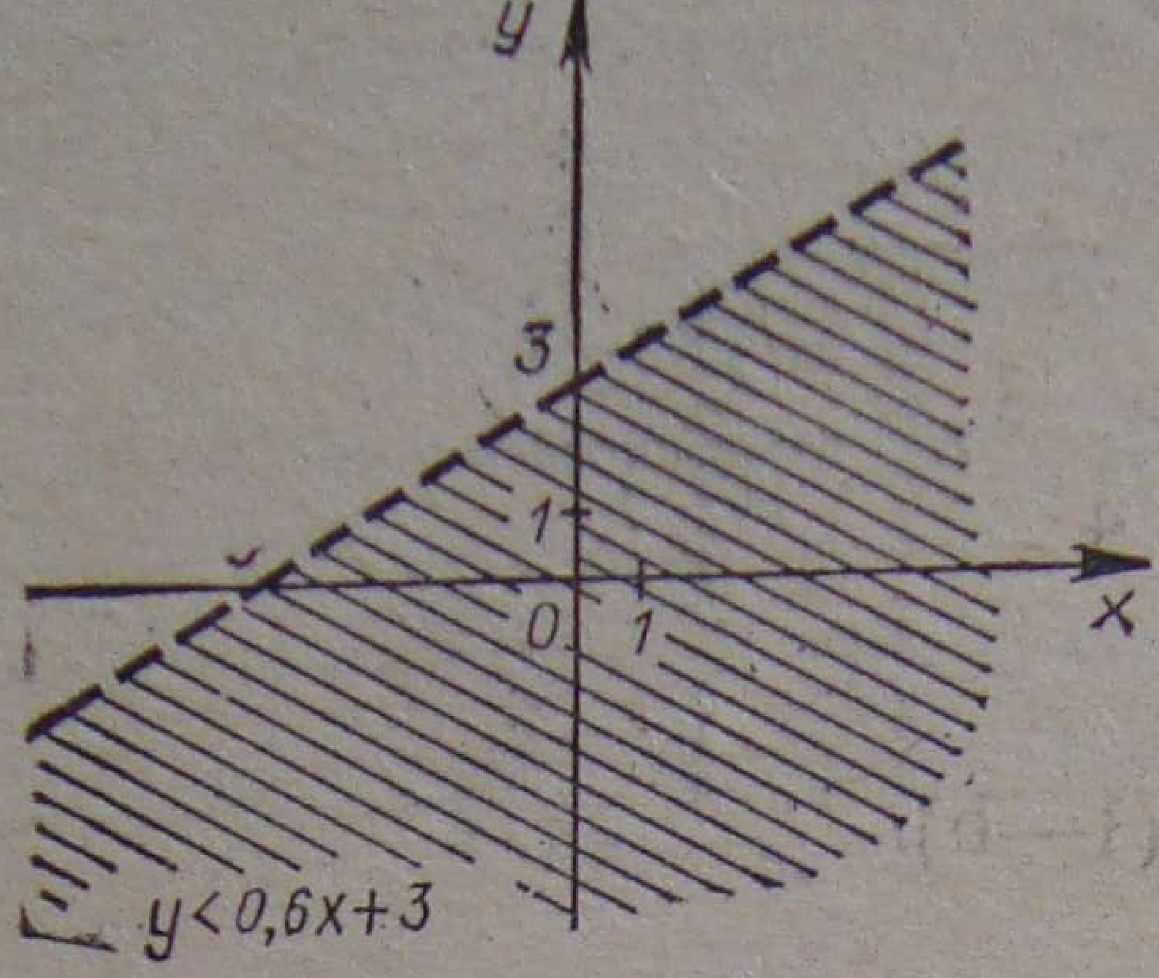
Oxy կոորդինատային հարթության վրա $y > \frac{2}{3}x + 4$ անհավասարության բոլոր լուծումների բազմությունը պատկերվում է $y = \frac{2}{3}x + 4$ ուղղից վեր գտնվող բաց կիսահարթության կետերի բազմության տեսքով (նկ. 108, բ)։

Հանգունորեն, $2x - 3y + 12 \geqslant 0$, կամ $y \leqslant \frac{2}{3}x + 4$ անհավասարության լուծումների բազմությունը պատկերվում է կիսահարթության այն կետերի բազմության տեսքով, որոնք գտնվում են $y = \frac{2}{3}x + 4$ ուղղից ներքև և այդ ուղղի վրա (նկ. 108, գ)։

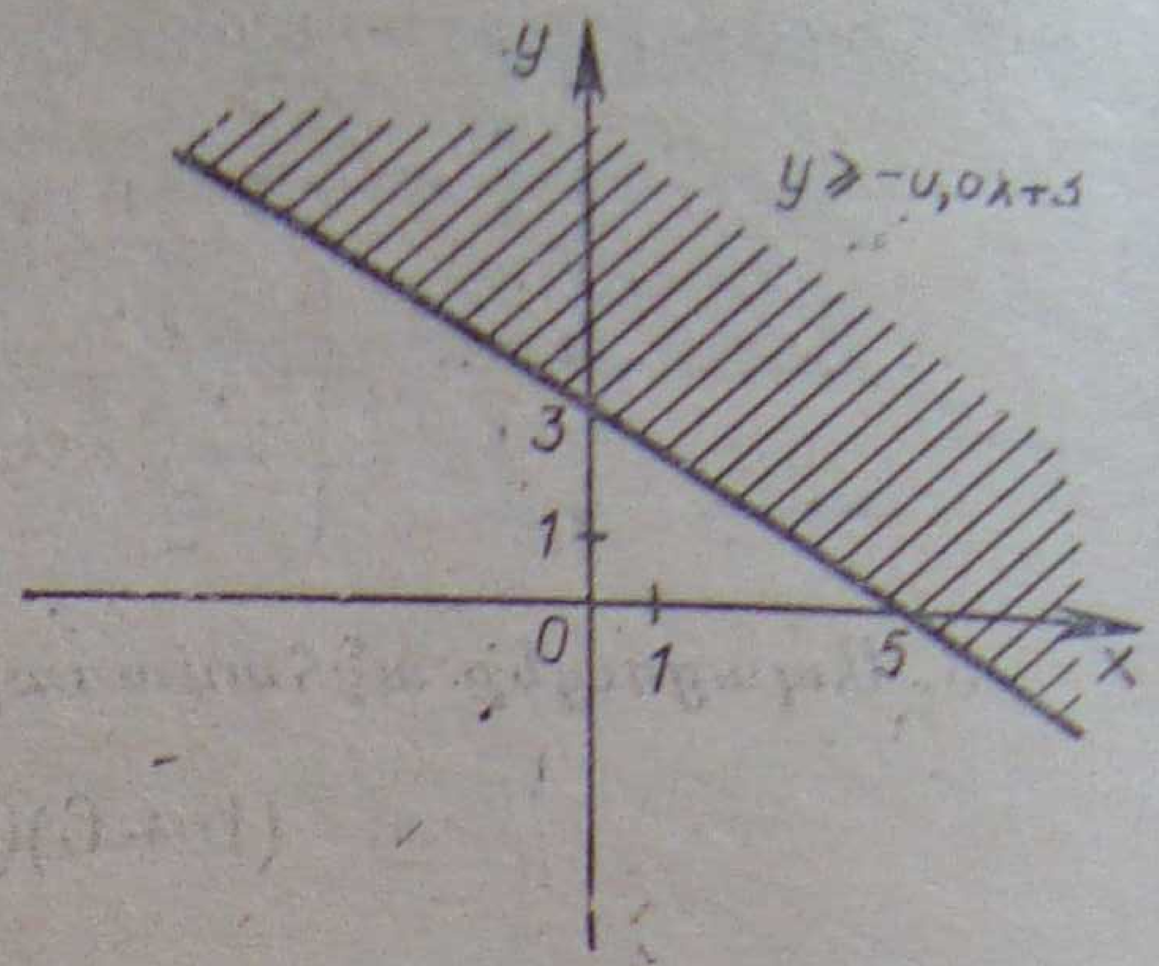
109, ա նկարում ուղիղը պատկերում է $4x + 5y - 10 = 0$ հավասարման լուծումների բազմությունը։

$4x + 5y - 10 \geqslant 0$ անհավասարության լուծումների բազմությունը պատկերված է 109, բ նկարում, իսկ $4x + 5y - 10 < 0$ անհավասարության լուծումների բազմությունը՝ 109, գ նկարում։

Ենթադրենք, թե $ax + by + c > 0$ կամ $ax + by + c < 0$ երկու փոփոխականով գծային անհավասարությունում փոփոխականներից որևէ մեկի գործակիցը հավասար է զրոյի։ $y - 1 \geqslant 0$, $y - 2 < 0$ անհավասարություն-



Նկ. 112



Նկ. 113

ների լուծումները պատկերված են 110, ա, բ նկարներում, իսկ $x+3>0$, $x+2\leqslant 0$ անհավասարությունները՝ 111, ա, բ նկարներում։

Ox կոորդինատային ուղղի վրա մեկ փոփոխականով $x+3>0$ անհավասարության լուծումների բազմությունը պատկերվում է բաց ճառագայթի տեսքով։ Բայց եթե այդ անհավասարությունը դիտենք որպես $x+0\times y+3>0$ երկու փոփոխականով անհավասարության մասնավոր դեպք, ապա նրա լուծումների բազմությունը Oxy կոորդինատային հարթության վրա արդեն կպատկերվի բաց կիսահարթության տեսքով։

Դիտարկենք ևս երկու $3x-5y+15>0$ և $3x+5y-15\geqslant 0$ անհավասարությունների լուծումները։

Սրանց լուծումների բազմությունները պատկերված են 112-րդ և 113-րդ նկարներում։

Վարժություններ

Անհավասարությունները լուծեք գրաֆիկական եղանակով.

717. ա) $2x-y+3<0$, գ) $3x+y+2\leqslant 0$,

բ) $5x+y-3>0$, դ) $2x-3y-6\geqslant 0$։

718. ա) $5x-2y+7>0$, գ) $9x-2y+3\leqslant 0$,

բ) $26x+5y+22\geqslant 0$, դ) $12x+5y+10<0$։

Ինքնուրույն աշխատանք № 16

1. Լուծեցեք $\dfrac{27y-26}{5y-4}>5$ անհավասարությունը։
2. Գտեք մեկ փոփոխականով երկու գծային անհավասարություն-

ների հետևյալ համակարգի ամբողջ լուծումների բազմությունը.

$$\begin{cases} \frac{a-4}{3}+\frac{a-3}{4}>\frac{5a-19}{8}, \\ \frac{5a-1}{2}>\frac{9+7a}{3}-\frac{5a-3}{4}, \end{cases}$$

3. Ապացուցեք անհավասարությունը՝

$$(b+6)(7-b)>b(1-b)։$$

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ապացուցեք, որ ճիշտ անհավասարություններն օժտված են փոխանցականության հատկությամբ։

2. Ապացուցեք ճիշտ անհավասարության երկու մասերը դրական կամ բացասական թվով բազմապատկելու վերաբերյալ թեորեմը։

3. Ապացուցեք երկու ճիշտ անհավասարությունները անդամ առ անդամ գումարելու վերաբերյալ թեորեմը։

4. Ապացուցեք դրական թվերով երկու ճիշտ անհավասարությունները անդամ առ անդամ բազմապատկելու վերաբերյալ թեորեմը։

5. Ինչպե՞ս են հաշվում երկու մոտավոր արժեքների գումարի և տարբերության բացարձակ սխալի եզրը։

6. Ինչպե՞ս են հաշվում երկու մոտավոր արժեքների արտադրյալի և քանորդի բացարձակ սխալի եզրը։

7. Ինչպե՞ս են հաշվում որևէ արդյունքի հարաբերական սխալի եզրը, եթե հայտնի է նրա բացարձակ սխալի եզրը։

8. Բացատրեցեք անհավասարությունների ապացուցման հիմնական հնարները։

9. Կոորդինատային ուղղի վրա ի՞նչ պատկերով են արտահայտվում $ax+b>0$ կամ $ax+b\geqslant 0$ անհավասարությունների լուծումների բազմությունները։

10. Կոորդինատային հարթության վրա ի՞նչ պատկերով են արտահայտվում $ax+by+c>0$ կամ $ax+by+c\geqslant 0$ $(b\neq 0)$ անհավասարությունների լուծումների բազմությունները։

Գլուխ XII

ԱՐՄԱՏՆԵՐ

§ 93. ԹՎԻ ԱՐՄԱՏԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Լուծենք $x^2=9$ հավասարումը։ Լուծել այս հավասարումը, նշանակում է գտնել բոլոր այն թվերը, որոնց քառակուսին հավասար է 9-ի։ Քանի որ $3^2=9$ և $(-3)^2=9$, ուստի տրված հավասարման արմատները կլինեն 3 և -3 թվերը։ Այդ թվերը հակադիր են։

$x^2=-9$ հավասարումը ոչ մի արմատ չունի, քանի որ գոյություն չունեն այնպիսի թվեր, որոնց քառակուսին լինի բացասական թիվ։

$x^3=8$ հավասարման արմատը հավասար է 2-ի, քանի որ $2^3=8$։ Այս հավասարումը այլ արմատներ չունի։ -2 թիվը այս հավասարման արմատը չէ, քանի որ $(-2)^3\neq8$։ Այն $x^3=-8$ հավասարման արմատն է, որովհետև $(-2)^3=-8$։

Բերենք այլ օրինակներ։

$x^4=81$ հավասարումն ունի երկու արմատ՝ 3 և -3, $x^4=-81$ հավասարումն արմատ չունի։ $x^5=32$ հավասարումն ունի մեկ արմատ՝ 2, $x^5=-32$ հավասարումը ևս ունի մեկ արմատ՝ -2։

Այս գլխում մենք կիմանանք, որ այնպիսի հավասարումները, ինչպիսիք են, օրինակ, $x^2=7$ կամ $x^2=20$, նույնպես ունեն երկու արմատներ, որոնք հակադիր թվեր են, իսկ, օրինակ, $x^3=5$ և $x^3=-12$ հավասարումներն ունեն մեկական արմատ։

Ընդհանրապես, $x^n=a$, $n\in N$ հավասարումը.

1) ունի երկու արմատ, եթե n-ը զույգ է և $a>0$,

2) արմատ չունի, եթե n-ը զույգ է և $a<0$,

3) ունի մեկ արմատ, եթե n-ը կենտ է։

Եթե $a=0$, ապա $x^n=0$ հավասարումը ցանկացած բնական n-ի դեպքում ունի մեկ արմատ, որը հավասար է զրոյի։

$x^n=a$ հավասարման արմատը կոչվում է նաև a-ի n-րդ աստիճանի արմատ։

Սահմանում։ a թվի n-րդ աստիճանի արմատ կոչվում է այն x թիվը, որի n-րդ աստիճանը հավասար է a-ի։

Գլուխ XII

ԱՐՄԱՏՆԵՐ

§ 93. ԹՎԻ ԱՐՄԱՏԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Լուծենք $x^2=9$ հավասարումը։ Լուծել այս հավասարումը, նշանակում է գտնել բոլոր այն թվերը, որոնց քառակուսին հավասար է 9-ի։ Քանի որ $3^2=9$ և $(-3)^2=9$, ուստի տրված հավասարման արմատները կլինեն 3 և -3 թվերը։ Այդ թվերը հակադիր են։

$x^2=-9$ հավասարումը ոչ մի արմատ չունի, քանի որ գոյություն չունեն այնպիսի թվեր, որոնց քառակուսին լինի բացասական թիվ։

$x^3=8$ հավասարման արմատը հավասար է 2-ի, քանի որ $2^3=8$։ Այս հավասարումը այլ արմատներ չունի։ -2 թիվը այս հավասարման արմատը չէ, քանի որ $(-2)^3\neq 8$։ Այն $x^3=-8$ հավասարման արմատն է, որովհետև $(-2)^3=-8$։

Բերենք այլ օրինակներ։

$x^4=81$ հավասարումն ունի երկու արմատ՝ 3 և -3, $x^4=-81$ հավասարումն արմատ չունի։ $x^5=32$ հավասարումն ունի մեկ արմատ՝ 2, $x^5=-32$ հավասարումը ևս ունի մեկ արմատ՝ -2։

Այս գլխում մենք կիմանանք, որ այնպիսի հավասարումները, ինչպիսիք են, օրինակ, $x^2=7$ կամ $x^2=20$, նույնպես ունեն երկու արմատներ, որոնք հակադիր թվեր են, իսկ, օրինակ, $x^3=5$ և $x^3=-12$ հավասարումներն ունեն մեկական արմատ։

Ընդհանրապես, $x^n=a$, $n\in N$ հավասարումը.

1) ունի երկու արմատ, եթե n-ը զույգ է և $a>0$,

2) արմատ չունի, եթե n-ը զույգ է և $a<0$,

3) ունի մեկ արմատ, եթե n-ը կենտ է։

Եթե $a=0$, ապա $x^n=0$ հավասարումը ցանկացած բնական n-ի դեպքում ունի մեկ արմատ, որը հավասար է զրոյի։

$x^n=a$ հավասարման արմատը կոչվում է նաև a-ի n-րդ աստիճանի արմատ։

Սահմանում։ a թվի n-րդ աստիճանի արմատ կոչվում է այն x թիվը, որի n-րդ աստիճանը հավասար է a-ի։

Դրական թվի զույգ աստիճանի արմատն ունի երկու արժեք (դրանք հակադիր թվեր են)։ Բացասական թվի զույգ աստիճանի արմատն իմաստ չունի (արժեքներ չունի)։ Ցանկացած թվի կենտ աստիճանի արմատն ունի մեկ արժեք, որի նշանը համընկնում է տրված թվի նշանին։ Զրոյի n-րդ աստիճանի արմատը հավասար է զրոյի՝ բոլոր n-երի ($n \in N$) դեպքում։

a թվի զույգ աստիճանի դրական արմատը և կենտ աստիճանի արմատը նշանակվում է այսպես՝ $\sqrt[n]{a}$ (կարդացվում է՝ a-ի n-րդ աստիճանի արմատ)։ n բնական թիվը կոչվում է արմատի ցուցիչ, իսկ a-ն՝ ենթարմատային թիվ (արտահայտություն)։

Եթե $n=2$, ապա արմատի ցուցիչը չի գրվում։ Երկրորդ աստիճանի արմատը կոչվում է նաև քառակուսի արմատ, իսկ երրորդ աստիճանի արմատը՝ խորանարդ արմատ։

Օրինակներ: $\sqrt[4]{81}=3$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{0}=0$, $\sqrt[3]{-8}=-2$, $\sqrt{1}=1$։

$\sqrt{-9}$, $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[4]{-81}$ տեսքի արտահայտությունները իմաստ չունեն։

a դրական թվի զույգ աստիճանի բացասական արմատը նշանակվում է այսպես՝ $-\sqrt[n]{a}$ (n-ը զույգ թիվ է)։ Օրինակ, $x^2=9$ հավասարման բացասական արմատը նշանակվում է $x=-\sqrt{9}$ կամ $x=-3$ տեսքով։

Դրական թվի զույգ աստիճանի երկու արմատները, օրինակ, $x^2=9$ հավասարման արմատները, հաճախ գրում են այսպես՝ $x=\pm\sqrt{9}$ կամ $x=\pm 3$։

Կենտ աստիճանի բացասական արմատները, օրինակ $x^5+32=0$ հավասարման -2 արմատը, կարելի է գրել $x=\sqrt[5]{-32}$ կամ $x=-\sqrt[5]{32}$ տեսքով։

Սահմանում: a թվի n-րդ աստիճանի թվաբանական արմատ կոչվում է այն ոչ բացասական թիվը, որի n-րդ աստիճանը հավասար է a-ի:

Թվաբանական արմատների օրինակներ՝ $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{0}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[6]{64}$։

$\sqrt{9}=-3$ կամ $\sqrt{9}=\pm 3$ հավասարությունները ճիշտ չեն, ճիշտ է $\sqrt{9}=3$ հավասարությունը։ $x^2=25$ հավասարման -5 բացասական արմատը 25-ի թվաբանական քառակուսի արմատը չէ։ $\sqrt[3]{-8}$ թիվը նույնպես թվաբանական արմատ չէ, որովհետև այն բացասական թիվ է։

Թվաբանական արմատի հասկացությունը կարևոր է այն պատճառով, որ, ինչպես պարզվում է, նույնական ձևափոխությունների շատերը կարելի է կիրառել միայն թվերի թվաբանական արմատների նկատմամբ։

Լուծեցեք հետևյալ հավասարումները.

719. ա) $x^2=49$, բ) $x^2=\frac{25}{4}$, գ) $x^2=-25$, դ) $x^2=0$։

720. ա) $x^2=36$, բ) $x^2=-4$, գ) $x^2=\frac{9}{16}$, դ) $x^2=-\frac{81}{64}$։

721. ա) $x^3=27$, բ) $x^3=-125$, գ) $x^3=0$, դ) $x^3=8$։

722. ա) $x^3=64$, բ) $x^3=-\frac{512}{343}$, գ) $x^3=\frac{729}{216}$։

Հաշվեցեք հետևյալ արտահայտությունների արժեքները.

723. ա) $\sqrt{3x+10}$, երբ $x=-3, -2, 2$,

բ) $\sqrt{10-2x}$, երբ $x=-3, 3, 5$,

գ) $\sqrt{4x-7}$, երբ $x=1, 2, 4$,

դ) $\sqrt{-3x-5}$, երբ $x=-3, -2, 0$,

724. ա) $\sqrt[3]{5x+17}$, երբ $x=2$, գ) $\sqrt[3]{6x-15}$, երբ $x=-2$,

բ) $\sqrt[5]{5x+17}$, երբ $x=3$, դ) $\sqrt[5]{2-6x}$, երբ $x=-5$։

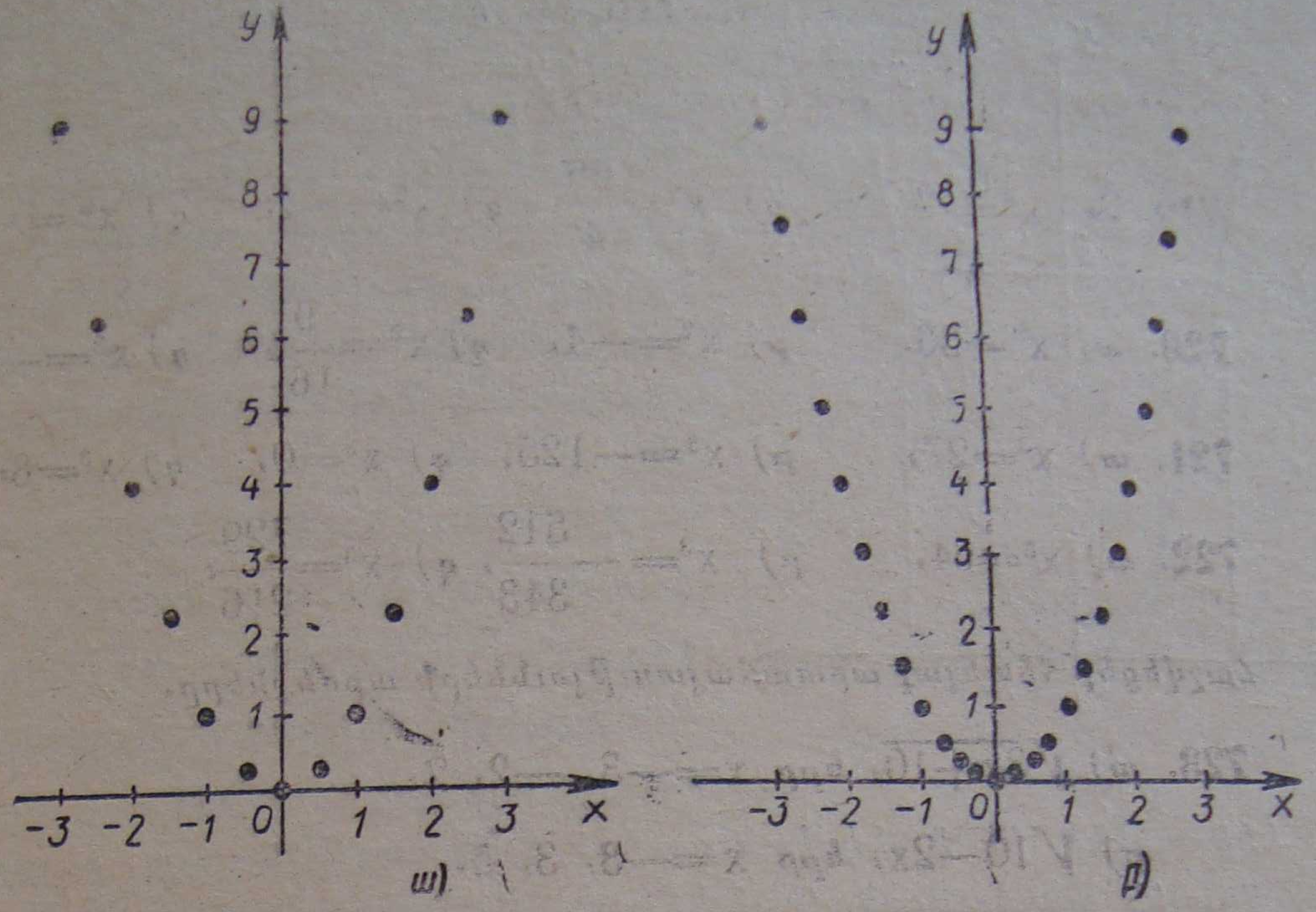
§ 94. $y=x^2$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ԳՐԱՖԻԿԸ

Դիտարկենք $y=x^2$ բանաձևը, որտեղ x-ը և y-ը փոփոխականներ են։ x փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է y փոփոխականի միմիայն մեկ արժեք, որը հավասար է x փոփոխականի արժեքի քառակուսուն։ Հետևաբար $y=x^2$ բանաձևով տրվում է ֆունկցիա։ Նրա որոշման տիրույթը բոլոր թվերի բազմությունն է։

Կառուցենք $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Կազմենք ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը արգումենտի այն արժեքների դեպքում, որոնք միմյանցից տարբերվում են 0,5-ով, այսինքն՝ 0,5-ի հավասար քայլով։

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Կոորդինատային հարթության վրա նշենք այն կետերը, որոնց կոորդինատները ներկայացված են աղյուսակում (նկ. 114, ա)։



Նկ. 114

Ցանկանալով ճշտել գրաֆիկի տեսքը, կազմենք լրացուցիչ աղյուսակ.

x	−2,75	−2,25	−1,75	−1,25	−0,75	−0,25	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75
y	7,6	5,1	3,1	1,6	0,6	0,1	0,1	0,6	1,6	3,1	5,1	7,6

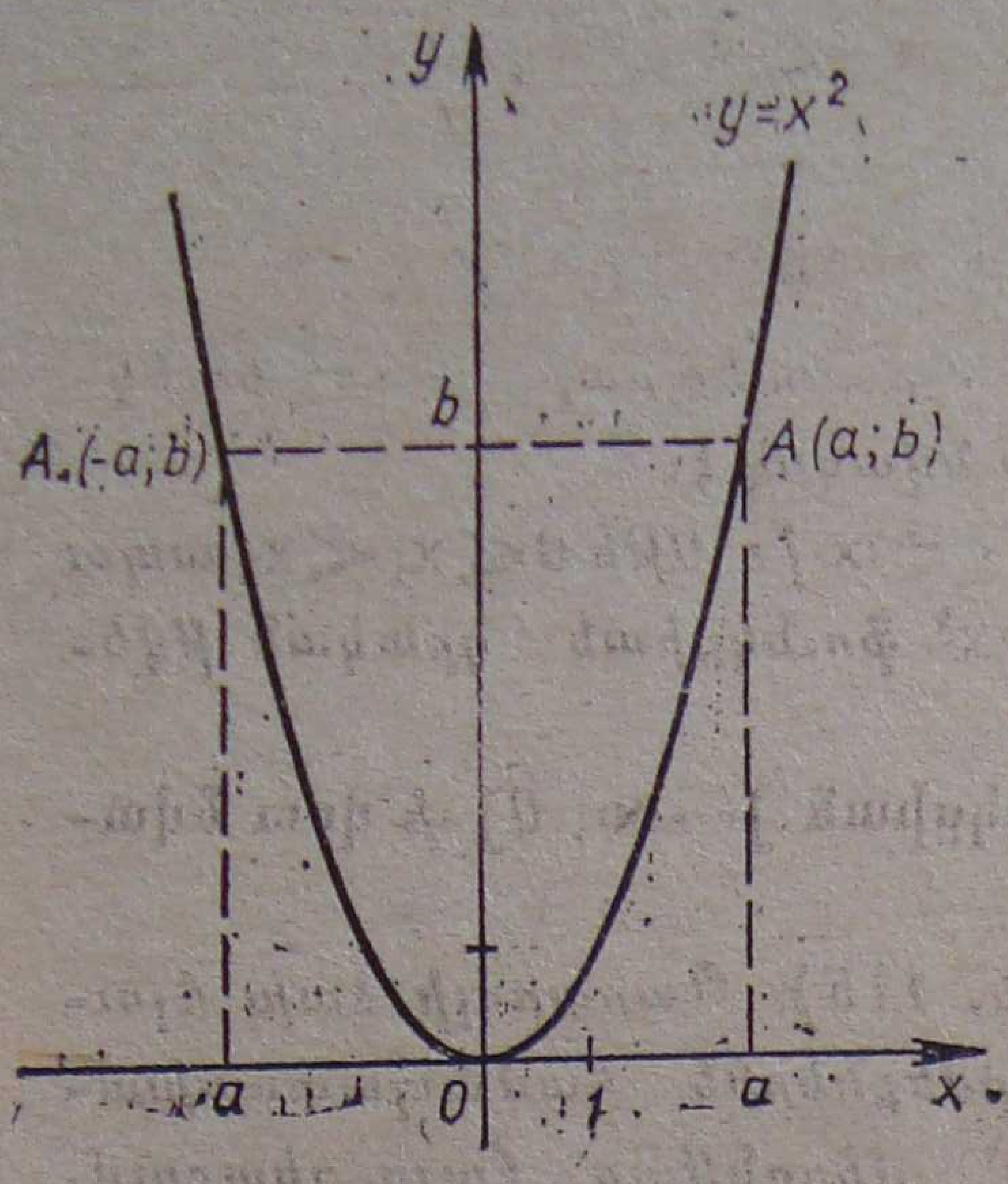
Կոորդինատային հարթության վրա կառուցենք բոլոր այն կետերը, որոնց կոորդինատները նշված են այս երկու աղյուսակներում (նկ. 114 բ)։

Այժմ բոլոր նշված կետերը միացնենք սահուն հոծ գծով։ Կստանանք $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 115)։ Այս գրաֆիկը կոչվում է պարաբոլ։

Եթե $b=a^2$, ապա $A(a; b)$ կետը պատկանում է $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին։ Բայց $(-a)^2=a^2$, հետևաբար՝ $b=(-a)^2$։ Ուստի գրաֆիկին պատկանում է նաև $A_1(-a; b)$ կետը (նկ. 115)։

A և A_1 կետերը սիմետրիկ են Oy առանցքի նկատմամբ։ Հիշեցնենք, որ երկու կետեր կոչվում են ուղղի նկատմամբ սիմետրիկ, եթե նրանք գտնվում են այդ ուղղի միևնույն ուղղահայացի վրա և հավասարահեռ են այդ ուղղից։

Այսպիսով, $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի յուրաքանչյուր A կետի համապատասխանում է այդ գրաֆիկի մեկ այլ՝ A_1 կետ, որը A-ին սի-



Նկ. 115

մետրիկ է Oy առանցքի նկատմամբ։ Ուստի $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը սիմետրիկ է Oy առանցքի նկատմամբ։

Սահմանում։ Ֆունկցիան կոչվում է աճող տրված բազմության վրա, եթե այդ բազմությանը պատկանող արգումենտի մեծ արժեքին համապատասխանում է ֆունկցիայի մեծ արժեք։

Ֆունկցիան կոչվում է նվազող տրված բազմության վրա, եթե այդ բազմությանը պատկանող արգումենտի մեծ արժեքին համապատասխանում է ֆունկցիայի փոքր արժեք։

Ենթադրենք, թե ֆունկցիան տրված է M բազմությունը ընդգրկող որոշ թվային բազմության վրա։ Դիցուք x փոփոխականի $x_1 \in M$ արժեքին համապատասխանում է y փոփոխականի y_1 արժեքը, իսկ $x_2 \in M$ արժեքին՝ y_2 արժեքը։ Վերը նշված սահմանումները կարելի է գրել այսպես.

Ֆունկցիան աճում է M բազմության վրա, եթե

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (y_1 < y_2)։$$

Ֆունկցիան նվազում է M բազմության վրա, եթե

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (y_1 > y_2)։$$

Հաշվենք $y=x^2$ ֆունկցիայի արժեքները արգումենտի երկու արժեքների դեպքում և համեմատենք դրանք.

եթե $x_1=-3$, $x_2=2$, *ապա* $y_1=9$, $y_2=4$, $x_1<x_2$, *իսկ* $y_1>y_2$,

եթե $x_1=-3$, $x_2=4$, *ապա* $y_1=9$, $y_2=16$, $x_1<x_2$ *և* $y_1<y_2$,

եթե $x_1=-3$, $x_2=3$, *ապա* $y_1=y_2=9$, $x_1<x_2$, $y_1=y_2$։

Այստեղից հետևում է, որ $y=x^2$ ֆունկցիան ոչ աճող է, ոչ էլ նվազող։ Սակայն մենք այսպիսի եզրակացության հանգեցինք, համեմատելով արգումենտի երկու կամայական արժեքներ, այսինքն՝ ֆունկցիան դիտարկելով բոլոր թվերի բազմության վրա։ Այժմ վարվենք այլ կերպ։ Արգումենտի դրական և բացասական արժեքները դիտարկենք առանձին-առանձին։

Դիցուք, նախ $x<0$, այսինքն՝ $x \in]-\infty; 0[$։ Եթե $x_1<x_2<0$, ապա $-x_1>-x_2>0$։ Դրական անդամներով անհավասարությունը անդամ առ

անդամ բարձրացնելով քառակուսի, կստանանք նույն նշանի անհավասարություն.

$$(-x_1)^2>(-x_2)^2, \text{ կամ } x_1^2>x_1^2 \text{ այսինքն՝ } y_1>y_2,$$

Այսպիսով, եթե $x_1<x_2<0$, ապա $y_1>y_2$։ Հետևաբար, $y=x^2$ ֆունկցիան բացասական թվերի բազմության վրա նվազող է։

Դիցուք այժմ $x\geqslant 0$, այսինքն՝ $x\in[0; +\infty[$, եթե $0\leqslant x_1<x_2$ ապա $x_1^2<x_2^2$, այսինքն՝ $y_1<y_2$։ Հետևաբար $y=x^2$ ֆունկցիան դրական թվեթվերի բազմության վրա աճող է։

Եզրակացություն։ $y=x^2$ ֆունկցիան $]-\infty; 0]$-ի վրա նվազող է, իսկ $[0; +\infty[$-ի վրա աճող։

Այս բանը երևում է գրաֆիկի վրա (նկ. 115)։ Պարաբոլի ձախ ճյուղը, այսինքն՝ արգումենտի բացասական արժեքներին համապատասխանող ճյուղը, վայրընթաց է, իսկ աջ ճյուղը՝ վերընթաց (այդ դեպքում, իհարկե, գրաֆիկին միշտ պետք է նայել ձախից աջ, այսինքն՝ Ox առանցքի վրա ընտրված ուղղությամբ)։

Ցանկացած թվի քառակուսին բացասական թիվ չէ։ Ուստի $y=x^2$ ֆունկցիայի արժեքներ կարող են լինել միայն ոչ բացասական թվերը։ Եթե $x=0$, ապա $y=0$, հետևաբար զրոն ֆունկցիայի արժեքներից է։ Կարո՞ղ է արդյոք ցանկացած բնական թիվ ֆունկցիայի արժեք լինել արգումենտի որոշ արժեքի դեպքում։ Պատասխանը պարզ է 115-րդ նկարից։ Ինչպիսին էլ լինի b դրական թիվը, կարելի է տանել $y=b$ ուղիղը, որը պարաբոլը կհատի a և —a աբսցիսներ ունեցող A և A_1 կետերում։ Ուստի ցանկացած դրական թիվ $y=x^2$ ֆունկցիայի արժեք է, ընդ որում նույնիսկ արգումենտի երկու արժեքների դեպքում (որոնք հակադիր թվեր են)։

Դա նշանակում է, որ $y=x^2$ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը բոլոր ոչ բացասական թվերի բազմությունն է։

Վարժություններ

Միևնույն նկարի վրա կառուցեք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները (օգտվեցեք $y=x^2$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակից).

725. $y=ax^2$, երբ $a=\frac{1}{4}$, $a=1$, $a=2$,

726. $y=ax^2$, երբ $a=-\frac{1}{4}$, $a=-1$, $a=-2$,

§ 95. $y=\sqrt{x}$ և $y=-\sqrt{x}$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԸ

$y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից (նկ. 115) պարզ երևում է, որ $x\geqslant 0$ դեպքում ցանկացած b դրական թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի a դրական թիվ, որ $b=a^2$։ Իրոք, a-ն պարաբոլի այն կետի աբսցիսն է, որի օրդինատը հավասար է b-ի։ Այսպիսով, ցանկացած $b>0$-ի համար գոյություն ունի b-ի քառակուսի արմատի միակ դրական արժեք, որը հավասար է a դրական թվին, այսինքն՝ $\sqrt{b}=a\ (a>0)$։ Բացի այդ, եթե $b=0$, ապա և $a=0$։

Դիտարկենք $y=\sqrt{x}$ բանաձևը։ Քանի որ x փոփոխականի յուրաքանչյուր ոչ բացասական արժեքի համար գոյություն ունի միմիայն մեկ ոչ բացասական $\sqrt{x}$ արժեք, ապա այդ բանաձևով տրվում է ֆունկցիա, երբ $x<0$, $\sqrt{x}$ արտահայտությունը իմաստ չունի (տես § 93)։ Այսպիսով, $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր ոչ բացասական թվերի բազմությունն է։

$y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար կազմենք աղյուսակ (կարելի է օգտվել $y=x^2$, $x\geqslant 0$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման համար կազմված աղյուսակից)։

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	16
y	0	0,5	1	1,5	2	2,50	3	4

Կառուցելով համապատասխան կոորդինատներով կետերը և դրանք միացնելով սահուն գծով, կստանանք $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 116)։

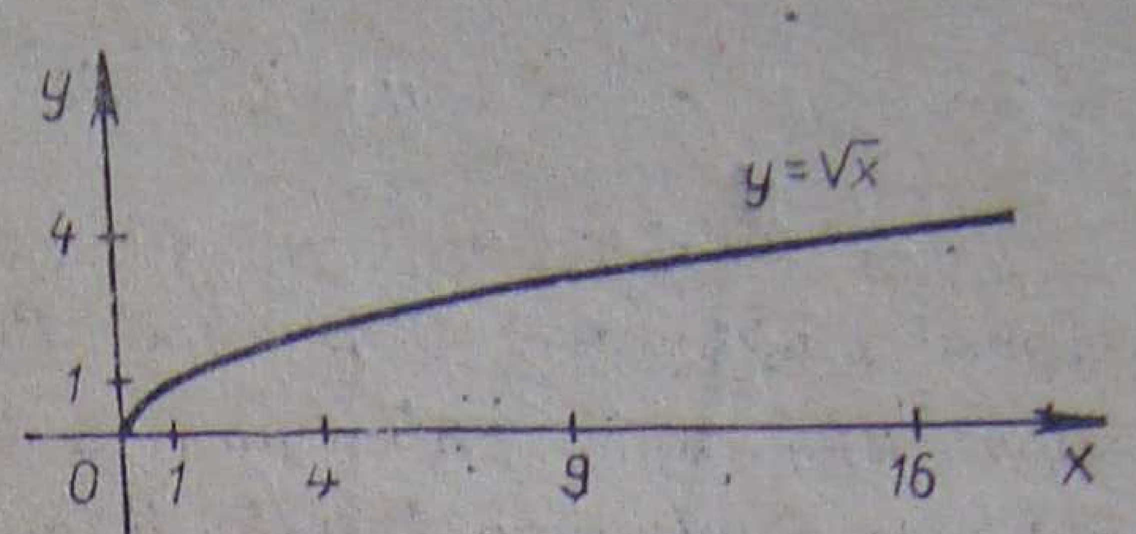
$y=-\sqrt{x}$ բանաձևով ևս տրվում է ֆունկցիա։ Նրա գրաֆիկը կառուցելու համար օգտվենք նախորդ աղյուսակից, երկրորդ տողի յուրաքանչյուր թիվ փոխարինելով իր հակադիր թվով։

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	16
y	0	−0,5	−1	−1,5	−2	−2,5	−3	−4

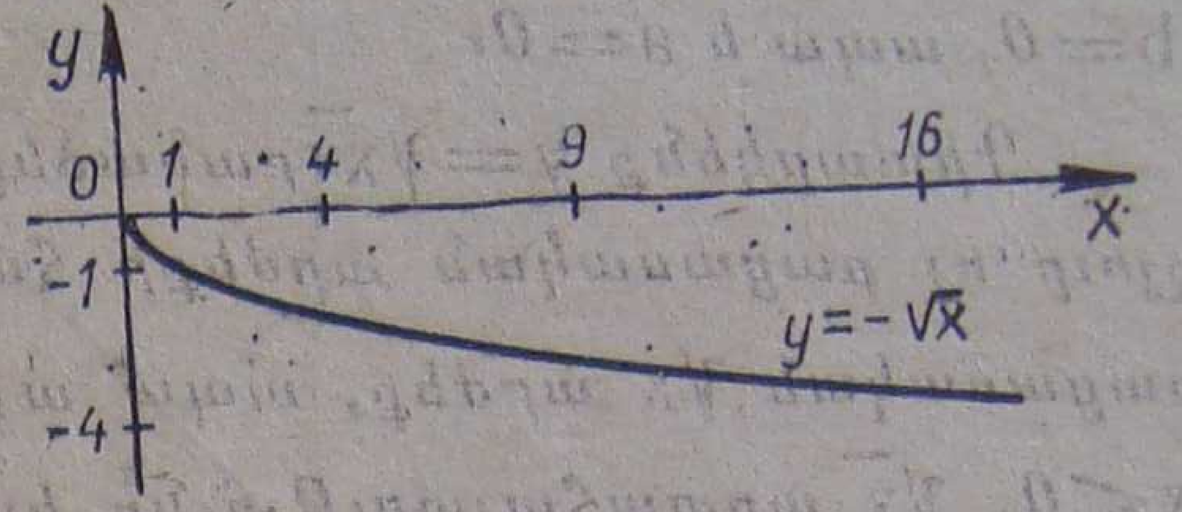
Կառուցելով աղյուսակում նշված կոորդինատներով կետերը, և դրանք միացնելով սահուն գծով, կստանանք $y=-\sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 117)։

Միևնույն նկարի վրա կառուցենք $y=x^2$, $x \geqslant 0$ և $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները (նկ. 118)։ Նկարից երևում է, որ այդ գրաֆիկները սիմետրիկ են $y=x$ ուղղի, այսինքն՝ առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի նկատմամբ։

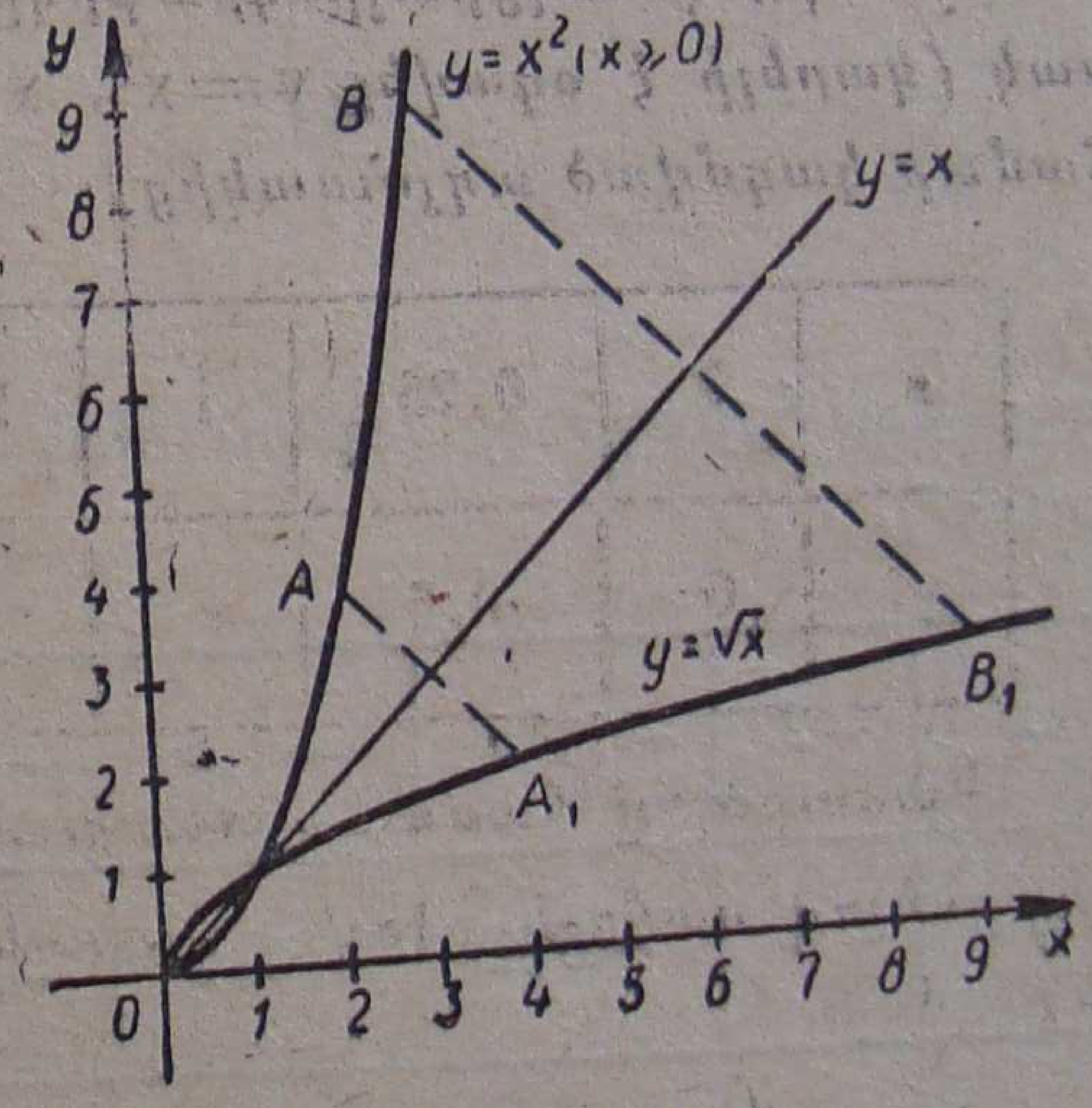
Հանգունորեն, միևնույն նկարի վրա կառուցենք $y=x^2$, $x \leqslant 0$ և $y=-\sqrt{x}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները (նկ. 119)։ Նկարից դարձյալ երևում է, որ այդ գրաֆիկները սիմետրիկ են առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի՝ $y=x$ ուղղի նկատմամբ (սիմետրիկ են, օրինակ, A և A_1, B և B_1, C և C_1 կետերը)։



Նկ. 11



Նկ. 117



Նկ. 118

Վարժություններ

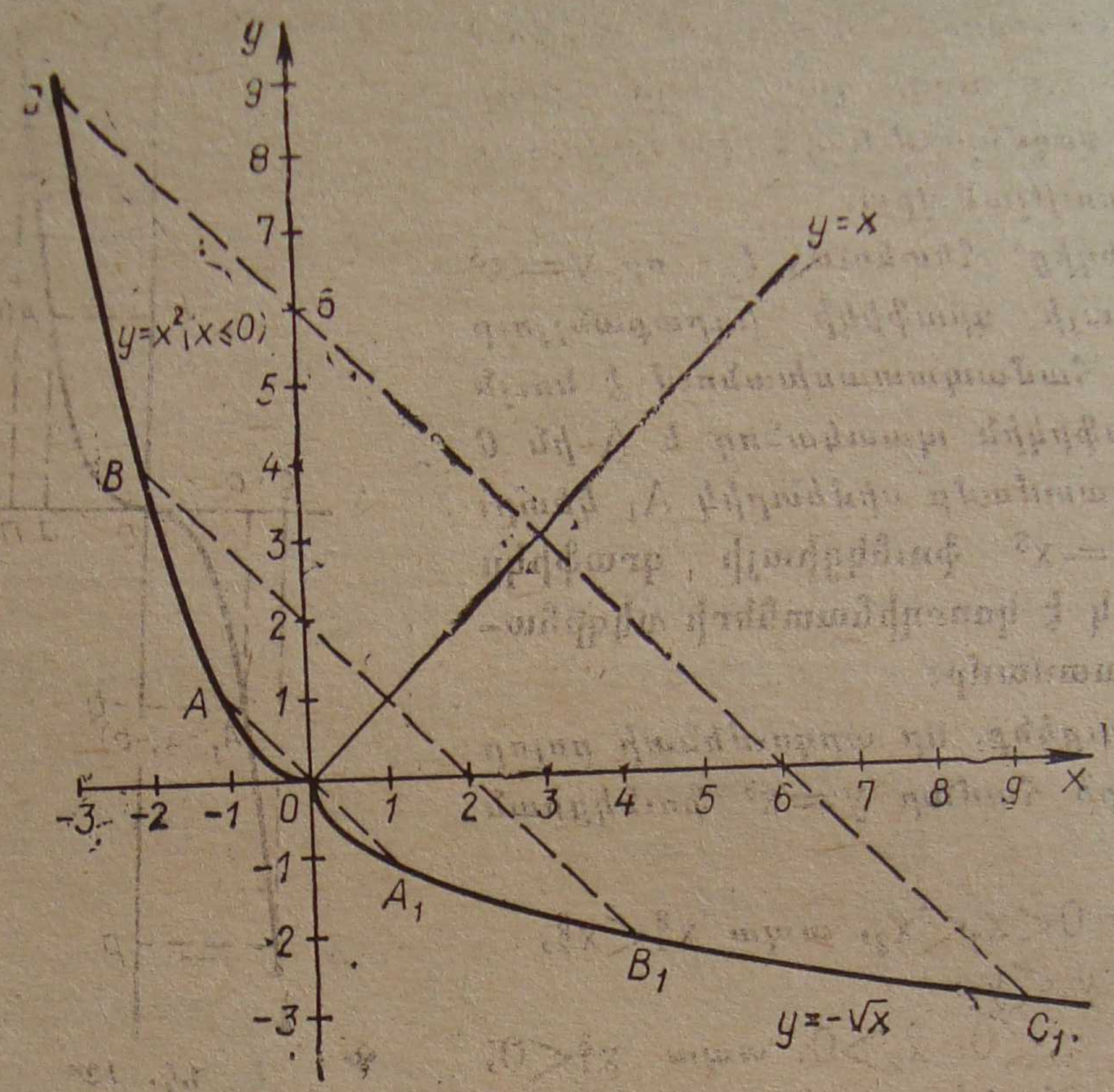
Միևնույն նկարի վրա կառուցեք հետևյալ երեք ֆունկցիաների գրաֆիկները (օգտվեցեք $y=\sqrt{x}$ և $y=-\sqrt{x}$ ֆունկցիաների արժեքների աղյուսակից).

727. $y=a\sqrt{x}$, երբ $a=\frac{1}{2}$, $a=1$, $a=2$։

728. $y=a\sqrt{x}$, երբ $a=-\frac{1}{2}$, $a=-1$, $a=-2$։

§ 96. $y=x^3$ և $y=\sqrt[3]{x}$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԸ

Դիտարկենք $y=x^3$ բանաձևը։ x փոփոխականի (արգումենտի) յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է y փոփոխականի միմիայն մեկ արժեք, որը հավասար է x փոփոխականի արժեքի խորանարդին։ Նշանակում է այդ բանաձևով տրվում է ֆունկցիա։ Նրա որոշման տիրույթը բոլոր թվերի բազմությունն է։ Ըստ համապատասխան կետերի կառուցենք



Նկ. 119

այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Կազմենք ֆունկցիայի որոշ արժեքների աղյուսակ.

x	−2	−1,75	−1,5	−1	0	1	1,5	1,75	2
y	−8	−5,4	−3,4	−1	0	1	3,4	5,4	8

Կառուցենք այն կետերը, որոնց կոորդինատները նշված են աղյուսակում, և դրանք միացնենք սահուն գծով։ Կստանանք $y=x^3$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը, որը կոչվում է* խորանարդ պարաբոլ *(նկ. 120)։*

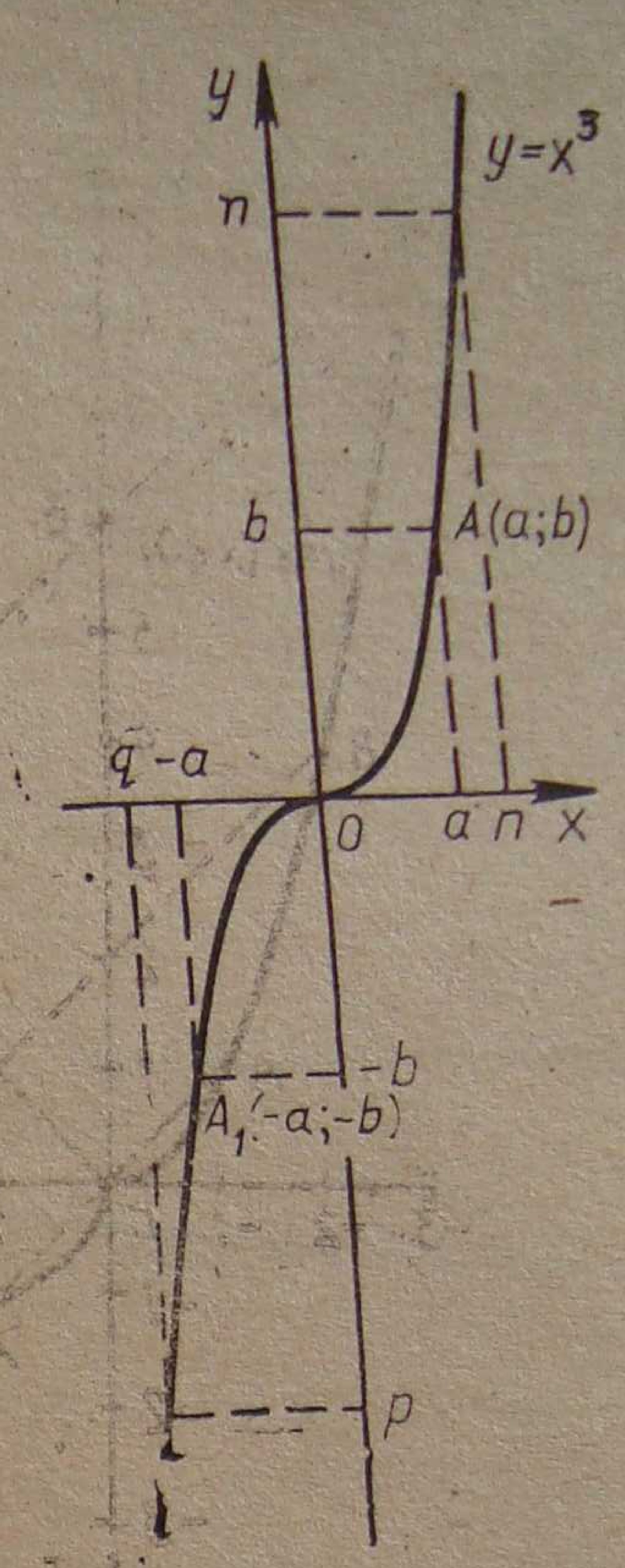
120-րդ նկարից երևում է, որ յուրաքանչյուր թիվ մի ինչ-որ թվի խորանարդ է։ Եթե, օրինակ, $m>0$, *ապա* $m=n^3$ $(n>0)$, *եթե, օրինակ,* $p<0$, *ապա* $p=q^3$ $(q<0)$*։ Հետևաբար* $y=x^3$ *ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը բոլոր թվերի բազմությունն է։*

Եթե $b=a^3$, *ապա* $A(a;\ b)$ *կետը պատկանում է* $y=x^3$ *ֆունկցիայի գրաֆիկին։ Բայց* $(-a)^3=-a^3$, *այսինքն՝* $(-a)^3=-b$, *ուստի գրաֆիկին պատկանում է նաև* $A_1(-a;\ -b)$ *կետը (նկ. 120)։* A *և* A_1 *կետերը սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։*

Հիշեցնենք, որ երկու կետեր կոչվում են երրորդ կետի (կենտրոնի՝

նկատմամբ սիմետրիկ, եթե նրանք այդ կետի (կենտրոնի) հետ միասին գտնվում են միևնույն ուղղի վրա, այդ կետի տարբեր կողմերում և նրանից հավասար հեռավորության վրա։

Այստեղից հետևում է, որ $y=x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկի յուրաքանչյուր A կետի համապատասխանում է նույն այդ գրաֆիկին պատկանող և A-ին O կետի նկատմամբ սիմետրիկ A_1 կետը։ Ուստի $y=x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը սիմետրիկ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:



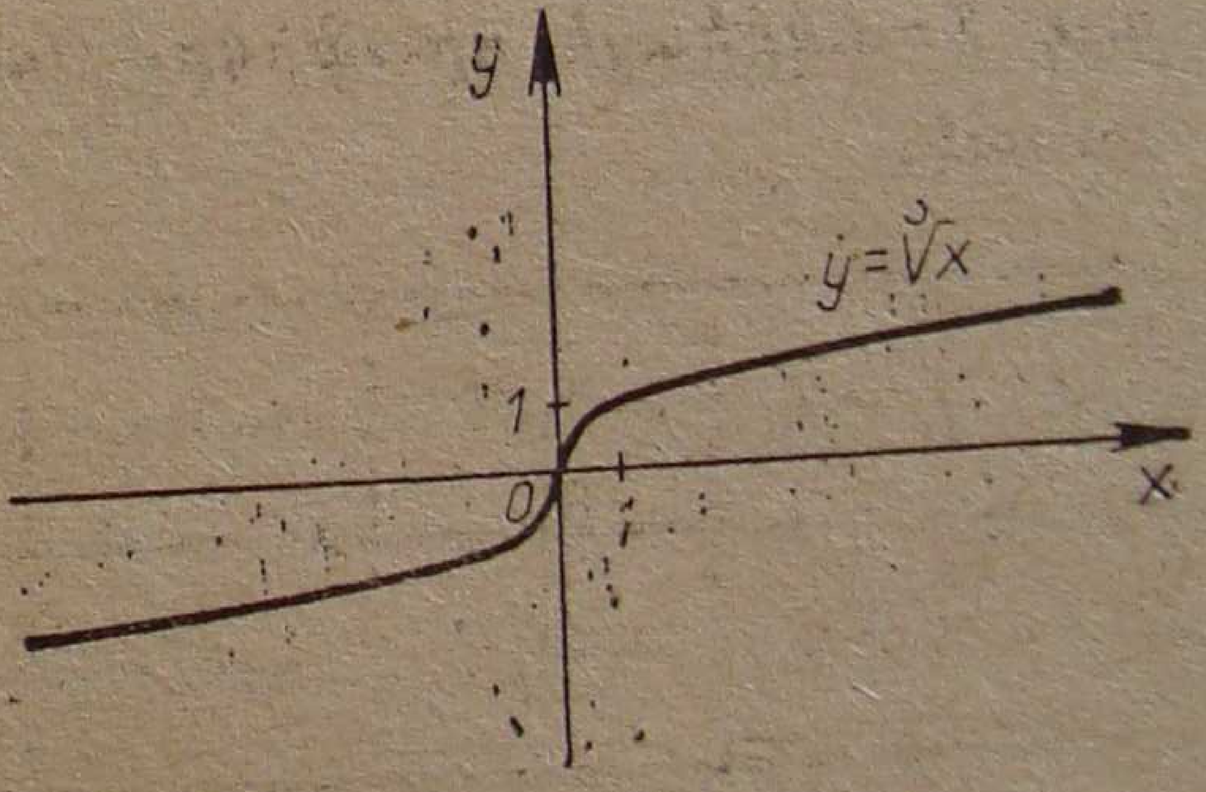
Նկ. 120

Ապացուցենք, որ արգումենտի բոլոր արժեքների համար $y=x^3$ ֆունկցիան աճող է։

Եթե $0<x_1<x_2$, ապա $x_1^3<x_2^3$, այսինքն՝ $y_1<y_2$։

Եթե $x_1<0$, $x_2>0$, ապա $x_1^3<0$, $x_2^3>0$, այսինքն՝ $y_1<0$, $y_2>0$, հետևաբար $y_1<y_2$։

Եթե, ի վերջո, $x_1<x_2<0$, ապա $-x_1>-x_2>0$։ Անդամ առ անդամ խորանարդ բարձրացնելով դրական թվերով անհավասարությունը, կստանանք նույն այդ նշանն ունեցող անհավասարություն.

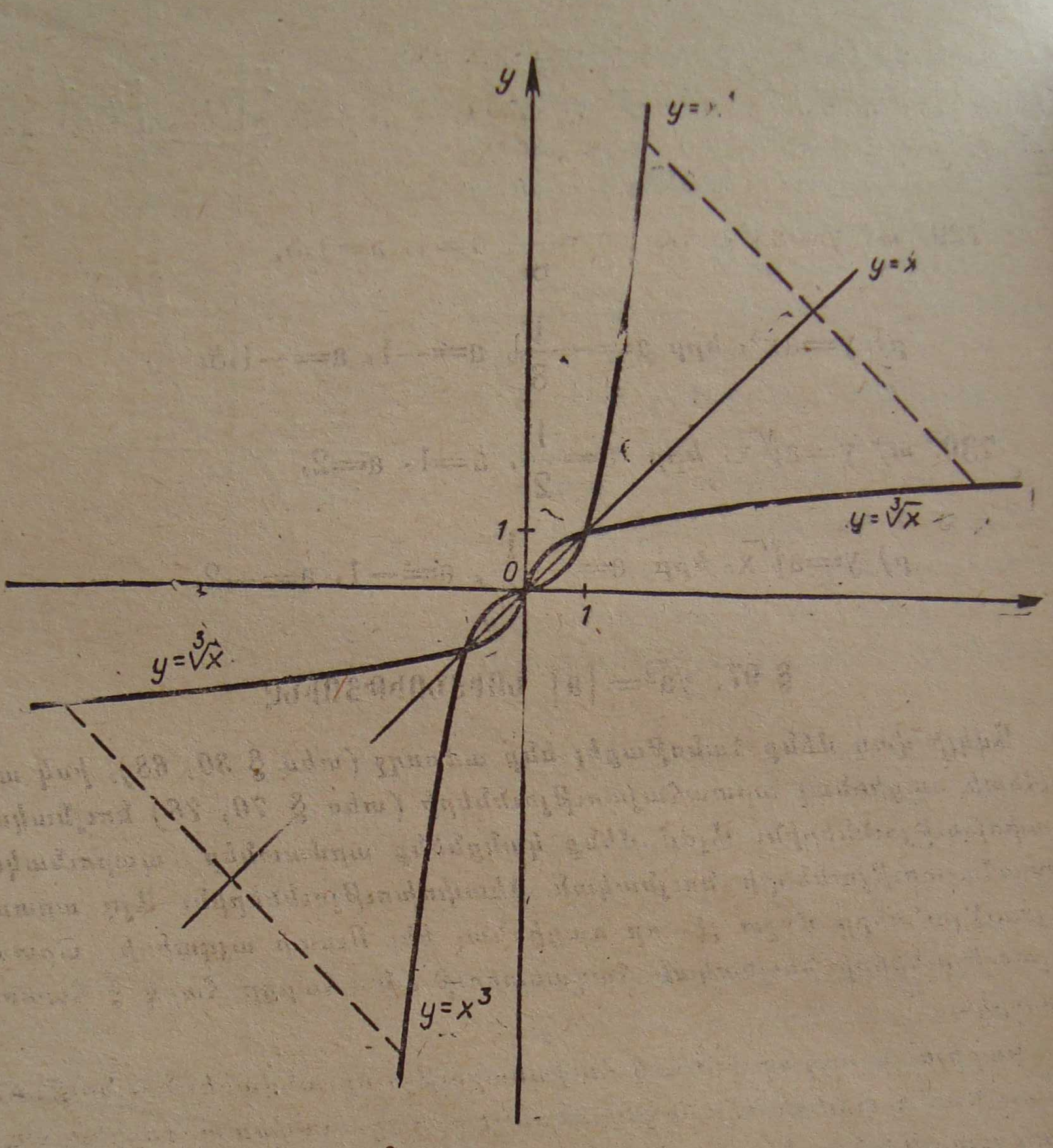


Նկ. 121

$(-x_1)^3>(-x_2)^3$, $-x_1^3>-x_2^3$, կամ $x_1^3<x_2^3$, այսինքն՝ $y_1<y_2$։

Այսպիսով, համեմատելով արգումենտի երկու դրական արժեքներ, երկու բացասական արժեքներ և, վերջապես, տարբեր նշաններով երկու արժեքներ, մենք ստացանք, որ եթե $x_1<x_2$, ապա $y_1<y_2$։ Հետևաբար, $y=x^3$ ֆունկցիան աճող է:

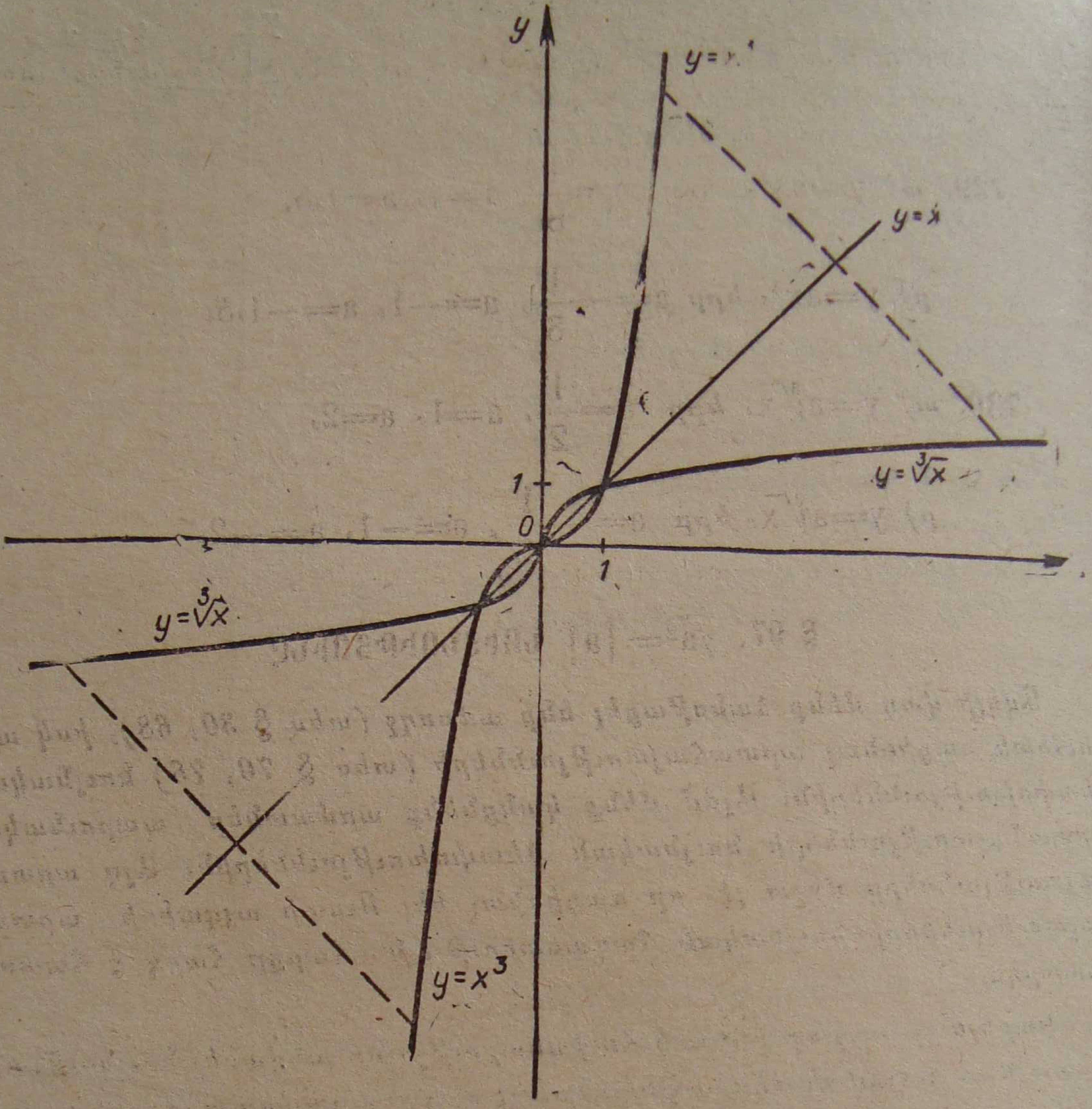
Յուրաքանչյուր b թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի a թիվ, որ $b=a^3$։ Իրոք, a-ն $y=x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկի (Նկ. 120) այն կետի աբս-



Նկ. 122

ցիսն է, որի օրդինատը հավասար է b-ի: Ուստի ցանկացած b թվի համար գոյություն ունի b-ի խորանարդ արմատի միակ արժեք, այսինքն՝ $\sqrt[3]{b}=a$: Սրանից հետևում է, որ $y=\sqrt[3]{x}$ բանաձևով տրվում է ֆունկցիա: Նրա, ինչպես նաև $y=x^3$ ֆունկցիայի, որոշման և արժեքների տիրույթները բոլոր թվերի բազմությունն է: $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է 121-րդ նկարում: Այն սիմետրիկ է 0 կետի նկատմամբ:

Միևնույն նկարի վրա կառուցելով $y=x^3$ և $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները, տեսնում ենք, որ երկու գրաֆիկները միասին վերցրած սիմետրիկ են $y=x$ ուղղի, այսինքն՝ առաջին և երրորդ կոորդինատային անկյունների կիսորդի նկատմամբ (Նկ. 122):



Նկ. 122

ցիսն է, որի օրդինատը հավասար է b-ի։ Ուստի ցանկացած b թվի համար գոյություն ունի b-ի խորանարդ արմատի միակ արժեք, այսինքն՝ $\sqrt[3]{b}=a$։ Սրանից հետևում է, որ $y=\sqrt[3]{x}$ բանաձևով տրվում է ֆունկցիա։ Նրա, ինչպես նաև $y=x^3$ ֆունկցիայի, որոշման և արժեքների տիրույթները բոլոր թվերի բազմությունն է։ $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է 121-րդ նկարում։ Այն սիմետրիկ է 0 կետի նկատմամբ։

Միևնույն նկարի վրա կառուցելով $y=x^3$ և $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները, տեսնում ենք, որ երկու գրաֆիկները միասին վերցրած սիմետրիկ են $y=x$ ուղղի, այսինքն՝ առաջին և երրորդ կոորդինատային անկյունների կիսորդի նկատմամբ (Նկ. 122)։

Միևնույն նկարի վրա կառուցեք հետևյալ երեք ֆունկցիաների գրաֆիկները․

729. ա) $y=ax^3$, երբ $a=\frac{1}{8}$, $a=1$, $a=1{,}5$,

բ) $y=ax^3$, երբ $a=-\frac{1}{8}$, $a=-1$, $a=-1{,}5$։

730. ա) $y=a\sqrt[3]{x}$, երբ $a=\frac{1}{2}$, $a=1$, $a=2$,

բ) $y=a\sqrt[3]{x}$, երբ $a=-\frac{1}{2}$, $a=-1$, $a=-2$։

§ 97. $\sqrt{a^2}=|a|$ ՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ավելի վաղ մենք ծանոթացել ենք ամբողջ (տես § 30, 68), իսկ այնուհետև ռացիոնալ արտահայտությունների (տես § 70, 76) նույնական ձևափոխություններին։ Այժմ մենք կանգնենք արմատներ պարունակող արտահայտությունների նույնական ձևափոխություններին։ Այդ արտահայտությունները միշտ չէ, որ ռացիոնալ են։ Ուստի այդպիսի արտահայտությունների նույնական հավասարության հարցը հարկ է հատուկ դիտարկել։

Կարելի՞ է արդյոք $\sqrt{a^2}=a$ հավասարությունը անվանել նույնություն, թե՞ ոչ։ Եթե a փոփոխականը ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ, ապա հավասարության երկու մասերի համապատասխան արժեքները հավասար են։ Այսպես, $a=2$ դեպքում ձախ մասն ընդունում է $\sqrt{4}$ արժեքը, աջ մասը նույնպես ընդունում է նույն այդ 2 արժեքը։ Բայց եթե a փոփոխականը ընդունում է բացասական արժեքներ, ապա հավասարության երկու մասերի համապատասխան արժեքներն արդեն տարբեր են։ Այսպես, $a=-3$ դեպքում ձախ մասն ընդունում է $\sqrt{9}$, այսինքն՝ 3 դրական արժեքը, իսկ աջ մասը՝ -3 բացասական արժեքը։ Հետևաբար $\sqrt{a^2}=a$ հավասարությունը նույնություն չէ։

Դիտարկենք հետևյալ նույնությունը․

$$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2, \qquad (1)$$

Նրա աջ մասը իմաստ ունի միայն $a\geqslant 0$ դեպքում, իսկ ձախ մասը՝ a-ի բոլոր արժեքների դեպքում։ Ուստի հավասարության երկու մասերի համապատասխան արժեքները գոյություն ունեն միայն $a\geqslant 0$ դեպքում, և

ընդ որում դրանք հավասար են (օրինակ, $\sqrt{9^2}=(\sqrt{9})^2$)։ Հետևաբար (1) հավասարությունը նույնություն է։

Այժմ դիտարկենք

$$(\sqrt{a})^2=a \qquad (2)$$

հավասարությունը։ $a<0$ դեպքում հավասարության երկու մասերը համապատասխան արժեքներ չունեն, իսկ $a\geqslant 0$ դեպքում ունեն և ընդ որում դրանք հավասար են (օրինակ, $(\sqrt{25})^2=25$)։ Այսպիսով, (2) հավասարությունը նույնպես նույնություն է։

Այս երկու հավասարությունների փոխանցականության շնորհիվ պետք է հետևեր, որ

$$\sqrt{a^2}=a \qquad (3)$$

հավասարությունը ևս նույնություն է։ Բայց մենք քիչ առաջ ցույց տվեցինք, որ այդ հավասարությունը նույնություն չէ։ Ստացվում է, որ ոչ ռացիոնալ արտահայտությունների համար նույնության փոխանցականությունը կարող է չպահպանվել։

Մտցնենք նույնության նոր սահմանում, այնպիսին, որը ոչ ռացիոնալ արտահայտությունների համար ևս օժտված լինի փոխանցականության հատկությամբ։

Սահմանում։ Միևնույն փոփոխականը պարունակող երկու արտահայտությունները կոչվում են նույնաբար հավասար տրված բազմության վրա, եթե նրանք այդ բազմության վրա որոշված են և իրենց բոլոր համապատասխան արժեքները հավասար են։

$\sqrt{a^2}=a$ հավասարությունը նույնություն չէ բոլոր թվերի բազմության վրա, բայց այն նույնություն է ոչ բացասական թվերի բազմության վրա.

$$\sqrt{a^2}=a, \text{ եթե } a\geqslant 0։$$

Դառնանք դիտարկված (1) և (2) հավասարություններին։ Դրանցից յուրաքանչյուրը նույնություն է ոչ բացասական թվերի բազմության վրա։ Փոխանցականության շնորհիվ այդ երկու նույնություններից հետևում է $\sqrt{a^2}=a$ հավասարությունը, որը նույնպես նույնություն է ոչ բացասական թվերի բազմության վրա։

Թեորեմ։ a փոփոխականի ցանկացած արժեքների դեպքում տեղի ունի հետևյալ նույնությունը.

$$\sqrt{a^2}=|a|։$$

Ապացույց։ Եթե $a\geqslant 0$, ապա $\sqrt{a^2}=a$։ Բայց դրական թիվը հավասար է իր մոդուլին՝ $a=|a|$, ուստի $\sqrt{a^2}=|a|$։

Իսկ եթե $a<0$, ապա $\sqrt{a^2}=-a$, բայց $a<0$-ից հետևում է, որ $-a>0$։ Բայց $-a$ դրական թիվը հավասար է իր մոդուլին՝ $-a=|-a|$։ Բացի այդ $|-a|=|a|$, այնպես որ $-a=|-a|=|a|$, ուստի բացասական a-ի դեպքում ևս $\sqrt{a^2}=|a|$։ Նույնությունն ապացուցված է։

Եթե $a\geqslant 0$, ապա ցանկացած $n\in N$-ի համար տեղի ունեն հետևյալ երկու նույնությունները.

$$(\sqrt[n]{a})^n=a \quad և \quad \sqrt[n]{a^n}=a։$$

Դիտարկենք $y=\sqrt{x^2}$ ֆունկցիան, այսինքն՝ $y=|x|$ ֆունկցիան։ Եթե $x\geqslant 0$, ապա $y=x$, իսկ եթե $x<0$, ապա $y=-x$։ Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է 123-րդ նկարում։

Օրինակներ: Գտեք հետևյալ արտահայտությունների արժեքները.

1) $\sqrt{(a-3)^2}$, եթե $a>4$, 3) $\sqrt{(x-4)^2}$, եթե $1<x<9$,

2) $\sqrt{(a-5)^2}$, եթե $a<4$, 4) $\sqrt{(x-6)^2}$։

Լուծում: 1) Եթե $a>4$, ապա $a>3$, $a-3>0$, ուստի $\sqrt{(a-3)^2}=a-3$։

2) Եթե $a<4$, ապա $a<5$, $5-a>0$, ուստի $\sqrt{(a-5)^2}=5-a$։

3) Դիտարկենք երկու դեպք։

ա) Եթե $1<x<4$, ապա $4-x>0$, ուստի $\sqrt{(x-4)^2}=4-x$,

բ) Եթե $4\leqslant x<9$, ապա $x-4\geqslant 0$, ուստի $\sqrt{(x-4)^2}=x-4$։

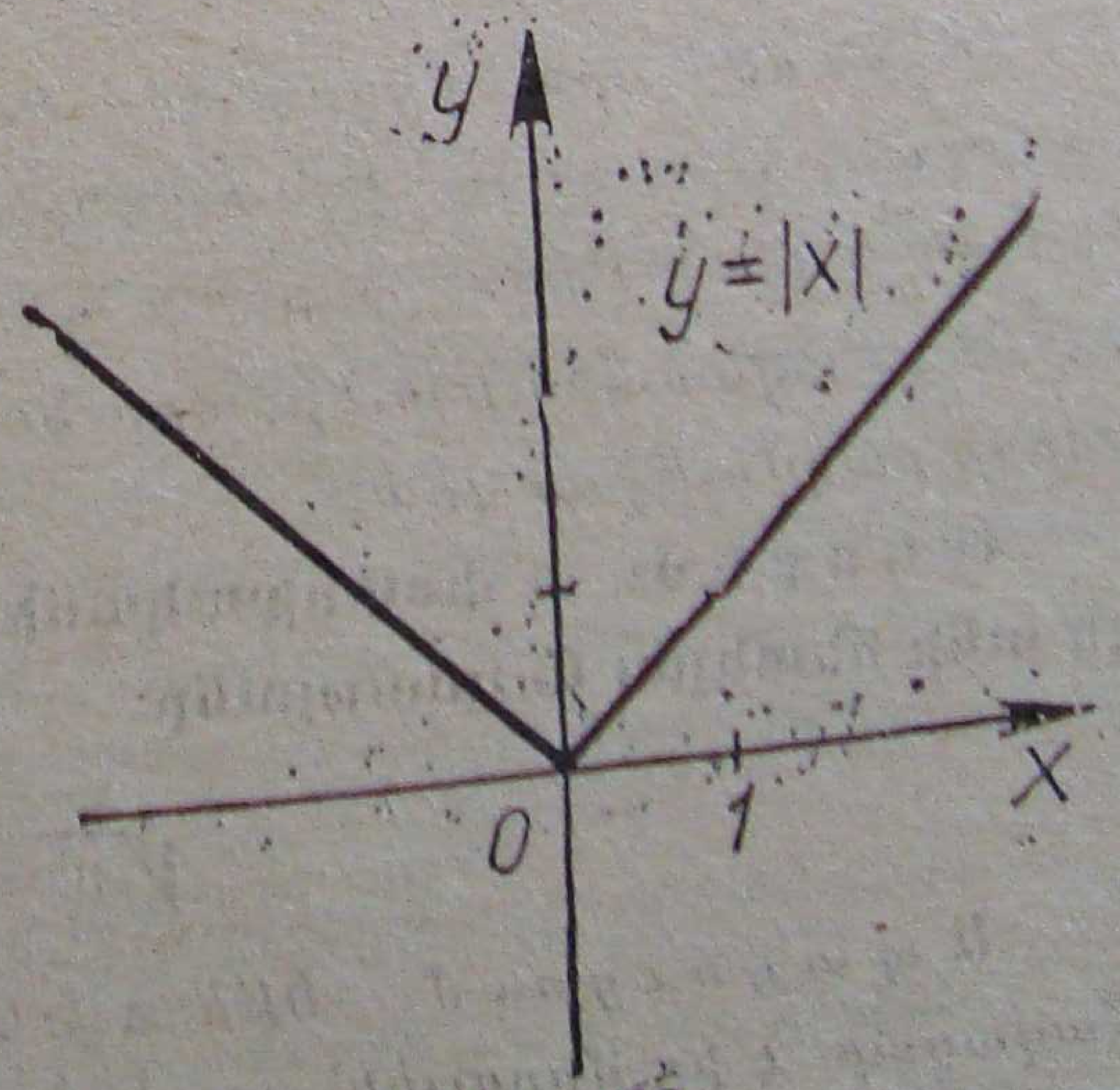
4) Եթե $x<6$, ապա $\sqrt{(x-6)^2}=6-x$, եթե $x\geqslant 6$, ապա $\sqrt{(x-6)^2}=x-6$։

Այս օրինակի լուծումը կարելի է գրել և այսպես.

$$\sqrt{(x-6)^2}=|x-6|,$$

կամ

$$\sqrt{(x-6)^2}\begin{cases}x-6, & եթե\ x\geqslant 6,\\ 6-x, & եթե\ x<6։\end{cases}$$



Նկ. 123

Վարժություններ

Հաշվեցեք կամ պարզեցրեք հետևյալ արտահայտությունները.

731. ա) $\sqrt{25}$, $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{(-5)^2}$, $\sqrt{36}$,

բ) $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{(-a)^2}$, $\sqrt{(a-b)^2}$, $\sqrt{(b-a)^2}$։

732. ա) $\sqrt{(2-5)^2}$, գ) $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}$,

բ) $\sqrt{(7-\sqrt{50})^2}$, դ) $\sqrt{(\sqrt{20}-4)^2}$։

733. Փոփոխականների ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում են ճիշտ հետևյալ անհավասարությունները․

ա) $\sqrt{a^2}=a$, գ) $\sqrt{(2-a)^2}=a-2$,

բ) $\sqrt{b^2}=-b$, դ) $\sqrt{(b-3)^2}=b-3$։

734. Ձևափոխեցեք հետևյալ արտահայտությունները․

ա) $\sqrt{(x-5)^2}$, եթե $x<5$,

բ) $\sqrt{(8-a)^2}$, եթե $a\geqslant 8$,

գ) $\sqrt{(7+x)^2}$, եթե $x=3$, $x=10$,

դ) $\sqrt{(y-3)^2}$, եթե $y=2$, $y=5$։

§ 98. ԱՐՄԱՏԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ապացուցենք արմատների վերաբերյալ մի քանի թեորեմ, հիմնըվելով հետևյալ լեմմայի, այսինքն՝ օժանդակ թեորեմի վրա։

Լ ե մ մ ա։ **Եթե դրական հիմքերով և միևնույն բնական ցուցիչներով երկու աստիճաններ հավասար են, ապա հավասար են նաև նրանց հիմքերը։**

Դիցուք $x^m=y^m$, $x>0$, $y>0$։ Ապացուցենք, որ $x=y$։ Ենթադրենք, թե $x<y$։ Դրական թվերով այս անհավասարության երկու մասերը բարձրացնելով m աստիճան, կստանանք՝ $x^m<y^m$։ Բայց դա հակասում է պայմանին։ Հանգունորեն ապացուցվում է, որ x-ը չի կարող մեծ լինել y-ից։ Մնում է ընդունել, որ $x=y$։ Լեմման ապացուցվեց։

Թ ե ո ր ե մ 1. (արմատի հիմնական հատկությունը)։ **a դրական թվի m աստիճանի n աստիճանի թվաբանական արմատը չի փոխվի, եթե արմատի և աստիճանի ցուցիչները բազմապատկենք կամ բաժանենք միևնույն p բնական թվի վրա.**

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}\ (a>0),\ m,\ n,\ p\in N.$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ։ Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝ $\sqrt[n]{a^m}=x\ (x>0)$, $\sqrt[np]{a^{mp}}=y\ (y>0)$։ Ըստ արմատի սահմանման $x^n=a^m$,

$y^{np}=a^{mp}$: Այս երկու հավասարությունների առաջինը անդամ առ անդամ բարձրացնենք p աստիճան, կստանանք $x^{np}=a^{mp}$: Այսպիսով, $x^{np}=y^{np}$: Համաձայն լեմմայի $x=y$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

Մենք ավելի վաղ պայմանավորվել էինք ընդունել, որ $a^1=a$: Պայմանավորվենք նաև ընդունել, որ $\sqrt[1]{a}=a$: Այսպիսի պայմանավորվածությունից հետո իմաստ են ձեռք բերում հետևյալ հավասարությունները.

$$\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a^1}=\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{a^{np}}=\sqrt[1]{a^p}=a^p(a>0):$$

1-ին թեորեմը հնարավորություն է տալիս արմատի ցուցիչը և ենթարմատային թվի աստիճանացույցը կրճատել նրանց ընդհանուր բաժանարարով (եթե վերջինս գոյություն ունի), ինչպես նաև ցանկացած բնական աստիճանի արմատը ներկայացնել այնպիսի արմատով, որի ցուցիչը սկզբնական արմատի ցուցիչի բազմապատիկն է:

Օրինակներ:

1) $\sqrt[60]{2^{48}}=\sqrt[5]{2^4}=\sqrt[5]{16}$,

2) $\sqrt[3]{3^5}=\sqrt[6]{3^{10}}=\sqrt[9]{3^{15}}$,

3) $\sqrt[25]{7^{15}}=\sqrt[5]{7^3}=\sqrt[5]{343}$:

Վարժություններ

Կրճատեցեք արմատի և աստիճանի ցուցիչները.

735. ա) $\sqrt[48]{5^{36}}$, գ) $\sqrt[35]{6^{25}}$, ե) $\sqrt[20]{3^8}$,

բ) $\sqrt[40]{7^{32}}$, դ) $\sqrt[15]{12^9}$, զ) $\sqrt[20]{3^{12}}$,

736. ա) $\sqrt[54]{6^{36}}$, գ) $\sqrt[45]{5^{35}}$, ե) $\sqrt[10]{3^4}$,

բ) $\sqrt[63]{5^{36}}$, դ) $\sqrt[35]{14^{15}}$, զ) $\sqrt[10]{(-3)^5}$:

§ 99. ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄՆ ՈՒ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

Թեորեմ 2. (արմատների բազմապատկման վերաբերյալ): **n-րդ աստիճանի թվաբանական արմատների արտադրյալը հավասար է արտադրիչների ենթարմատային արտահայտությունների արտադրյալի նույն այդ n-րդ աստիճանի արմատին.**

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}(a>0,\ b>0):$$

Ապացուցում: Կատարենք այսպիսի նշանակումներ՝

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=x\ (x>0),\ \sqrt[n]{ab}=y(y>0):$$

Ըստ արմատի սահմանման և համաձայն երկու թվերի արտադրյալը աստիճան բարձրացնելու կանոնի, կարող ենք գրել.

$$y^n=ab,$$

$$x^n=(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab:$$

Այսպիսով, $x^n=y^n$: Քանի որ $x>0$ և $y>0$, ապա լեմմայի համաձայն $x=y$: Թեորեմն ապացուցված է:

Համանմանորեն ապացուցվում է նաև երեք թվաբանական արմատների վերաբերյալ թեորեմը.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}:$$

Այս բանաձևը կարելի է կարդալ նաև աջից ձախ. դրական արտադրիչների արտադրյալի n-րդ աստիճանի արմատը հավասար է յուրաքանչյուր արտադրիչի n-րդ աստիճանի արմատների արտադրյալին:

Ձևակերպենք արմատների բազմապատկման կանոնը. թվաբանական արմատների արտադրյալը գտնելու համար պետք է դրանք բերել միևնույն ցուցիչի և արմատ հանել արտադրիչների նոր ստացված ենթարմատային արտահայտությունների արտադրյալից:

Օրինակներ:

1) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[12]{5^3}\cdot\sqrt[12]{2^2}=\sqrt[12]{500},$

2) $\sqrt[9]{16}\cdot\sqrt[6]{32}=\sqrt[9]{2^4}\cdot\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[18]{2^8}\cdot\sqrt[18]{2^{15}}=\sqrt[18]{2^{23}},$

3) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{6}=\sqrt[15]{2^5\cdot 6^3}=\sqrt[15]{2^8\cdot 3^3}:$

Թեորեմ 3. (արմատների բաժանման վերաբերյալ): **n-րդ աստիճանի երկու թվաբանական արմատների քանորդը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի ենթարմատային արտահայտությունների քանորդի նույն այդ աստիճանի արմատին.**

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad (a>0;\ b>0):$$

3-րդ թեորեմն ապացուցվում է նույն ձևով, ինչ և 2-րդ թեորեմը:

Այս բանաձևը կարելի է կարդալ նաև աջից ձախ. երկու դրական թվերի քանորդի n-րդ աստիճանի արմատը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի նույն այդ n-րդ աստիճանի արմատների քանորդին:

Ձևակերպենք արմատների բաժանման կանոնը. երկու թվաբանական արմատների քանորդը գտնելու համար պետք է դրանք բերել միևնույն

ցուցիչի և արմատ հանել բաժանելիի և բաժանարարի նոր ստացված ներարմատային արտահայտությունների քանորդից:

Օ ր ի ն ա կ:

$$\sqrt[4]{10} : \sqrt[6]{5} = \sqrt[12]{10^3} : \sqrt[12]{5^2} = \sqrt[12]{\frac{10^3}{5^2}} = \sqrt[12]{40}.$$

Վարժություններ

Արմատների արտադրյալը կամ քանորդը ձևափոխեցեք արմատի.

737. ա) $\sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[6]{5}$, գ) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[5]{2}$,

բ) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$, դ) $\sqrt[15]{12} : \sqrt[25]{6}$.

738. ա) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[15]{3}$, գ) $\sqrt[5]{8} : \sqrt[6]{2}$,

բ) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[4]{5}$, դ) $\sqrt[10]{30} : \sqrt[15]{6}$.

§ 100. ԱՐՏԱԴՐԻՉԸ ԱՐՄԱՏԱՆՇԱՆԻ ՏԱԿԻՑ ՀԱՆԵԼԸ ԵՎ ԱՐՏԱԴՐԻՉԸ ԱՐՄԱՏԱՆՇԱՆԻ ՏԱԿ ՏԱՆԵԼԸ

Հիմնվելով նախորդ պարագրաֆի 2-րդ և 3-րդ թեորեմների վրա, կարելի է կատարել թվաբանական արմատների հետևյալ երկու փոխհակադարձ ձևափոխությունները:

ա) Արտադրիչը արմատանշանի տակից հանելը.

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b} \quad (a>0,\ b>0).$$

բ) Արտադրիչը արմատանշանի տակ տանելը.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a>0,\ b>0).$$

Օ ր ի ն ա կ ն ե ր:

1) $\sqrt[5]{3^7} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 3^2} = 3\sqrt[5]{9}$,

2) $\sqrt[4]{3^{11}} = \sqrt[4]{3^8 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{3^8} \cdot \sqrt[4]{3^3} = 9\sqrt[4]{27}$,

3) $5^4 \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^{12}} \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^{14}}$.

Վարժություններ

Արտադրիչը արմատանշանի տակից հանեք կամ տարեք արմատանշանի տակ.

739. ա) $\sqrt[4]{7^{19}}$, գ) $\sqrt[8]{7^{26}}$, ե) $2^3 \cdot \sqrt[7]{2}$,

բ) $\sqrt[5]{6^{13}}$, դ) $7^2 \cdot \sqrt[6]{7^5}$, զ) $3^3 \cdot \sqrt[4]{3}$.

740. ա) $\sqrt[6]{5^{23}}$, գ) $\sqrt[8]{5^{30}}$ ե) $3^5 \cdot \sqrt[9]{3}$,

բ) $\sqrt[7]{3^{19}}$, դ) $3^4 \cdot \sqrt[10]{3^7}$, զ) $2^5 \cdot \sqrt[6]{2}$,

§ 101. ԱՐՄԱՏԸ ԱՍՏԻՃԱՆ ԲԱՐՁՐԱՑՆԵԼԸ ԵՎ ԱՐՄԱՏԻՑ ԱՐՄԱՏ ՀԱՆԵԼԸ

Թեորեմ 4. (արմատը աստիճան բարձրացնելու վերաբերյալ)։ **a դրական թվի n-րդ աստիճանի արմատի m-րդ աստիճանը հավասար է a-ի m-րդ աստիճանի n-րդ աստիճանի արմատին.**

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (a>0)։$$

Ապացուցում։ Օգտվելով աստիճանի սահմանումից և 2-րդ թեորեմից, կստանանք՝

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ անգամ}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ անգամ}}} = \sqrt[n]{a^m}։$$

Այս բանաձևը կարելի է կարդալ նաև աջից ձախ. a դրական թվի m-րդ աստիճանի n-րդ աստիճանի արմատը հավասար է a թվի n-րդ աստիճանի արմատի m-րդ աստիճանին։

Օրինակներ։

1) $(\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{16}$,

2) $(\sqrt[6]{5})^4 = \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{25}$։

Թեորեմ 5. (արմատից արմատ հանելու վերաբերյալ)։ **a դրական թվի m-րդ աստիճանի արմատի n-րդ աստիճանի արմատը հավասար է նույն այդ a թվի այնպիսի արմատին, որի ցուցիչը հավասար է այդ արմատների ցուցիչների արտադրյալին.**

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[mn]{a} \quad (a>0)։$$

Ապացուցում։ Կատարենք այսպիսի նշանակումներ. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = x$ $(x>0)$, $\sqrt[mn]{a} = y$ $(y>0)$։ *Ըստ արմատի սահմանման՝* $x^n = \sqrt[m]{a}$, $x^{mn} = a$, $y^{mn} = a$։ *Այսպիսով,* $x^{mn} = y^{mn}$։ *Քանի որ* $x>0$, $y>0$, *ապա լեմմայի համաձայն* $x = y$։ *Թեորեմն ապացուցված է։*

Օրինակներ։

1) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^2}} = \sqrt[15]{a^2}$,

2) $\sqrt[7]{a \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[7]{\sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[21]{a^5}$

$\sqrt[np]{a^p}$ տեսքի արմատների դեպքում ցուցիչների կրճատումը կարելի է բացատրել նաև այսպես.

$$\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}}=\sqrt[n]{a}\ (a>0)։$$

Վարժություններ

Պարզեցրեք արտահայտությունները (բոլոր փոփոխականները ընդունում են դրական արժեքներ).

741. ա) $\sqrt[3]{a^9b^{15}c^{12}}$, գ) $(\sqrt[5]{3p^2q^3})^{25}$,

բ) $\sqrt[12]{81a^8b^{24}}$, դ) $\sqrt[42]{(3a^2b^2)^{35}}$։

742. ա) $\sqrt{\sqrt[7]{a^6}}$, բ) $\sqrt[8]{\sqrt[5]{a^4}}$, գ) $\sqrt[9]{a^4\sqrt{a}}$, դ) $\sqrt{a^3\sqrt[6]{a^5}}$։

743. ա) $(a^3-b^4)(a^3+b^4)$, գ) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$,

բ) $(2x+5y^2)(5y^2-2x)$, դ) $(\sqrt{10}-\sqrt{7})(\sqrt{10}+\sqrt{7})$։

744. Կրճատեցեք կոտորակները.

ա) $\frac{2a+5b^4}{4a^2-25b^8}$, բ) $\frac{b^2-5}{b+\sqrt{5}}$, գ) $\frac{\sqrt{14}-3x}{14-9x^2}$, դ) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{7}}{a-7}$։

§ 102. ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՊԱՑՈՒՑՈՒՄԸ։ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՄԻՋԻՆ

Ի լրումն ճիշտ անհավասարությունների նկատմամբ թվաբանական գործողություններ կատարելու վերաբերյալ ավելի վաղ ուսումնասիրված թեորեմների (տես § 86), ապացուցեք մի թեորեմ դրական թվերով ճիշտ անհավասարության երկու մասերից արմատ հանելու վերաբերյալ։

Թ ե ո ր ե մ։ Եթե դրական թվերով ճիշտ անհավասարության երկու մասերից հանենք բնական ցուցիչով արմատ, ապա կստացվի ճիշտ անհավասարություն (նույն նշանի)։

Ա պ ա ց ու ց ու մ։ Տրված է $a>b$ անհավասարությունը, որտեղ a-ն և b-ն դրական թվեր են, և n բնական թիվ։ Անհավասարության երկու մասերից հանելով n-րդ աստիճանի արմատ, կստանանք երկու դրական թիվ՝ $\sqrt[n]{a}$ և $\sqrt[n]{b}$։ Այդ թվերի միջև պետք է տեղի ունենա հետևյալ երեք առնչություններից միմիայն մեկը.

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b},\quad \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b},\quad \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}։$$

Սկզբում ենթադրենք, թե $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$։ Հավասարության երկու մասերը բարձրացնելով n-րդ աստիճան, կստանանք՝ $a=b$։ Դա հակասում է $a>b$ պայմանին, ուստի $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$ առնչությունը տեղի չունի։

Այժմ ենթադրենք, թե $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$։ Անհավասարության երկու մասերը

բարձրացնելով n-րդ աստիճան, դրական թվերով անհավասարության երկու մասերը աստիճան բարձրացնելու վերաբերյալ թեորեմի համաձայն կստանանք՝ $a<b$։ Սա նույնպես հակասում է $a>b$ պայմանին, ուստի և $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ առնչությունը չի կարող տեղի ունենալ։

Մնում է ընդունել, որ տեղի ունի $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ առնչությունը, այսինքն՝ այդ անհավասարությունը ճիշտ է։ Թեորեմն ապացուցված է։

Դատելով հանգունորեն, կարելի է ապացուցել, որ $a<b$ ճիշտ անհավասարությունից հետևում է նույն նշանն ունեցող $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ ($a>0$, $b>0$) ճիշտ անհավասարությունը։

Այս թեորեմից մենք կօգտվենք սույն պարագրաֆում։

Սահմանում։ Երկու դրական թվերի երկրաչափական միջին կոչվում է դրանց արտադրյալի թվաբանական քառակուսի արմատը։

Օրինակ, 3 և 12 թվերի երկրաչափական միջինը հավասար է $\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$։

Թեորեմ։ Երկու դրական թվերի երկրաչափական միջինը փոքր է կամ հավասար դրանց թվաբանական միջինին.

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\quad (a>0,\ b>0)։$$

Ապացուցում 1. Կազմենք այս երկու արտահայտությունների տարբերությունը և պարզենք նրա նշանը.

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0։$$

Տարբերությունը ստացվեց ոչ բացասական, ուստի՝

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}։$$

$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ անհավասարությունը տեղի ունի, եթե $a=b$։

Ապացուցում 2. Ենթադրենք, թե $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ անհավասարությունը ճիշտ է։ Քանի որ անհավասարության երկու մասերը ընդունում են դրական արժեքներ, ապա անհավասարությունը անդամ առ անդամ քառակուսի բարձրացնելով, կստանանք նույն նշանն ունեցող անհավասարություն՝ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$։ Այնուհետև, $(a+b)^2\geqslant 4ab$, $(a+b)^2-4ab\geqslant 0$, $(a-b)^2\geqslant 0$։ Այս անհավասարությունը ճիշտ է a և b ($a>0$, $b>0$) փոփոխականների բոլոր արժեքների դեպքում։

Դատողությունները կատարելով հակառակ կարգով, կհանգենք $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$ ճիշտ անհավասարությանը։ Քանի որ այս անհավասարության երկու մասերը ընդունում են դրական արժեքներ, ապա քառակուսի արմատ հանելով նրա երկու մասերից և վերցնելով արմատների դրական արժեքները, կստանանք նույն նշանն ունեցող $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ անհավասարությունը։ Սա էլ հենց պահանջվում է ապացուցել։

Վարժություններ

Անհավասարություններն ապացուցեք դրական թվերի դեպքի համար (տես § 88)

ա) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$,

բ) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$,

գ) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$,

դ) $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geqslant 16abc$։

§ 103. ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ

Զբաղվենք քառակուսի և խորանարդ արմատների մոտավոր արժեքների հաշվման հարցով։ Սկսենք պարզագույն դեպքերից՝ 2 թվի քառակուսի արմատից։

Քանի որ $1^2<2$, իսկ $2^2>2$, ապա միավորի ճշգրտությամբ կարող ենք գրել.

$\sqrt{2}\approx 1$ (պակասորդով), $\sqrt{2}\approx 2$ (հավելորդով)։

$\sqrt{2}$-ի արժեքը 0,1-ի ճշգրտությամբ գտնելու համար կազմենք 1-ից 2 թվերի քառակուսիների 0,1 քայլով աղյուսակը.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	...
x^2	1,00	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	...

Աղյուսակը շարունակելու հարկ չկա, քանի որ արդեն պարզ է, որ $1,4^2$-ն դեռ փոքր է 2-ից, իսկ $1,5^2$-ն՝ արդեն մեծ է։ Ուստի 0,1-ի ճշգրտությամբ կստանանք՝

$\sqrt{2}\approx 1,4$ (պակասորդով), $\sqrt{2}\approx 1,5$ (հավելորդով)։

$\sqrt{2}$-ի արժեքը հաշվենք 0,01-ի ճշգրտությամբ։ Դրա համար կազմենք 1,4-ից 1,5 թվերի քառակուսիների աղյուսակը 0,01 քայլով.

x	1,40	1,41	1,42	...
x^2	1,96	1,9881	2,0164	...

Աղյուսակից երևում է, որ $1{,}41^2$-ն դեռ փոքր է 2-ից, իսկ $1{,}42^2$-ն արդեն մեծ է։ Ուստի 0,01-ի ճշգրտությամբ կստանանք՝ $\sqrt{2}\approx 1{,}41$ (պակասորդով), $\sqrt{2}\approx 1{,}42$ (հավելորդով)։

Հետագա հաշվարկները ցույց են տալիս, որ

$$1{,}414^2<2<1{,}415^2.$$

Ուստի 0,001-ի ճշգրտությամբ կստանանք՝

$\sqrt{2}\approx 1{,}414$ (պակասորդով), $\sqrt{2}\approx 1{,}415$ (հավելորդով)։

Կարելի է հաշվումները շարունակել և $\sqrt{2}$-ի պակասորդով և հավելորդով մոտավոր արժեքները գտնել 0,0001-ի, 0,00001-ի ճշգրտությամբ և այլն։

Այժմ անցնենք խորանարդ արմատների մոտավոր հաշվումներին։ Հաշվենք, օրինակ, $\sqrt[3]{4}$ արմատը 0,1-ի ճշգրտությամբ։ $\sqrt[3]{4}$-ի մոտավոր արժեքները միավորի ճշգրտությամբ կլինեն.

$\sqrt[3]{4}\approx 1$ (պակասորդով), $\sqrt[3]{4}\approx 2$ (հավելորդով)։

Կազմենք 1-ից 2 թվերի խորանարդների 0,1 քայլով աղյուսակը.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	...
x^3	1 000	1,331	1,728	2,197	2,744	3,375	4,096	...

Քանի որ $1{,}5^3$-ը դեռ փոքր է 4-ից, իսկ $1{,}6^3$-ը արդեն մեծ է 4-ից, ուստի՝ $\sqrt[3]{4}\approx 15$ (պակասորդով), $\sqrt[3]{4}\approx 1{,}6$ (հավելորդով)։

1,6 թվի խորանարդն ավելի մոտ է 4-ին, քան 1,5 թվի խորանարդը՝ $4-3{,}375=0{,}625$, $4{,}096-4=0{,}096$, ուստի $\sqrt[3]{4}$-ի կլորացված արժեքը 0,1-ի ճշգրտությամբ հավասար է 1,6-ի։

Վարժություններ

746. Հետևյալ թվերի պակասորդով և հավելորդով մոտավոր արժեքները գրեցեք 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} ճշգրտությամբ.

ա) $\sqrt{6}\approx2{,}449490$, գ) $\pi\approx3{,}141593$,

բ) $\sqrt[3]{5}\approx1{,}709976$, դ) $\sqrt{\pi}\approx1{,}772454$։

747. Հետևյալ թվերը կլորացրեք 10^{-2} և 10^{-4} ճշգրտությամբ.

ա) $\sqrt{10}\approx3{,}162278$, գ) $\frac{1}{\pi}\approx0{,}318310$,

բ) $\sqrt[3]{9}\approx2{,}080084$, դ) $\pi^2\approx9{,}869604$։

§ 104. ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Հաշվումները հեշտացնելու համար ստեղծվել են հատուկ աղյուսակներ, որոնք պարունակում են, մասնավորապես, թվերը աստիճան բարձրացնելու կամ թվերից արմատ հանելու արդյունքներ։

Միջնակարգ դպրոցի համար նախատեսված է Վ. Մ. Բրադիսի «Քառանիշ մաթեմատիկական աղյուսակներ» գիրքը։

Օրինակների միջոցով ցույց տանք, թե ինչպես պետք է օգտվել մի քանի այդպիսի աղյուսակներից։

Քառակուսիների աղյուսակը պարունակում է 1,00-ից 9,99 թվերը՝ 0,01 քայլով։ Քառակուսիները հաշված են չորս իմաստալից թվանշաններով։

Օրինակներ։ $3{,}14^2=9{,}860$; $9{,}04^2=81{,}72$։

Եթե քառակուսի բարձրացվող x թիվն այնպիսին է, որ $1<x<10$ և պարունակում է 4 իմաստալից թվանշան, ապա 4-րդ թվանշանի համար նախատեսված է ուղղում։

Օրինակներ։

1) Գտնել $3{,}652^2$-ն։

Ունենք. $3{,}65^2=13{,}32$։ 2 թվանշանի համար ուղղումը հավասար է 1-ի, ուստի $3{,}652^2=13{,}32+0{,}01=13{,}33$.

2) Գտնել $5{,}629^2$-ն։

Ունենք՝ $5{,}63^2=31{,}70$։ 1-ի ուղղումը հավասար է 1-ի, ուստի $5{,}629^2=31{,}70-0{,}01=31{,}69$։

3) Գտնել $3{,}847^2$-ն։

$3{,}85^2=14{,}82$։ 3-ի ուղղումը հավասար է 2-ի. $3{,}847^2=14{,}82-0{,}02=14{,}80$։

Եթե $x>10$ կամ եթե $0<x<1$, ապա x թիվը նախապես բերում են ստանդարտ տեսքի (տես § 74)։

Օրինակներ։

1) $0{,}206^2=(2{,}06\cdot10^{-1})^2=2{,}06^2\cdot10^{-2}=4{,}244\cdot10^{-2}$,

2) $627^2=(6,27\cdot10^2)^2=6,27^2\cdot10^4=39,31\cdot10^4=3,931\cdot10^5$,

3) $0,003554^2=3,554^2\cdot10^{-6}=12,63\cdot10^{-6}=1,263\cdot10^{-5}$,

Քառակուսի արմատների աղյուսակը պարունակում է 1,00-ից 9,99 թվերը՝ 0,01 քայլով և 10,0-ից 99,9 թվերը՝ 0,1 քայլով։

Օրինակներ: $\sqrt{3,87}=1,967$, $\sqrt{8,03}=2,834$,

$\sqrt{28,1}=5,301$, $\sqrt{70,6}=8,402$,

Եթե x ենթարմատային թիվն այնպիսին է, որ $1,00\leqslant x\leqslant 99,9$ և պարունակում է չորս իմաստալից թվանշան, ապա 4-րդ թվանշանի համար նախատեսվում է ուղղում։

Օրինակ: *Գտնել* $\sqrt{8,342}$-ը։

Ունենք. $\sqrt{8,34}=2,888$։ *2-ի ուղղումը հավասար է 0-ի, ուստի* $\sqrt{8,342}=2,888+0=2,888$։

Եթե $x>100$ կամ $0<x<1$, ապա նախապես պետք է ենթարմատային թիվը ներկայացնել 1-ի և 100-ի միջև գտնվող թվի և 10^{2n}-ի արտադրյալի տեսքով (որտեղ n-ը դրական կամ բացասական ամբողջ թիվ է), և արմատ հանել յուրաքանչյուր արտադրյալից առանձին-առանձին։

Օրինակներ:

1) $\sqrt{708}=\sqrt{7,08\cdot10^2}=\sqrt{7,08}\cdot10=26,61$,

2) $\sqrt{0,0327}=\sqrt{3,27\cdot10^{-2}}=1,808\cdot10^{-1}=0,1808$,

3) $\sqrt{0,080368}\approx\sqrt{0,08037}=\sqrt{8,037\cdot10^{-2}}=2,834\cdot10^{-1}=0,2834$,

4) $\sqrt{0,0080368}\approx\sqrt{0,008037}=\sqrt{80,37\cdot10^{-4}}=8,965\cdot10^{-2}=$
$=0,08965$։

Խորանարդների աղյուսակը պարունակում է 1,000-ից 2,159 թվերը՝ 0,001 քայլով և 2,16-ից 9,99 թվերը՝ 0,01 քայլով։ Թվերի խորանարդները հաշված են 4 իմաստալից թվանշաններով։

Օրինակներ: 1) $1,903^3=6,892$, 3) $2,146^3=9,883$,

2) $6,06^3=222,5$, 4) $9,26^3=794,0$։

Աղյուսակում զետեղված են ուղղումներ խորանարդ բարձրացվող x թվի չորրորդ տասնորդական նիշի (հինգերորդ իմաստալից թվանշանի) համար, եթե $1,000<x<2,159$, և երրորդ տասնորդական նիշի (չորրորդ իմաստալից թվանշանի) համար, եթե $2,16<x<9,99$։

Օրինակներ: *1)* $2{,}1463^3 = 9{,}883 + 0{,}004 = 9{,}887$,

2) $2{,}1468^3 = 2{,}147^3 - 0{,}003 = 9{,}894$։

Եթե $x > 10$ *կամ* $0 < x < 1$, *ապա* x *թիվը նախապես բերում են ստանդարտ տեսքի։*

Օրինակներ:

1) $185{,}7^3 = (1{,}857 \cdot 10^2)^3 = 6{,}404 \cdot 10^6$,

2) $0{,}02043^3 = (2{,}043 \cdot 10^{-2})^3 = 8{,}527 \cdot 10^{-6}$,

3) $4527^3 = (4{,}527 \cdot 10^3)^3$; $4{,}527^3 = 4{,}53^3 - 0{,}19 = 92{,}77$; $4527^3 = 9{,}277 \cdot 10^{10}$։

Խորանարդների աղյուսակով կարելի է նաև որոշել 1-ից 1000 թվերի խորանարդ արմատները:

Օրինակներ:

1) $\sqrt[3]{89{,}31} \approx 4{,}47$,

2) $\sqrt[3]{89{,}49} = \sqrt[3]{89{,}31 + 0{,}18} = 4{,}47 + 0{,}003 = 4{,}473$,

3) $\sqrt[3]{89{,}59} = \sqrt[3]{89{,}31 + 0{,}28} \approx \sqrt[3]{89{,}31 + 0{,}30} = 4{,}47 + 0{,}005 = 4{,}475$,

4) $\sqrt[3]{89{,}82} = \sqrt[3]{89{,}92 - 0{,}10} \approx \sqrt[3]{89{,}92 - 0{,}12} = 4{,}48 - 0{,}002 = 4{,}478$։

Եթե $x > 1000$ *կամ* $0 < x < 1$, *ապա ենթարմատային* x *թիվը պետք է նախապես ներկայացնել 1-ի և 1000-ի միջև գտնվող թվի և* 10^{3n}*-ի արտադրյալի տեսքով (որտեղ* $n \in Z$*), և արմատ հանել յուրաքանչյուր արտադրյալից առանձին-առանձին։*

Օրինակներ:

1) $\sqrt[3]{5842} = \sqrt[3]{5{,}842 \cdot 10^3} = 1{,}801 \cdot 10 = 18{,}01$,

2) $\sqrt[3]{0{,}008632} = \sqrt[3]{8{,}632 \cdot 10^{-3}} = 2{,}0513 \cdot 10^{-1} = 0{,}20513$,

3) $\sqrt[3]{0{,}08632} = \sqrt[3]{86{,}32 \cdot 10^{-3}} \approx \sqrt[3]{86{,}35 \cdot 10^{-3}} = 0{,}442$։

Հակադարձ թվերի աղյուսակը ($\frac{1}{n}$ *տեսքի կոտորակների արժեքների աղյուսակը) պարունակում է 1,000-ից 1,799 թվերը՝ 0,001 քայլով և 1,80-ից 9,99 թվերը՝ 0,01 քայլով։*

Օրինակներ: *1)* $\frac{1}{1{,}308} = 0{,}7645$,   *3)* $\frac{1}{1{,}745} = 0{,}5731$,

2) $\frac{1}{7{,}04} = 0{,}1420$,   *4)* $\frac{1}{9{,}18} = 0{,}1089$։

Աղյուսակում զետեղված են ուղղումներ հայտարարի, այսինքն՝ n թվի չորրորդ տասնորդական նիշի (հինգերորդ իմաստալից թվանշանի) համար, երբ $1,000<n<1,799$, և երրորդ տասնորդական նիշի (չորրորդ իմաստալից թվանշանի) համար, երբ $1,80<n<9,99$։

Օ ր ի ն ա կ: $\frac{1}{1,7546}=0,5701-0,0002=0,5699$, Վեց տասնորդականի 2 ուղղումը հանվում է $\frac{1}{1,754}$ կոտորակի արժեքից, որովհետև $\frac{1}{1,7546}<\frac{1}{1,754}$։

Վարժություններ

Աղյուսակների միջոցով հետևյալ թվերը բարձրացրեք քառակուսի.

748. ա) 6,31; 3,62; 4,21, գ) 26,5; 52,7; 3,72,

բ) 7,93; 6,05; 8,25, դ) 42,56; 87,05; 24,22։

749. ա) 9,35; 7,07; 6,93, գ) 8,09; 2,72; 59,3,

բ) 3,15; 9,91; 4,78, դ) 5,829; 90,04; 72,56։

Աղյուսակների միջոցով քառակուսի արմատ հանեք հետևյալ թվերից։

750. ա) 6,29; 27,3; 367, գ) 521,3; 0,7062; 26,59,

բ) 4,27; 62,9; 195,4, դ) 12,34; 3,259; 4253։

751. ա) 2,35; 583; 75,3, գ) 362,1; 17,56; 0,5127,

բ) 7,53; 47,2; 683, դ) 92,36; 0,02315; 836,2։

Աղյուսակների միջոցով հետևյալ թվերը բարձրացրեք խորանարդ.

752. ա) 2,013; 3,27; 1,623, գ) 74,22; 5,127; 6,235,

բ) 41,2; 1,705; 2,25, դ) 8,629; 62,41; 0,7263։

753. ա) 1,257; 2,78; 1,427, գ) 23,52; 4,523; 5,735,

բ) 5,29; 2,142; 32,5, դ) 36,51; 7,253; 0,4721։

Աղյուսակների միջոցով խորանարդ արմատ հանեք հետևյալ թվերից։

754. ա) 4,21; 62,5; 365, գ) 672,3; 72,53; 8,353,

բ) 56,23; 5,623; 562,3, դ) 9362; 3987; 7564,

755. ա) 721; 45,7; 3,21, գ) 2,765; 276,5; 27,65,

բ) 362,1; 8,267; 60,52. դ) 8523; 9052; 4675։

Լուծեցեք խնդիրները․

756. ա) Գտեք խորանարդի կողի երկարությունը, եթե նրա ծավալը հավասար է 1950 սմ^3-ի։

բ) Գտեք գնդի տրամագծի երկարությունը, եթե նրա ծավալը հավասար է 1370 սմ^3-ի $\left(V=\frac{1}{6}\pi D^3\right)$, $\pi\approx3{,}14$։

757. ա) Գնդի ծավալը հավասար է 500 սմ^3-ի։ Գտեք նրա շառավղի երկարությունը $\left(V=\frac{4}{3}\pi R^3\right)$, $\pi\approx3{,}14$։

բ) Խորանարդի ծավալը հավասար է 950 սմ^3-ի։ Գտեք նրա կողի երկարությունը։

§ 105. ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ ՀԱՇՎԵՔԱՆՈՆԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Հաշվեքանոնի կառուցվածքին մենք ծանոթացել ենք VI գլխում։ Հենց այնտեղ էլ բացատրվել է, թե քանոնի միջոցով ինչպես են կատարվում թվերի բազմապատկումն ու բաժանումը։ Այստեղ կվերլուծենք թվերը քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնելու, ինչպես նաև թվերից քառակուսի կամ խորանարդ արմատ հանելու գործողությունները։

Թիվը քառակուսի բարձրացնելու համար պետք է նրա թվանշանային կազմը դիտագծի միջոցով տեղադրել (D) հիմնական սանդղակի վրա և դիտագծի դիմաց (A) քառակուսիների սանդղակի վրա կարդալ պատասխանի թվանշանային կազմը։

Պատասխանի ամբողջ մասի թվանշանների քանակը, այսինքն՝ստորակետի տեղը, որոշվում է մոտավոր հաշվումներով։

Դիտարկենք մի քանի օրինակ։

1) Քառակուսի բարձրացնենք 2,25 թիվը։ Դրա համար քանոնի հիմնական սանդղակի վրա դիտագծի միջոցով նշենք թվի թվանշանային կազմը. 2—2—5 (երկու մեծ բաժանում, երկու միջին և երկուսուկես՝ փոքր)։ Դիտագծի դիմաց քառակուսիների սանդղակի վրա կարդանք պատասխանի թվանշանային կազմը՝ 5—0—6։ Կատարենք մոտավոր հաշվում՝ $2{,}25\approx2{,}2^2=4$, այսինքն՝ պատասխանի ամբողջ մասում պետք է լինի մեկ թվանշան։ Հետևաբար $2{,}25^2=5{,}06$։

2) Հաշվենք $67{,}2^2$-ն։ Քանի որ $67{,}2\approx70$, $70^2=4900$, ուստի պատասխանի ամբողջ մասում պետք է լինի չորս նիշ՝ $67{,}2^2=4520$։

3) Հաշվենք $0{,}0392^2$-ն։ Քանի որ $0{,}0392\approx0{,}04$; $0{,}04^2=0{,}0016$, ապա $0{,}0392^2\approx0{,}00154$։

Դիտարկենք ավելի բարդ օրինակ։ Քառակուսի բարձրացնենք 32,4 թիվը։ Հիմնական սանդղակի վրա նշելով թվանշանային կազմը՝ 3—2—4,

կարդում ենք՝ 1—0—5։ Հաշվենք մո- քառակուսիների սանդղակի վրա կարդում ենք 1—0—5։ Հաշվենք մո- քառակուսիների սանդղակի վրա կարդում ենք

տավորապես՝ $32,4 \approx 30$; $30^2 = 900$։ Այս թիվն ունի երեք նիշ, առաջինը 9 թվանշանն է (ինը հարյուր)։ Քանոնի վրա ստացված պատասխանի թվա- նշանային կազմում առաջին տեղում 1 թվանշանն է, բայց դա մեկ հար- յուր չէ, այլ տասը հարյուր, այսինքն՝ հազար, քանի որ մոտավոր հաշ- վումը ցույց է տալիս, որ որոնելի թիվը պետք է 900-ից մեծ լինի։ Այս- պիսով, պատասխանում պետք է լինի չորս թվանշան՝ $32,4^2 = 1050$։

Այժմ դիտարկենք թվի խորանարդ բարձրացնելը։ Օրինակ, խորա- նարդ բարձրացնենք 1,95 թիվը։ Իրանի հիմնական սանդղակի վրա դի- տագծով նշենք նրա թվանշանային կազմը՝ 1—9—5։ Դիտագծի դիմաց խորանարդների սանդղակի վրա կարդանք պատասխանի թվանշանային կազմը՝ 7—4—0։ Հաշվենք մոտավորապես՝ $1,95 \approx 2$, $2^3 = 8$, հետևաբար պատասխանի ամբողջ մասն ունի մեկ նիշ։ Այսպիսով, $1,95^3 = 7,4$։

Հաշվեքանոնով քառակուսի կամ խորանարդ արմատ հանելիս պետք է համապատասխանաբար քառակուսիների կամ խորանարդների սանդ- ղակի վրա դիտագծով նշել ենթարմատային թվի թվանշանային կազմը, իսկ այնուհետև դիտագծի դիմաց հիմնական սանդղակի վրա կարդալ պատասխանի թվանշանային կազմը։

Դա ավելի մանրամասն դիտարկենք օրինակների միջոցով, բայց մինչ այդ ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, թե ինչպես են կա- ռուցված քառակուսիների և խորանարդների սանդղակները։ Քառակուսի- ների սանդղակը կազմված է երկու միանման՝ աջ և ձախ մասերից։ Այդ մասերից յուրաքանչյուրը իրենից ներկայացնում է հաշվեքանոնի հիմ- նական սանդղակը՝ փոքրացված երկու անգամ։ Խորանարդների սանդղա- կը կազմված է երեք միանման մասերից, որոնցից յուրաքանչյուրը քա- նոնի հիմնական սանդղակն է՝ փոքրացված երեք անգամ։

Վերլուծենք թվերից քառակուսի արմատ հանելու գործողություննե- րը։ Քառակուսիների սանդղակի վրա կարելի է նշել այնպիսի թիվ, որի թվանշանային կազմի նիշերի թիվը մեծ չէ երեքից։ Ուստի ենթարմատա- յին թիվը պետք է գրել ամբողջ մասում մեկ կամ երկու թվանշան ունեցող թվի և 10^{2n}-ի արտադրյալի տեսքով, որտեղ $n = 0, \pm 1, \pm 2$ և այլն։ 10^{2n} արտադրիչի առջևում գրված թիվը պետք է կլորացնել այնպես, որ այն ամբողջ և կոտորակային մասերում միասին վերցրած պարունակի երեքից ոչ ավելի նիշ։ Այդ երեք նիշերն էլ հենց նշվում են քառակուսի- ների սանդղակի վրա։

Եթե ձևափոխված ենթարմատային թվի ամբողջ մասը պարունա- կում է մեկ նիշ, ապա թվի թվանշանային կազմը նշվում է քառակուսինե- րի ձախ մասում, իսկ եթե պարունակում է երկու նիշ, ապա՝ աջ մասում։

Որպես պատասխան վերցվում է ամբողջ մասում մեկ նիշ պարու- նակող թվի և 10^n-ի արտադրյալը։

Օրինակ 1: *Քառակուսի արմատ հանել 45326 թվից։*

$$\sqrt{45326}=\sqrt{4,5326\cdot10^4}\approx\sqrt{4,53}\cdot10^2,$$

Տրված թիվը $45,326\cdot10^3$ տեսքով ներկայացնել չի կարելի, քանի որ 10 թվի աստիճանացույցը պետք է լինի զույգ թիվ։

Քառակուսիների սանդղակի ձախ մասում նշում ենք 4—5—3 և հիմնական սանդղակի վրա կարդում պատասխանի թվանշանային կազմը՝ 2—1—3։ Այսպիսով,

$$\sqrt{4,53}\cdot10^2=2,13\cdot10^2=213,\quad \sqrt{45326}\approx213.$$

Օրինակ 2: *Քառակուսի արմատ հանել 453260 թվից։*

$$\sqrt{453260}=\sqrt{45,3260\cdot10^4}\approx\sqrt{45,3}\cdot10^2.$$

Քառակուսիների սանդղակի աջ մասում նշում ենք 4—5—3 և հիմնական սանդղակի վրա կարդում պատասխանի թվանշանային կազմը՝ 6—7—3։ Ստանում ենք.

$$\sqrt{45,3}\cdot10^2=6,73\cdot10^2=673,\quad \sqrt{453260}\approx673.$$

Օրինակ 3: *Քառակուսի արմատ հանել 0,008368 թվից։*

$$\sqrt{0,008368}=\sqrt{83,68\cdot10^{-4}}\approx\sqrt{83,7}\cdot10^{-2}$$

Քառակուսիների սանդղակի աջ մասում նշում ենք 8—3—7 և հիմնական սանդղակի վրա կարդում՝ 9—1—5։

Ստացվում է հետևյալ պատասխանը $\sqrt{83,7}\cdot10^{-2}=9,15\cdot10^{-2}=$ $=0,0915,\ \sqrt{0,008368}\approx0,0915.$

Անցնենք թվերից խորանարդ արմատ հանելու հարցին։

Խորանարդների սանդղակի վրա, ինչպես և քառակուսիների սանդղակի վրա կարելի է տեղադրել երեքից ոչ ավելի նիշ պարունակող թվանշանային կազմ ունեցող թվերը։ Ուստի ենթարմատային թիվը հարկ է գրել ամբողջ մասում մեկ, երկու կամ երեք թվանշան ունեցող թվի և 10^{3n} արտադրիչի արտադրյալի տեսքով, որտեղ $n=0,\ \pm1,\ \pm2$ և այլն։ 10^{3n} արտադրիչի առջևում գտնվող թիվը պետք է կլորացնել այնպես, որ այն ամբողջ և կոտորակային մասերում միասին վերցրած պարունակի երեքից ոչ ավելի նիշ, որոնք էլ հենց նշվում են խորանարդների սանդղակի վրա։

Եթե ձևափոխված ենթարմատային թվի ամբողջ մասը պարունակում է մեկ նիշ, ապա ստացված երեք նիշերը տեղադրվում են խորանարդների սանդղակի ձախ մասում, եթե պարունակում է երկու նիշ, ապա միջին մասում, իսկ եթե երեք նիշ, ապա աջ մասում։

Պատասխանում ստացվում է ամբողջ մասում միայն մեկ նիշ պարունակող թվի և 10^n-ի արտադրյալը։

Օ ր ի ն ա կ 4: *Խորանարդ արմատ հանել 2640 թվից։*

$$\sqrt[3]{2640}=\sqrt[3]{2,640\cdot 10^3}=\sqrt[3]{2,64}\cdot 10։$$

Խորանարդների սանդղակի ձախ մասում նշում ենք 2—6—4 և հիմնական սանդղակի վրա կարդում՝ 1—3—8։

Այսպիսով, $\sqrt[3]{2640}=1,38\cdot 10=13,8$։

Օ ր ի ն ա կ 5: *Խորանարդ արմատ հանել 26402 թվից։*

$$\sqrt[3]{26402}=\sqrt[3]{26,402\cdot 10^3}\approx\sqrt[3]{26,4}\cdot 10։$$

Խորանարդների սանդղակի միջին մասում նշում ենք 2—6—4 և հիմնական սանդղակի վրա կարդում՝ 2—9—8։

Այսպիսով, $\sqrt[3]{26402}\approx 2,98\cdot 10=29,8$։

Օ ր ի ն ա կ 6: *Խորանարդ արմատ հանել 264021 թվից։*

$$\sqrt[3]{264021}=\sqrt[3]{264,021\cdot 10^3}\approx\sqrt[3]{264}\cdot 10։$$

Խորանարդների սանդղակի աջ մասում նշում ենք 2—6—4 և հիմնական սանդղակի վրա կարդում՝ 6—4—2։

Ուստի՝ $\sqrt[3]{264\,021}\approx 6,42\cdot 10\cdot 64,2$։

Օ ր ի ն ա կ 7: *Խորանարդ արմատ հանել 2640213 թվից։*

$$\sqrt[3]{2640\,213}=\sqrt[3]{2,640213\cdot 10^6}\approx\sqrt[3]{2,64}\cdot 10^2,$$

$$\sqrt[3]{2,64}\cdot 10^2=1,38\cdot 10^2=138։$$

Օ ր ի ն ա կ 8: *Խորանարդ արմատ հանել 0,08632 թվից։*

$$\sqrt[3]{0,08632}=\sqrt[3]{86,32\cdot 10^{-3}}\approx\sqrt[3]{86,3}\cdot 10^{-1},$$

$$\sqrt[3]{86,3}\cdot 10^{-1}=4,42\cdot 10^{-1}=0,442։$$

Վարժություններ

Հաշվումները ստուգեցեք հաշվեքանոնով.

758. *ա)* $15,5^2=240$; $6,71^2=45,0$; $0,531^2=0,282$,

բ) $6,12^2=37,5$; $4,24^2=18,0$; $39,5^2=1560$,

գ) $0,56^2=0,314$; $0,886^2=0785$; $7,61^2=57,9$,

դ) $0,351^2=0,123$; $265^2=7,02$; $9,29^2=86,3$։

759. ա) $7,95^2=63,2$; $71,2^2=5070$; $4,37^2=19,1$,

բ) $3,95^2=15,6$; $4, 5^2=23,5$; $13,5^2=182$,

գ) $84,2^2=7090$; $30,9^2=955$; $9,95^2=99,0$,

դ) $0,211^2=0,0445$; $969^2=939\,000$; $17,8^2=317$։

Հետևյալ թվերը քառակուսի բարձրացրեք հաշվեքանոնով.

760. ա) 3,27; 12,4; 0,608; 0,0452,

բ) 5,24; 93,4; 0,421; 0,0623,

գ) 2,61; 41,5; 0,376; 0,0567,

դ) 9,25; 23,7; 0,585; 0,01745։

761. ա) 4,36; 68,5; 0,883; 0,0792,

բ) 1,03; 36,8; 0,725; 0,0268,

գ) 6,28; 74,3; 0,272; 0,0925,

դ) 8,05; 52,3; 0,0307; 0,1123։

Հաշվումները ստուգեցեք հաշվեքանոնով.

762. ա) $\sqrt{8,2}=2,86$; $\sqrt{60,2}=7,76$, $\sqrt{0,0182}=0,135$,

բ) $\sqrt{1,98}=1,407$; $\sqrt{1980}=44,5$; $\sqrt{41,3}=6,43$

գ) $\sqrt{40,3}=6,35$; $\sqrt{398}=19,95$; $\sqrt{3,65}=1,91$,

դ) $\sqrt{39,7}=6,30$; $\sqrt{0,829}=0,910$; $\sqrt{6,31}=2,51$։

763. ա) $\sqrt{0,0029}=0,0539$; $\sqrt{43,5}=6,6$; $\sqrt{2,37}=1,54$,

բ) $\sqrt{4910}=70,1$; $\sqrt{412}=20,3$; $\sqrt{0,0105}=0,1025$,

գ) $\sqrt{480}=21,9$; $\sqrt{0,631}=0,794$; $\sqrt{3540}=59,5$,

դ) $\sqrt{895}=29,9$; $\sqrt{0,82}=0,905$; $\sqrt{354}=18,8$։

Հետևյալ թվերից քառակուսի արմատ հանեցեք հաշվեքանոնով.

764. ա) 53,7; 3,25; 0,0777; 265 900,

բ) 27,6; 6,21; 0,129; 56 273,

գ) 85,4; 5,62; 0,235; 72 535,

դ) 62,8; 7,52; 0,0452; 126 421։

765. ա) 32,5; 2,54; 0,0525; 421 625,

բ) 79,2; 8,12; 0,0364; 0,42105,

գ) 48,4; 4,84; 0,805; 67 234,

դ) 96,2; 1,36; 0,634; 34 574։

Հաշվումները ստուգեցեք հաշվեքանոնով.

766. ա) $1{,}71^3=5{,}0$; $9{,}51^3=860$; $4{,}58^3=96$,

բ) $2{,}52^3=16{,}0$; $1{,}89^3=6{,}75$; $5{,}04^3=128$,

գ) $8{,}34^3=580$; $3{,}11^3=30{,}1$; $2{,}14^3=9{,}8$,

դ) $4{,}16^3=72$; $7{,}83^3=480$; $1{,}84^3=6{,}23$։

767. ա) $7{,}37^3=400$; $1{,}78^3=5{,}64$; $2{,}76^3=21$,

բ) $1{,}94^3=7{,}3$; $9{,}36^3=820$; $2{,}22^3=10{,}9$,

գ) $6{,}35^3=256$; $2{,}05^3=8{,}6$; $3{,}66^3=49$,

դ) $3{,}43^3=40$; $5{,}54^3=170$; $1{,}95^3=7{,}4$։

Հետևյալ թվերը խորանարդ բարձրացրեք հաշվեքանոնով.

768. ա) 1,02; 5,62; 4,23, գ) 3,26; 7,23; 1,93,

բ) 6,87; 2,05; 2,23, դ) 8,03; 1,68; 2,65;

769. ա) 9,12; 4,07; 1,52, գ) 5,78; 1,63; 4,17,

բ) 3,15; 1,14; 7,94, դ) 4,52; 6,24; 1,38։

Հաշվեքանոնով ստուգեցեք հետևյալ հաշվումները.

770. ա) $\sqrt[3]{500}=7{,}94$, $\sqrt[3]{9}=2{,}08$,

բ) $\sqrt[3]{7{,}3}=1{,}94$, $\sqrt[3]{100}=4{,}65$,

գ) $\sqrt[3]{200}=5{,}85$, $\sqrt[3]{84}=4{,}38$,

դ) $\sqrt[3]{20}=2{,}71$, $\sqrt[3]{840}=9{,}44$.

771. ա) $\sqrt[3]{19}=2{,}67$, $\sqrt[3]{5{,}5}=1{,}76$,

բ) $\sqrt[3]{8{,}5}=2{,}04$, $\sqrt[3]{300}=6{,}69$,

գ) $\sqrt[3]{700}=8{,}88$, $\sqrt[3]{96}=4{,}58$,

դ) $\sqrt[3]{5{,}9}=1{,}81$, $\sqrt[3]{162}=5{,}45$;

Հաշվեքանոնով խորանարդ արմատ հանեցեք հետևյալ թվերից.

772. ա) 23,5; 4,21; 7,36, գ) 256; 6,05; 57,8,

բ) 6,73; 705; 36,5, դ) 30,7; 295; 8,71։

773. ա) 46,2; 805; 2,87, գ) 72,4; 9,63; 478,

բ) 5,21; 32,5; 927, դ) 8,05; 563; 62,5։

§ 106. ԳԱՂԱՓԱՐ ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հիշեցնենք, որ ռացիոնալ թիվը դա այն թիվն է, որը կարելի է ներկայացնել $\frac{m}{n}$ *սովորական կոտորակի տեսքով, որտեղ* m-*ը ամբողջ թիվ է (դրական, զրո կամ բացասական), իսկ* n-*ը՝ բնական.* $m \in Z$, $n \in N$։ *Այդպիսին են, օրինակ,* $\frac{-2}{1}$, $\frac{-3}{8}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{9}{2}$ *թվերը։ Բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմությունը մենք նշանակել ենք* Q *տառով (տես § 21)։*

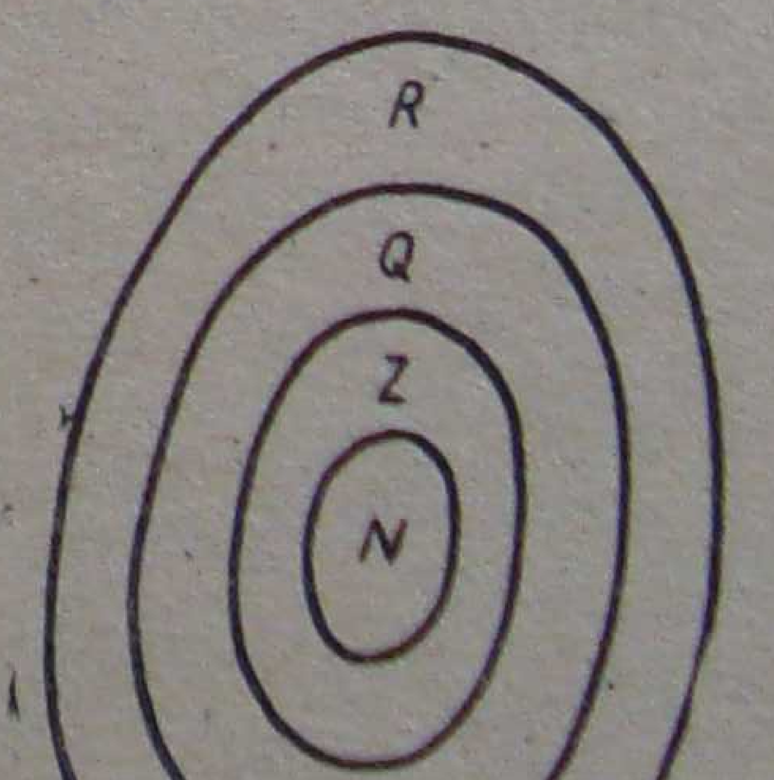
Ապացուցվել է, որ գոյություն ունեն թվեր, որոնք չեն կարող ներկայացվել սովորական կոտորակի տեսքով, օրինակ, $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{20}$, *թվերը, ուստի դրանք ռացիոնալ թվեր չեն։ Դրանք նոր տիպի թվերի՝ իռացիոնալ թվերի օրինակներ են։*

Բերենք ևս երկու օրինակ։ Քառակուսու անկյունագծի երկարության և կողմի երկարության հարաբերությունը, եթե դրանք արտահայտված են միևնույն միավորներով, իռացիոնալ թիվ է։ Շրջանագծի երկարության հարաբերությունը տրամագծի երկարությանը նույնպես իռացիոնալ թիվ է, այն նշանակվում է π *տառով՝* $\pi \approx 3,14$։

Բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմության և բոլոր իռացիոնալ թվերի բազմության միավորումը կազմում է իրական թվերի բազմությունը: *Այն նշանակվում է* R *տառով՝* $R =]-\infty; +\infty[$։

Դիցուք M-*ը ինչ-որ* A *բազմության* որևէ ենթաբազմություն է։ M բազմության լրացում մինչև A բազմությունը կոչվում է A բազմության բոլոր այն տարրերի բազմությունը, որոնք չեն պատկանում M բազմությանը:

Այլ կերպ ասած, եթե $M \subset A$, *ապա* M-*ի լրացում մինչև* A *կոչվում է այն* x *տարրերի բազմությունը, որոնք* $x \in A$, $x \notin M$։

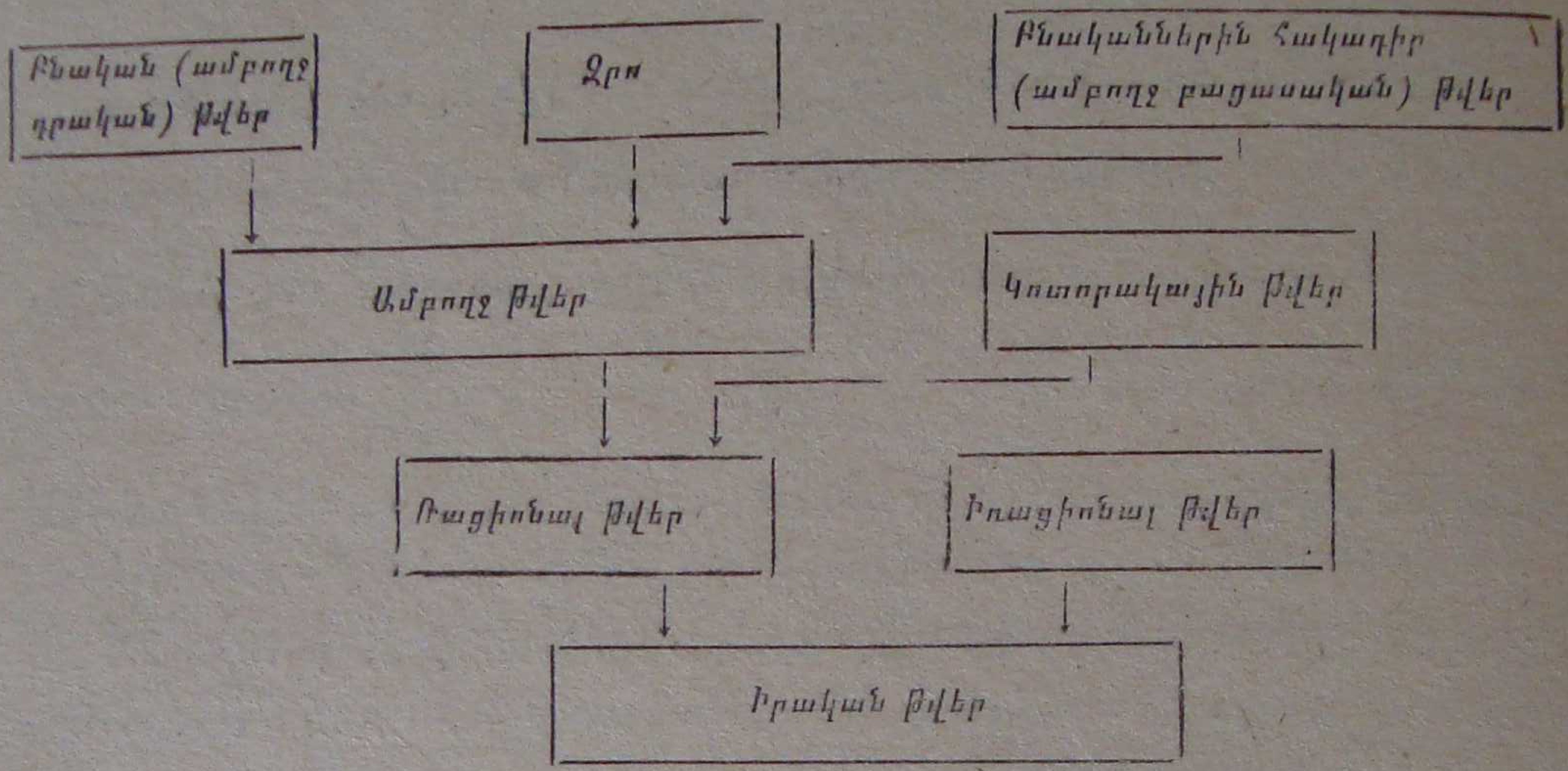


Նկ. 124

Իրական թվերի բազմության հիմնական ենթաբազմությունների համար տեղի ունի $N \subset Z \subset Q \subset R$ առնչությունը (նկ. 124), Այստեղ N-ը, Z-ը, Q-ն և R-ը համապատասխանաբար բոլոր բնական, ամբողջ, ռացիոնալ և իրական թվերի բազմություններն են։

Z-ի լրացումը մինչև Q բոլոր դրական և բացասական կոտորակային թվերի բազմությունն է։ Q-ի լրացումը մինչև R բոլոր դրական և բացասական իռացիոնալ թվերի բազմությունն է։

Իրական թվերի բազմության կառուցվածքը երևում է հետևյալ սխեմայից.



Իրական թվերի բազմության համար ճիշտ են հետևյալ երկու պնդումները. Կոորդինատային ուղղի յուրաքանչյուր M կետի համապատասխանում է որոշակի x իրական թիվ՝ M կետի կոորդինատը: Եվ հակադարձը. յուրաքանչյուր x իրական թվի համապատասխանում է որոշակի M կետ, որի կոորդինատը հավասար է x-ի:

Այսպիսով, կոորդինատային ուղղի յուրաքանչյուր կետ ունի կոորդինատ (որը իրական թիվ է՝ ռացիոնալ կամ իռացիոնալ), և յուրաքանչյուր իրական թիվ կոորդինատային ուղղի որևէ կետի կոորդինատ է, այսինքն՝ պատկերվում է այդ ուղղի որևէ կետի տեսքով:

Վարժություններ

774. Միլիմետրական թղթի վրա կառուցեք $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և վերջինիս միջոցով գտեք $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$ արմատների մոտավոր արժեքները։

775. Միլիմետրական թղթի վրա կառուցեք $y = x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և վերջինիս միջոցով գտեք $\sqrt[3]{y}$, $\sqrt[3]{5}$ $\sqrt[3]{7}$ արմատների մոտավոր արժեքները։

Ինքնուրույն աշխատանք № 17

1. Արմատների արտադրյալը ձևափոխեցեք արտադրյալի արմատի.

$$\sqrt[4]{a^3b^2} \cdot \sqrt[5]{a^4c^3} \cdot \sqrt[12]{b^{10}c^9} \quad (a,b,\ c>0);$$

2. Հետևյալ արտահայտությունը ներկայացրեք միանդամի արմատի տեսքով.

$$\sqrt[6]{a^4\sqrt[7]{a^2}},$$

2. Աղյուսակների միջոցով հաշվեցեք հետևյալ թվերը.

ա) խորանարդները՝ 3,521; 1,123; 7,934,

բ) քառակուսի արմատները՝ 42,53; 8,765; 425,3։

4. Ապացուցեք $(a+b)^2 \leqslant 4(a^2-ab+b^2)$ անհավասարությունը։

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ի՞նչն է կոչվում թվի n-րդ աստիճանի արմատ։ Քանի՞ արժեք ունի դրական թվի զույգ աստիճանի արմատը։ Քանի՞ արժեք ունի թվի կենտ աստիճանի արմատը։

2. Ինչպիսի՞ ֆունկցիան է կոչվում տրված բազմության վրա աճող (կամ նվազող)։ (Դիտարկեցեք x^2 և x^3 ֆունկցիաները։)

3. Կառուցեք $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները և նշեցեք դրանցից յուրաքանչյուրի որոշման և արժեքների տիրույթները։

4. Կառուցեք $y=x^3$ և $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները և նշեցեք դրանցից յուրաքանչյուրի որոշման և արժեքների տիրույթները։

5. Պատմեցեք $y=x^2$ և $y=x^3$ ֆունկցիաների գրաֆիկների սիմետրիայի մասին։

6. Ապացուցեք $\sqrt{x^2}=|x|$ նույնությունը։

7. Ապացուցեք միևնույն բնական ցուցիչներն ունեցող երկու հավասար աստիճանների վերաբերյալ լեմման։

8. Ապացուցեք թվաբանական արմատի հիմնական հատկությունը։

9. Ապացուցեք թվաբանական արմատները բազմապատկելու վերաբերյալ թեորեմը։

10. Ապացուցեք արմատից արմատ հանելու վերաբերյալ թեորեմը։

11. Պատմեցեք Վ. Մ. Բրադիսի գրքում զետեղված քառակուսիների աղյուսակի և քառակուսի արմատների աղյուսակի կառուցվածքի մասին։

12. Հաշվեքանոնի միջոցով ինչպե՞ս գտնել թվի քառակուսին կամ քառակուսի արմատը։

13. Հաշվեքանոնի միջոցով ինչպե՞ս գտնել թվի խորանարդը կամ խորանարդ արմատը։

14. Ապացուցեք երկու դրական թվերի թվաբանական միջինի և երկրաչափական միջինի կապի վերաբերյալ թեորեմը։

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§ 107. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ: ՄԱՍՆԱՎՈՐ ԴԵՊՔԵՐ

Մենք անցնում ենք ութամյա դպրոցի հանրահաշվի դասընթացի կարևոր թեմաներից մեկի ուսումնասիրությանը։

Սահմանում։ Քառակուսի հավասարում (մեկ փոփոխականով երկրորդ կարգի հավասարում) կոչվում է

$$ax^2+bx+c=0$$

տեսքի հավասարումը, որտեղ x-ը փոփոխական է, իսկ a-ն, b-ն, c-ն՝ ցանկացած թվեր, ընդ որում $a\neq 0$։

a և b թվերը համապատասխանաբար կոչվում են քառակուսի հավասարման ավագ (առաջին) և միջին (երկրորդ) գործակիցներ, իսկ թիվը՝ ազատ անդամ։

Եթե $a=1$, ապա հավասարումը կոչվում է բերված տեսքի։ Այդպիսի տեսքի կարելի է բերել ցանկացած քառակուսի հավասարումը։ Դրա համար պետք է հավասարման երկու մասերը անդամ առ անդամ բաժանել a-ի ($a\neq 0$)։ Կստանանք՝ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$։ Եթե կատարենք այսպիսի նշանակումներ՝ $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, ապա բերված հավասարումը կարելի է գրել ավելի պարզ ձևով.

$$x^2+px+q=0։$$

Օրինակների միջոցով դիտարկենք $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) քառակուսի հավասարման երեք մասնավոր դեպք։

1) Եթե $b=c=0$, ապա հավասարումն ընդունում է $ax^2=0$ տեսքը։

Օրինակ 1։ *Լուծել $7x^2=0$ հավասարումը։ Ունենք՝ $x^2=0$։ Այս հավասարումն ունի մեկ արմատ՝ $x=0$, այսինքն՝ արմատների բազմությունը պարունակում է միայն մեկ տարր՝ $\{0\}$։*

2) Եթե $b=0$, $c\neq 0$, ապա հավասարումն ընդունում է $ax^2+c=0$ տեսքը։

Օրինակ 2։ *Լուծել $3x^2-27=0$ հավասարումը։*

Ունենք՝ $x^2-9=0$, $x^2=9$, $x=\pm\sqrt{9}=\pm3$, $x_1=-3$, $x_2=3$,
Արմատների բազմությունն է՝ $\{-3;\ 3\}$,

Օրինակ 3: Լուծել $5x^2+45=0$ հավասարումը։

Ունենք՝ $x^2+9=0$։ x փոփոխականի ոչ մի արժեքի դեպքում x^2+9 գումարը չի կարող ընդունել 0 արժեք, ուստի հավասարումն արմատ չունի։ Արմատների բազմությունն է՝ $\varnothing$։

3) Եթե $b\neq0$, $c=0$, ապա հանգում ենք $ax^2+bx=0$, $x(ax+b)=0$ տեսքի հավասարման։

Օրինակ 4: Լուծել $8x^2+12x=0$ հավասարումը։

Ունենք՝ $2x^2+3x=0$, $x(2x+3)=0$։

Այս հավասարման արմատները x փոփոխականի բոլոր այն արժեքներն են, որոնք զրո են դարձնում կամ x կամ $2x+3$ արտադրիչը։ Առաջին արտադրիչը զրո է դառնում $x=0$ դեպքում, իսկ երկրորդը՝ $x=-1,5$ դեպքում։ Այս երկու թվերն էլ տրված հավասարման արմատներն են։

Պատասխան. $\{0;\ -1,5\}$

$ax^2=0$, $ax^2+bx=0$, $ax^2+c=0$ տեսքի հավասարումները կոչվում են **թերի քառակուսի հավասարումներ:**

Վարժություններ

Լուծեցեք հետևյալ հավասարումները.

776. ա) $x^2=3x$, գ) $2x^2-18=0$,
բ) $x^2-5x=0$, դ) $3x^2+27=0$։

777. ա) $3a^2-5a=2a^2-3a$, գ) $2t^2+5t=3t^2+9t$,
բ) $4y^2+7y=3y^2+4y$, դ) $7z^2-5z=6z^2-2z$։

778. ա) $6y^2+3y=7y^2+3y+16$, գ) $8t^2+3t=6t^2+11t$,
բ) $9x^2-7y=8x^2-5x$, դ) $5z^2-7z=8z^2-7z-60$։

779. ա) $(5y+3)^2-(2y-7)^2=8(y^2-5)$,
բ) $(7+6a)^2=37(2+a)+(5+2a)(2a-5)$,
գ) $(3x+5)^2-(3-2x)^2=(x+4)^2$,
դ) $(5a+7)(a+2)+(a-3)\left(\frac{14}{3}+4a\right)=0$։

780. ա) $(6a+7)(6a-7)+(2a-5)^2=(a-10)^2+32$,
բ) $(y-4)^3+3y^2=y^3-(2y+8)^2$,
գ) $(x+2)^3+46=(3+x)^3-15x$,
դ) $(5+2x)^2-44x=(4x-3)^2+4$,

781. ա) $(2x-3)^2+65=(5-x)^2+(7-3x)(3x+7)$,

բ) $(2+3a)^3-5a=(3a+3)^3-19$,

գ) $(3+5x)(5x-3)+(2-3x)^2=16+(3-2x)^2$

դ) $(2x-3)^3+5x^2=(1+2x)^3-28$։

§ 108. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

Նախորդ պարագրաֆում մենք դիտարկեցինք $ax^2+bx+c=0$ *քառակուսի հավասարման մասնավոր դեպքեր, երբ* a *և* b *գործակիցներից մեկը կամ երկուսն էլ զրո են դառնում* ($a\neq 0$)։ *Այժմ քննարկենք ընդհանուր դեպքը, երբ* b *և* c *գործակիցները կարող են ընդունել ցանկացած արժեքներ (այդ թվում նաև զրոյական)։*

Ս ա հ մ ա ն ու մ: $ax^2+bx+c=0$ հավասարման տարբերիչ (դիսկրիմինանտ) կոչվում է b^2-4ac տարբերությունը:

Թ ե ո ր ե մ: Եթե քառակուսի հավասարման D տարբերիչը բացասական թիվ է, ապա հավասարումն արմատներ չունի: Եթե տարբերիչը հավասար է զրոյի, ապա հավասարումն ունի մեկ արմատ: Եթե տարբերիչը դրական թիվ է, ապա հավասարումն ունի երկու արմատ:

Ա պ ա ց ու ց ու մ։ Տրված է

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0) \tag{1}$$

հավասարումը։ Նրա երկու մասերը անդամ առ անդամ բազմապատկելով 4a-ով, կստանանք.

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$

Այնուհետև.

$$4a^2x^2+4abx+4ac=(2ax+b)^2-(b^2-4ac),$$

$$(2ax+b)^2-(b^2-4ac)=0,$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac; \tag{2}$$

Հնարավոր է երեք դեպք.

1) $D<0$, $b^2-4ac<0$։

(2) հավասարման ձախ մասը երկանդամի քառակուսի է, ուստի x *փոփոխականի ոչ մի արժեքի դեպքում այն չի կարող ընդունել բացասական արժեքներ։ Բայց (2) հավասարման աջ մասը բացասական է ըստ պայմանի։ Հետևաբար,* x *փոփոխականի ոչ մի արժեքի դեպքում (2) հավասարումը չի վերածվում ճիշտ թվային հավասարության, այսինքն՝ (2) հավասարումը և, ուրեմն, նաև (1) հավասարումը արմատներ չունի։*

գ) $D=0$, $b^2-4ac=0$։

(2) հավասարումն ընդունում է $(2ax+b)^2=0$ տեսքը։ Այս հավասարումը և, հետևաբար, (1) հավասարումն ունի մեկ արմատ՝ $x=-\frac{b}{2a}$։

3) $D>0$, $b^2-4ac>0$։

Քանի որ $b^2-4ac>0$, ապա $\sqrt{b^2-4ac}$ արտահայտությունն իմաստ ունի։ Ուստի կարելի է գրել (տես § 97).

$$b^2-4ac=(\sqrt{b^2-4ac})^2,$$

(2) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$(2ax+b)^2=(\sqrt{b^2-4ac})^2,$$

$$(2ax+b^2)-(\sqrt{b^2-4ac})^2=0, \text{ կամ}$$

$$(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac})(2ax+b-\sqrt{b^2-4ac})=0։$$

Հերթով զրոյի հավասարեցնելով յուրաքանչյուր արտադրիչը, կստանանք՝

$$2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}=0, \quad x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}=0, \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}։$$

(2) հավասարումը, ինչպես նաև սկզբնական (1) հավասարումն ունեն երկու արմատներ, որոնք հակիրճ կարելի է գրել այսպես.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad (3)$$

Թեորեմն ապացուցված է։

Արմատների ստացված հիմնական (3) բանաձևը ձևակերպենք բառերով. **քառակուսի հավասարման արմատները հավասար են մի կոտորակի, որի համարիչը հավասար է միջին գործակցին՝ վերցրած հակադիր նշանով, պլյուս-մինուս (±) այդ գործակցի քառակուսու և ավագ գործակցի ու ազատ անդամի քառապատիկ արտադրյալի տարբերության քառակուսի արմատը, իսկ հայտարարը հավասար է ավագ գործակցի կրկնապատիկին։**

Եթե քառակուսի հավասարումն ունի $ax^2+2b_1x+c=0$ տեսքը, այսինքն, եթե միջին գործակիցը զույգ թիվ է, ապա արմատների բանաձևը

ընդունում է հաշվումների համար բավական հարմար տեսք.

$$x=\frac{-2b_1\pm\sqrt{4b_1^2-4ac}}{2a}=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-ac}}{a},$$

Եթե քառակուսի հավասարման միջին գործակիցը զույգ թիվ է, ապա նրա արմատները հավասար են մի կոտորակի, որի համարիչը հավասար է միջին գործակցի կեսին՝ վերցրած հակադիր նշանով, պլյուս-մինուս (±) այդ կեսի քառակուսու և ավագ գործակցի ու ազատ անդամի արտադրյալի տարբերության քառակուսի արմատը, իսկ հայտարարը հավասար է ավագ գործակցին։

$ax^2+2b_1x+c=0$ հավասարման տարբերիչը հավասար է $4b^2_1-4ac$, այսինքն՝ $4(b_1^2-ac)$։

Օ ր ի ն ա կ ն ե ր ։ Լուծել հետևյալ քառակուսի հավասարումը.

1) $2x^2-x-15=0$, $D=1+4\cdot2\cdot15=121$, $D>0$,

$$x=\frac{1\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{1\pm11}{4},\quad x_1=-\frac{5}{2},\ x_2=3,$$

2) $9x^2+12x-5=0$, $\frac{1}{4}D=36+9\cdot5=81$, $D>0$,

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{81}}{9}=\frac{-6\pm9}{9},\ x_1=-\frac{5}{3},\ x_2=\frac{1}{3},$$

3) $4x^2+12x+9=0$, $\frac{1}{4}D=36-36=0$, $D=0$, $x=\frac{-6\pm0}{4}=-\frac{3}{2}$,

Այս հավասարումը կարելի է լուծել նաև այսպես.

$$(2x+3)^2=0,\ x=-\frac{3}{2},$$

4) $3x^2-5x+4=0$, $D=25-48<0$, Հավասարումն արմատ չունի։

5) $25x^2+35x+11=0$, $D=35^2-100\cdot11=125$, $D>0$,

$$x=\frac{-35\pm\sqrt{125}}{50}=\frac{-7\pm\sqrt{5}}{10}\approx\frac{-7\pm2{,}24}{10},$$

$$x_1\approx-0{,}9;\ x_2\approx-0{,}5,$$

Վարժություններ

Լուծեցեք հետևյալ քառակուսի հավասարումները.

782. ա) $x^2-5x+6=0$, դ) $x^2+9x+14=0$,

բ) $x^2-4x-5=0$, դ) $y^2-14y+48=0$,

783. ա) $4+4t=t^2+t$, գ) $c^2+c+10=-10c$,

բ) $33-11n+n^2=3n$, դ) $6-2z=z^2-3z$,

784. ա) $22c=6-8c^2$, գ) $5t+2=3t^2$,

բ) $a^2+45=14a$, դ) $x^2+30+11x=0$։

785. ա) $2+5x^2+7x=0$, գ) $105+x^2=22x$,

բ) $y^2-2=y$, դ) $3y^2=2y-5$։

786. ա) $b^2+8b+7=0$, գ) $4b+b^2+15=0$,

բ) $2x^2+7=3x$, դ) $7a=2a^2+5$։

787. ա) $y^2+7y+12=0$, գ) $k^2+14k=95$,

բ) $2x^2-3=-x$, դ) $11a-3a^2=-4$։

788. ա) $34-k^2-15k=0$, գ) $2b^2=3+5b$,

բ) $2y^2+3=7y$, դ) $y^2+5y+4=0$։

789. ա) $5n^2-20n+15=0$, գ) $(3y+1)^2=(2y+5)^2-33$,

բ) $7k+6=3k^2$, դ) $(a+2)^2=(3a-1)^2-13a$։

790. ա) $(4+3y)^2-(5+2y)(5-2y)=10+(4y+1)^2$,

բ) $(6+3x)^3+8=(3x+8)^3$,

գ) $(4k-3)^2-(2-3k)^2=(k-5)^2$,

դ) $(2x+3)^3-316=(2x-1)^3$։

§ 109. ՎԻԵՏԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

Քառակուսի հավասարման գործակիցների և արմատների միջև գոյություն ունի կախում, որը կազմում է Վիետի թեորեմի բովանդակությունը (Ֆրանսուա Վիետ (1540—1603)—ֆրանսիացի հայտնի մաթեմատիկոս)։

Վիետի թեորեմը (ուղիղ)։ **Քառակուսի հավասարման արմատների գումարը հավասար է միջին գործակցի և ավագ գործակցի հարաբերությանը՝ վերցրած հակադիր նշանով, իսկ արմատների արտադրյալը՝ ազատ անդամի և ավագ գործակցի հարաբերությանը։**

Ապացուցում։ Տրված է $ax^2+bx+c=0$ հավասարումը։ Ենթադրենք, թե $D=b^2-4ac>0$։ Այդ դեպքում $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, Ձևափոխելով արմատների գումարը և արտադրյալը, կստանանք՝

բ) $x^2-4x-5=0$, դ) $y^2-14y+48=0$,

783. ա) $4+4t=t^2+t$, գ) $c^2+c+10=-10c$,

բ) $33-11n+n^2=3n$, դ) $6-2z=z^2-3z$,

784. ա) $22c=6-8c^2$, գ) $5t+2=3t^2$,

բ) $a^2+45=14a$, դ) $x^2+30+11x=0$,

785. ա) $2+5x^2+7x=0$, գ) $105+x^2=22x$,

բ) $y^2-2=y$, դ) $3y^2=2y-5$,

786. ա) $b^2+8b+7=0$, գ) $4b+b^2+15=0$,

բ) $2x^2+7=3x$, դ) $7a=2a^2+5$,

787. ա) $y^2+7y+12=0$, գ) $k^2+14k=95$,

բ) $2x^2-3=-x$, դ) $11a-3a^2=-4$,

788. ա) $34-k^2-15k=0$, գ) $2b^2=3+5b$,

բ) $2y^2+3=7y$, դ) $y^2+5y+4=0$,

789. ա) $5n^2-20n+15=0$, գ) $(3y+1)^2=(2y+5)^2-33$,

բ) $7k+6=3k^2$, դ) $(a+2)^2=(3a-1)^2-13a$,

790. ա) $(4+3y)^2-(5+2y)(5-2y)=10+(4y+1)^2$,

բ) $(6+3x)^3+8=(3x+8)^3$,

գ) $(4k-3)^2-(2-3k)^2=(k-5)^2$,

դ) $(2x+3)^3-316=(2x-1)^3$։

§ 109. ՎԻԵՏԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

Քառակուսի հավասարման գործակիցների և արմատների միջև գոյություն ունի կախում, որը կազմում է Վիետի թեորեմի բովանդակությունը (Ֆրանսուա Վիետ (1540—1603)—ֆրանսիացի հայտնի մաթեմատիկոս)։

Վիետի թեորեմը (ուղիղ)։ **Քառակուսի հավասարման արմատների գումարը հավասար է միջին գործակցի և ավագ գործակցի հարաբերությանը՝ վերցրած հակադիր նշանով, իսկ արմատների արտադրյալը՝ ազատ անդամի և ավագ գործակցի հարաբերությանը։**

Ապացուցում։ Տրված է $ax^2+bx+c=0$ *հավասարումը։ Ենթադրենք, թե* $D=b^2-4ac>0$։ *Այդ դեպքում* $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, *Ձևափոխելով արմատների գումարը և արտադրյալը, կստանանք՝*

$$x_1+x_2=\frac{(-b-\sqrt{D})+(-b-\sqrt{D})}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{(-b+\sqrt{D})}{2a}\cdot\frac{(-b-\sqrt{D})}{2a}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Մասնավորապես, $x^2+px+q=0$ *բերված տեսքի հավասարման համար՝*

$$x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q.$$

Վիետի թեորեմը (հակադարձ): **Եթե որևէ երկու** x_1 **և** x_2 **թվերի գումարը հավասար է** $-\frac{b}{a}$-**ի, իսկ արտադրյալը՝** $\frac{c}{a}$-**ի, ապա այդ թվերը** $ax^2+bx+c=0$ **հավասարման արմատներն են:**

Ապացուցում։ Օգտագործելով տրված x_1 *և* x_2 *թվերի միջև առնչությունները, գտնենք* $ax^2+bx+c=0$ *հավասարման արմատները.*

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=$$

$$=a(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)=a(x-x_1)(x-x_2).$$

$a(x-x_1)(x-x_2)=0$ *հավասարման արմատներն են* x_1-*ը և* x_2-*ը, ուստի դրանք նաև* $ax^2+bx+c=0$ *հավասարման արմատներն են։*

Մասնավորապես, եթե $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, *ապա* x_1 *և* x_2 *թվերը բերված տեսքի* $x^2+px+q=0$ *քառակուսի հավասարման արմատներն են։*

Օրինակ 1: *Առանց լուծելու որոշել* $6x^2-x-12=0$ *քառակուսի հավասարման արմատների նշանները։*

Քանի որ $a>0$, $c<0$, *ապա* $D=b^2-4ac>0$, *հետևաբար հավասարումն ունի երկու արմատ։ Այդ արմատների արտադրյալը հավասար է* -2 *բացասական թվին, ուստի արմատներն ունեն տարբեր նշաններ։*

Օրինակ 2: $6x^2+x-12=0$ *հավասարումը նույնպես ունի տարբեր նշանների երկու արմատ։*

Օրինակ 3: $6x^2-17x+12=0$ *հավասարումն ունի երկու արմատ, քանի որ* $D=289-288=1$, $D>0$. *Արմատների արտադրյալը դրական թիվ է (2), նշանակում է արմատների նշանները նույնն են։ Արմատների գումարը դրական թիվ է* $\left(\frac{17}{6}\right)$, *ուստի երկու արմատներն էլ դրական են։*

Օրինակ 4: $6x^2+17x+12=0$. *Քանի որ* $D=1$, *ուստի հավասարումն ունի երկու արմատ։ Արմատների արտադրյալը դրական թիվ է (2), ուստի արմատներն ունեն միևնույն նշանները։ Արմատների գու-*

մարր բացասական թիվ է ($-\frac{17}{6}$), նշանակում է երկու արմատներն էլ բացասական են։

Օգտվելով Վիետի հակադարձ թեորեմից, կարելի է ըստ տրված երկու թվերի կազմել այնպիսի քառակուսի հավասարում, որի արմատները հավասար լինեն տրված երկու թվերին։

Դիտարկենք տրված արմատների միջոցով քառակուսի հավասարումներ կազմելու օրինակներ։

Օրինակ 5: *Տրված է* $x_1=-4$, $x_2=6$։

$$x_1+x_2=-4+6=2,\ x_1\cdot x_2=-4\cdot 6=-24.$$

Կազմենք հավասարումը՝

$$x^2-2x-24=0.$$

Ստուգում։ $x=1\pm\sqrt{1+24}=1\pm 5$, $x_1=-4$, $x_2=6$։

$a(x^2-2x-24)=0$ քառակուսի հավասարումը ցանկացած $a\neq 0$ դեպքում նույնպես բավարարում է օրինակի պայմանին, քանի որ այն ունի նույն արմատները՝ -4 և 6։

Օրինակ 6: *Տրված է՝* $x_1=-\frac{8}{9}$, $x_2=\frac{5}{6}$,

$$x_1+x_2=-\frac{1}{18},\quad x_1x_2=-\frac{20}{27};$$

Կազմենք հավասարումը՝

$$x^2+\frac{1}{18}x-\frac{20}{27}=0,$$

$$54x^2+3x-40=0;$$

Ստուգում։ $x=\frac{-3\pm\sqrt{9+8640}}{108}=\frac{-3\pm\sqrt{9\cdot 961}}{108}=\frac{-1\pm 31}{36}$,

$x_1=-\frac{8}{9}$, $x_2=\frac{5}{6}$;

Կիրառելով Վիետի թեորեմը, կարելի է լուծել մի շարք խնդիրներ, որոնցում պահանջվում է ըստ տրված քառակուսի հավասարման կազմել նոր քառակուսի հավասարում այնպես, որ վերջինիս y_1 և y_2 արմատները տրված հավասարման x_1 և x_2 արմատների հետ կապված լինեն այս կամ այն առնչություններով։

մարը բացասական թիվ է $\left(-\frac{17}{6}\right)$, նշանակում է հոխու արմատներն էլ բացասական են։

Օգտվելով Վիետի հակադարձ թեորեմից, կարելի է ըստ տրված երկու թվերի կազմել այնպիսի քառակուսի հավասարում, որի արմատները հավասար լինեն տրված երկու թվերին։

Դիտարկենք տրված արմատների միջոցով քառակուսի հավասարումներ կազմելու օրինակներ։

Օրինակ 5: Տրված է $x_1=-4$, $x_2=6$։

$$x_1+x_2=-4+6=2,\ x_1\cdot x_2=-4\cdot 6=-24.$$

Կազմենք հավասարումը՝

$$x^2-2x-24=0.$$

Ստուգում։ $x=1\pm\sqrt{1+24}=1\pm 5$, $x_1=-4$, $x_2=6$։

$a(x^2-2x-24)=0$ քառակուսի հավասարումը ցանկացած $a\neq 0$ դեպքում նույնպես բավարարում է օրինակի պայմանին, քանի որ այն ունի նույն արմատները՝ -4 և 6։

Օրինակ 6: Տրված է՝ $x_1=-\frac{8}{9}$, $x_2=\frac{5}{6}$,

$$x_1+x_2=-\frac{1}{18},\quad x_1x_2=-\frac{20}{27};$$

Կազմենք հավասարումը՝

$$x^2+\frac{1}{18}x-\frac{20}{27}=0,$$

$$54x^2+3x-40=0;$$

Ստուգում։ $x=\frac{-3\pm\sqrt{9+8640}}{108}=\frac{-3\pm\sqrt{9\cdot 961}}{108}=\frac{-1\pm 31}{36}$,

$x_1=-\frac{8}{9}$, $x_2=\frac{5}{6}$;

Կիրառելով Վիետի թեորեմը, կարելի է լուծել մի շարք խնդիրներ, որոնցում պահանջվում է ըստ տրված քառակուսի հավասարման կազմել նոր քառակուսի հավասարում այնպես, որ վերջինիս y_1 և y_2 արմատները տրված հավասարման x_1 և x_2 արմատների հետ կապված լինեն այս կամ այն առնչություններով։

Խ ն դ ի ր 1. Տրված է $ax^2+bx+c=0$ հավասարումը։ Կազմել այնպիսի քառակուսի հավասարում, որի արմատները հակադիր լինեն տրված հավասարման x_1 և x_2 արմատներին։

Ըստ պայմանի $y_1=-x_1$, $y_2=-x_2$։ Որոնելի հավասարման y_1 և y_2 արմատների գումարը նշանակենք s-ով, իսկ արտադրյալը՝ p-ով։ Ըստ Վիետի թեորեմի՝

$$s=y_1+y_2=(-x_1)+(-x_2)=\frac{b}{a},$$

$$p=y_1y_2=(-x_1)(-x_2)=\frac{c}{a}։$$

Կազմենք հավասարումը՝

$$y^2-\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}=0,$$

$$ay^2-by+c=0;$$

Խ ն դ ի ր 2: Կազմել այնպիսի քառակուսի հավասարում, որի y_1 և y_2 արմատները 3-ով փոքր լինեն $x^2-662x+1977=0$ հավասարման x_1 և x_2 արմատներից։

Ըստ պայմանի՝ $y_1=x_1-3$, $y_2=x_2-3$։

$$y_1+y_2=(x_1+x_2)-6=662-6=656,$$

$$y_1y_2=(x_1-3)(x_2-3)=x_1x_2-3(x_1+x_2)+9=1977-3\cdot662+9=0։$$

Կազմենք հավասարումը՝

$$y^2-656y=0։$$

Խնդիրը լուծված է։ Նոր հավասարման արմատներն են 0 և 656, ուստի սկզբնական հավասարման արմատները կլինեն 3 և 659։ Իրոք, 3+ +659=662, 3·659=1977։

Վարժություններ

Առանց լուծելու հավասարումները, պարզեցեք, թե դրանք արմատ ունեն, թե ոչ։ Եթե ունեն, ապա որոշեցեք այդ արմատների նշանները.

791. ա) $5x^2-7x-9=0$, գ) $9y^2+3y-7=0$,

բ) $3a^2+6a-5=0$, դ) $4b^2-12b+3=0$։

792. ա) $2a^2+8a+3=0$, գ) $3x^2-9x+1=0$,

բ) $12y^2-7y+25=0$, դ) $4a^2+12a+9=0$։

Կազմեցեք քառակուսի հավասարում, ըստ նրա արմատների.

793. ա) 5 և 7, բ) −4 և 6, գ) −5 և −0,5, դ) 2,5 և −4։

794. ա) $-0{,}2$ և $-0{,}3$, գ) $-\frac{4}{5}$ և $\frac{5}{4}$,

բ) $0{,}2$ և $-5{,}4$, դ) $1\frac{1}{5}$ և $-2{,}5$։

Կիրառելով Վիետի թեորեմը, լուծեցեք հետևյալ խնդիրները.

795. ա) Գտեք $x^2+8x-c=0$ հավասարման ազատ անդամի արժեքը, եթե $x_1=3x_2$։

բ) Գտեք $2x^2+bx+25=0$ հավասարման b գործակցի արժեքը, եթե $2x_1=x_2$։

796. ա) Գտեք $2x^2+24x-c=0$ հավասարման ազատ անդամի արժեքը, եթե արմատների տարբերությունը հավասար է 8-ի։

բ) Գտեք $ax^2-5x+6=0$ հավասարման a գործակցի արժեքը, եթե $2x_1=3x_2$։

797. ա) Կազմեցեք այնպիսի քառակուսի հավասարում, որի արմատները 3-ով փոքր լինեն $x^2-8x+7=0$ հավասարման արմատներից։

բ) $5x^2+7x-c=0$ հավասարման արմատներից մեկը հավասար է -4-ի։ Գտեք հավասարման ազատ անդամի արժեքը և երկրորդ արմատը։

§ 110. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԵՌԱՆԴԱՄԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԳԾԱՅԻՆ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ

ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ արտահայտությունը կոչվում է քառակուսի եռանդամ կամ երկրորդ աստիճանի եռանդամ: $ax^2+bx+c=0$ քառակուսի հավասարման արմատները կոչվում են նաև ax^2+bx+c եռանդամի արմատներ։

Օգտվելով Վիետի թեորեմից, ապացուցենք հետևյալ թեորեմը։

Թ ե ո ր ե մ 1. Եթե քառակուսի եռանդամի տարբերիչը դրական է, ապա եռանդամը կարելի է ներկայացնել

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

տեսքով, որտեղ x_1-ը, և x_2-ը եռանդամի արմատներն են։

Ա պ ա ց ու ց ու մ ։ Տրված է ax^2+bx+c քառակուսի եռանդամը, որի տարբերիչը դրական է՝ $D=b^2-4ac>0$։

Կազմենք $ax^2+bx+c=0$ քառակուսի հավասարումը։ Այն ունի երկու արմատ՝ x_1 և x_2։ Վիետի թեորեմի համաձայն՝ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$։ Ուստի եռանդամը կարելի է ձևափոխել հետևյալ կերպ.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=$$

$$=a(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)=a(x-x_1)(x-x_2),$$

Թեորեմն ապացուցված է։

Թ ե ո ր ե մ 2. Եթե քառակուսի եռանդամի տարբերիչը հավասար է զրոյի, ապա եռանդամը կարելի է ներկայացնել

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2,$$

տեսքով, որտեղ x_1-ը եռանդամի արմատն է:

Ա պ ա ց ու ց ու մ. $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right);$$

Քանի որ $b^2-4ac=0$, *ապա* $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$; $D=0$ *դեպքում* $ax^2+bx+c=0$ *հավասարումն ունի մեկ արմատ՝* $x_1=-\frac{b}{2a}$, *ուստի նախորդ հավասարությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.*

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2;$$

Դիտարկենք քառակուսի եռանդամը արտադրիչների վերլուծելու օրինակներ (տես § 108-ում լուծված օրինակները)։

Օ ր ի ն ա կ 1: $2x^2-x-15$*։ Եռանդամի արմատներն են՝* $-\frac{5}{2}$ *և* 3*։*

$$2x^2-x-15=2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-3)=(2x+5)(x-3);$$

Օ ր ի ն ա կ 2: $9x^2+12x-5$*։ Եռանդամի արմատներն են՝* $-\frac{5}{3}$ *և* $\frac{1}{3}$*։*

$$9x^2+12x-5=9\left(x+\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(3x+5)(3x-1);$$

Օ ր ի ն ա կ 3: $3+11x-20x^2$*։ Այս քառակուսի եռանդամի ավագ գործակիցը (−20) բացասական է։ Կազմենք* $3+11x-20x^2=0$, *կամ* $20x^2-11x-3=0$ *հավասարումը։ Լուծելով այս հավասարումը, կստանանք՝* $x=\frac{11\pm19}{40}$, $x_1=-\frac{1}{5}$, $x_2=\frac{3}{4}$,

Ըստ ապացուցված թեորեմի, կստանանք՝

$$3+11x-20x^2=-20\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=-(5x+1)(4x-3)=$$

$$=(5x+1)(3-4x)\text{։}$$

Օրինակ 4։ Կրճատել $\frac{6a^2+11a+3}{3+5a-12a^2}$ կոտորակը։

Այս կոտորակի համարիչն ու հայտարարը վերլուծենք գծային արտադրիչների.

$$6a^2+11a+3=0, \quad a_1=-\frac{3}{2}, \; a_2=-\frac{1}{3},$$

$$6a^2+11a+3=6\left(a+\frac{3}{2}\right)\left(a+\frac{1}{3}\right)=(2a+3)(3a+1),$$

$$3+5a-12a^2=0, \; 12a^2-5a-3=0, \; a_1=-\frac{1}{3}, \; a_2=\frac{3}{4},$$

$$3+5a-12a^2=-12\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)=(3a+1)(3-4a)$$

Այսպիսով,

$$\frac{6a^2+11a+3}{3+5a-12a^2}=\frac{(2a+3)(3a+1)}{(3-4a)(3a+1)}=\frac{2a+3}{3-4a}\text{։}$$

Վարժություններ

Քառակուսի եռանդամները վերլուծեք արտադրիչների.

798. ա) $5x+24-x^2$, գ) y^2+5y+4,

բ) $10p^2-13p-3$, դ) $3a^2-7a-6$։

Եթե հնարավոր է, ապա կրճատեցեք հետևյալ կոտորակները.

799. ա) $\frac{y^2-18y+65}{y^2-16y+39}$, գ) $\frac{2a^2-18a-28}{3a^2-3a-6}$,

բ) $\frac{2x^2+12x-14}{3x^2+27x-30}$, դ) $\frac{135-12x-3x^2}{2x^2-24x+70}$;

800. ա) $\frac{a^2-13a+40}{a^2-13a+30}$, բ) $\frac{y^2+6y-91}{105-8y-y^2}$,

գ) $\frac{2x^2-20x+18}{x^2-13x+36}$,   դ) $\frac{3a^2-51a+48}{98-100a+2a^2}$ ։

§ 111. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՀԱՅՏԱՐԱՐՈՒՄ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§ 77-ում մենք լուծեցինք կոտորակի հայտարարում փոփոխական պարունակող այնպիսի հավասարումներ, որոնք, որպես կանոն, հանգեցվում էին գծային հավասարումների։

Այս պարագրաֆում մենք կդիտարկենք կոտորակի հայտարարում փոփոխական պարունակող այնպիսի հավասարումներ, որոնք, որպես կանոն, հանգեցվում են քառակուսի հավասարումների։

Օրինակ 1: $\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3(x+1)}{7-x}$.

Ունենք՝

$$\frac{5+2x}{4x-3}-\frac{3(x+1)}{7-x}=0,$$

$$\frac{(5+2x)(7-x)-3(x+1)(4x-3)}{(4x-3)(7-x)}=0,$$

Համարիչը պարզեցնենք և հավասարեցնենք զրոյի.

$$7x^2-3x-22=0,$$

Լուծելով հավասարումը, կստանանք՝ $x_1=-\frac{11}{7}$, $x_2=2$,

Համարիչի գտնված արմատները հայտարարը զրո չեն դարձնում, հետևաբար դրանք արմատներ են նաև սկզբնական հավասարման համար։

Պատասխան. $\{-\frac{11}{7}; 2\}$,

Օրինակ 2: $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}$,

Տրված հավասարումը ձևափոխելով $\frac{x^2-36}{3(x+3)(x-3)}=0$ տեսքի և համարիչը զրոյի հավասարեցնելով, կստանանք՝ $x=\pm 6$, -6 և 6 արժեքները կոտորակների հայտարարները զրո չեն դարձնում,

Պատասխան. $\{-6; 6\}$,

Օրինակ 3: $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}+\frac{36}{x^2-9}$,

Պարզեցնելով, կստանանք՝ $x^2-9=0$, $x=\pm 3$։

$x=3$ և $x=-3$ արժեքների դեպքում սկզբնական հավասարման երկու մասերն էլ իմաստ չունեն։ Ուստի $x^2-9=0$ քառակուսի հավասարման արմատները սկզբնական հավասարման համար արմատներ չեն։

Պատասխան. $\varnothing$։

Վարժություններ

Ապացուցեք, որ հետևյալ հավասարումները արմատներ չունեն.

801. ա) $\frac{2}{y+2}-\frac{5}{y+5}=\frac{10+6y+y^2}{y^2+9y+20}$,

բ) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2-x}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$։

Ապացուցեք, որ հետևյալ հավասարումներն ունեն մեկ արմատ.

802. ա) $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x-2}{x+1}$, գ) $\frac{1}{4x^2-1}+\frac{1}{54}=\frac{1}{2(2x-1)}$,

բ) $\frac{x^2-8}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x-2}$, դ) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}$։

Լուծեցեք հետևյալ հավասարումները.

803. ա) $\frac{5x-3}{x}-4=\frac{x-3}{3+2x}$, գ) $\frac{8+a}{2a+1}=3+\frac{4a-15}{a-3}$,

բ) $\frac{100-y}{5y+4}-3=\frac{34-y}{3y+2}$, դ) $\frac{4+x}{x-4}=\frac{4(8+3x)}{x^2-16}-\frac{x-4}{4+x}$,

804. ա) $\frac{6-8x}{3x-5}+\frac{1}{5}=\frac{2x-5}{5-x}$, գ) $\frac{7a-4}{3+2a}-\frac{2(5+a)}{a-3}=2$,

բ) $\frac{y-6}{5+3y}=\frac{3y-20}{y-7}-2$, դ) $\frac{x+3}{2+x}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{6}{x^2-4}$,

805. ա) $\frac{x+5}{7-3x}+1=\frac{5}{3-x}$, գ) $\frac{y+5}{7-3y}=\frac{2y-1}{3-y}+1$,

բ) $\frac{3+14a}{42-8a}=1+\frac{3a-6}{5-a}$, դ) $\frac{a-7}{3(1+a)}+\frac{2(1+3a)}{2a+5}=1$,

806. ա) $\frac{2k-5}{k-1}-1=\frac{2k-8}{5+3k}$, գ) $\frac{3a+5}{3-5a}=1+\frac{3a-6}{5-2a}$,

բ) $\frac{11}{1-x}+1=\frac{5x-3}{5+3x}$, դ) $\frac{9(5-y)}{14y+3}=\frac{14-7y}{3y+1}+1$,

807. ա) $\frac{5a+31}{a^2-4}=\frac{a+5}{a-2}+\frac{a+3}{a+2}$, գ) $\frac{y-4}{3-y}-\frac{y+1}{y+3}=\frac{y-9}{y^2-9}$,

բ) $\frac{6-x}{x-5}+\frac{2x+1}{x^2-25}=\frac{x+7}{5+x}$, դ) $\frac{3-x}{2(x-2)}=\frac{x-2}{2+x}-\frac{x-4}{4-x^2}$;

808. ա) $\frac{3x-1}{x+3}-\frac{2x+1}{x^2-9}=\frac{x-4}{x-3}$, գ) $\frac{5a+1}{4-a}=\frac{4a+11}{16-a^2}+\frac{2a+3}{a+4}$,

բ) $\frac{4y+3}{2+y}=\frac{2y-5}{y-2}-\frac{3y+1}{y^2-4}$, դ) $\frac{b+3}{3(b-2)}+\frac{1+8b}{5(2+b)}=\frac{3(2b-1)}{b^2-4}$,

809. ա) $\frac{18}{k+3}=\frac{3}{k-2}-\frac{4}{k-1}$, բ) $\frac{3}{2+a}+\frac{6}{a+1}=\frac{16}{a+3}$,

810. ա) $\frac{27}{y+4}-\frac{8}{y+3}=\frac{20}{y+5}$, բ) $\frac{5}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{16}{x-5}$,

§ 112. ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

§ 54—55-ում մենք քննարկեցինք այնպիսի խնդիրներ, որոնց լուծումները հանգեցվում էր գծային հավասարումներ կազմելուն, իսկ § 83-ում՝ այնպիսի խնդիրներ, որոնց լուծումները հանգեցվում էր գծային հավասարումների համակարգեր կազմելուն։ Այս պարագրաֆում մենք կդիտարկենք այնպիսի խնդիրներ, որոնք լուծվում են քառակուսի հավասարումների կամ դրանց հանգեցվող հավասարումների միջոցով։

Խնդիր 1: *Նավակը գետի հոսանքին հակառակ գնաց 22,5 կմ, իսկ հոսանքի ուղղությամբ՝ 28,5 կմ, ամբողջ ճանապարհի վրա ծախսելով 8 ժ։ Գետի հոսանքի արագությունը 2,5 կմ/ժ է։ Որոշեցեք նավակի սեփական արագությունը (այսինքն՝ նավակի արագությունը կանգնած ջրում)։*

Լուծում. *Նավակի սեփական արագությունը նշանակենք x-ով (կմ/ժ-երով)։ Այդ դեպքում նավակի արագությունը հոսանքի ուղղությամբ կլինի (x+2,5) (կմ/ժ-երով), իսկ հոսանքին հակառակ՝ (x—2,5) (կմ/ժ-երով)։ Նավակի ընթացքը հոսանքին հակառակ տևել է* $\frac{22,5}{x-2,5}$ *(ժ-երով), իսկ հոսանքի ուղղությամբ՝* $\frac{28,5}{x+2,5}$ *(ժ-երով)։ Քանի որ նա-*

վակն ամբողջ ճանապարհն անցել է ընդամենը 8 ժ-ում, ապա կարելի է կազմել հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{22,5}{x-2,5}+\frac{28,5}{x+2,5}=8, \text{ կամ } \frac{45}{2x-5}+\frac{57}{2x+5}=8։$$

Պարզեցնելով, կստանանք՝ $8x^2-51x-35=0$, $x_1=-\frac{5}{8}$, $x_2=7$։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. 7 կմ/ժ։

Խ ն դ ի ր 2: A և C վայրերից միաժամանակ դեպի B վայրը ուղևորվեցին երկու տուրիստներ։ Առաջինը B հասավ 3 ժ հետո, իսկ երկրորդը, որպեսզի B հասնի առաջինի հետ միաժամանակ, ստիպված եղավ յուրաքանչյուր կիլոմետրն անցնել $\frac{3}{4}$ ր-ով ավելի շուտ, քան առաջինը, քանի որ C-ից B հեռավորությունը 12 կմ-ով ավելի է, քան A-ից B հեռավորությունը։ Գտեք A-ից B հեռավորությունը և յուրաքանչյուր տուրիստի արագությունը։

Լ ո ւ ծ ո ւ մ 1։ Դիցուք առաջին տուրիստի (A-ից դուրս եկողի) արագությունը հավասար է x-ի (կմ/ժ-երով), հետևաբար, նա 1 կմ-ը անցնում է $\frac{1}{x}$ ժ-ում։ Երկրորդ տուրիստը (C-ից դուրս եկողը) 1 կմ-ը անցնում է $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{80}\right)$ ժ-ում, ուստի նրա արագությունը հավասար է $\frac{80x}{80-x}$ (կմ/ժ-երով)։ Առաջին տուրիստը 3 ժ-ում անցել է 3x կմ, իսկ երկրորդը՝ 3 ժ-ում անցել է $\frac{240x}{80-x}$ կմ։

Կազմենք հետևյալ աղյուսակը.

	v	t	s
Առաջին տուրիստ	x	3	$3x$
Երկրորդ տուրիստ	$\frac{80x}{80-x}$	3	$\frac{240x}{80-x}$

Այժմ կազմենք հավասարում և լուծենք.

$$\frac{240x}{80-x}=3x+12, \quad x^2+4x-320=0, \quad x_1=-20, \quad x_2=16։$$

Այսպիսով, առաջին տուրիստի արագությունը հավասար է 16 կմ/ժ-ի։

Գտնենք երկրորդ տուրիստի արագությունը, այն հավասար է $\frac{80\cdot16}{80-16}=\frac{80\cdot16}{64}=20$ կմ/ժ։ AB հեռավորությունը հավասար է $3\cdot16=$ $=48$ կմ։

Ստուգման նկատառումով նշենք, որ CB հեռավորությունը հավասար է $\frac{240\cdot16}{80-16}=\frac{240\cdot16}{64}=60$ կմ, ուստի և $|CB|-|AB|=12$ կմ, որը համապատասխանում է խնդրի պայմանին։

Լուծում 2. Դիցուք AB հեռավորությունը հավասար է x (կմ-երով)։ Առաջին տուրիստն այդ ճանապարհն անցել է 3 ժ-ում, ուստի նրա արագությունը հավասար է $\frac{x}{3}$ (կմ/ժ-երով)։ Մեկ կիլոմետրը առաջին տուրիստն անցել է $\frac{180}{x}$ ր-ում, իսկ երկրորդը՝ $\left(\frac{180}{x}-\frac{3}{4}\right)$ ր-ում, ուստի երկրորդ տուրիստի արագությունը հավասար է $\left(\frac{4x}{720-3x}\right)$ (կմ/ժ-երով), կամ $\frac{80x}{240-x}$ (կմ/ժ-երով)։ Կազմենք այսպիսի աղյուսակ.

	s	t	v
Առաջին տուրիստ	x	3	$\frac{x}{3}$
Երկրորդ տուրիստ	$\frac{240x}{240-x}$	3	$\frac{80x}{240-x}$

Կազմենք հավասարում և լուծենք.

$$\frac{240x}{240-x}=x+12,\quad x^2+12x-12\cdot240=0,$$

$$x=-6\pm\sqrt{36+12\cdot3\cdot80}=-6\pm\sqrt{36\cdot81}=-6\pm54,$$

$$x_1=-60,\quad x_2=48.$$

Այսպիսով, AB=48 կմ։ Առաջին տուրիստի արագությունը հավասար է $\frac{48}{3}=16$ կմ/ժ, իսկ երկրորդ տուրիստի արագությունը՝ $\frac{80\cdot48}{240-48}=$ $=\frac{80\cdot48}{192}=20$ կմ/ժ։ Պատասխանը նույնն է, ինչ և առաջին լուծման դեպքում։

Խնդիր 3։ Ունենք տարբեր մետաղների երկու կտոր։ Առաջին կտորի զանգվածը 880 գ է, իսկ երկրորդինը՝ 858 գ։ Առաջին կտորի ծավալը 10 սմ³-ով փոքր է երկրորդ կտորի ծավալից, իսկ առաջինի խտությունը 1 գ/սմ³-ով մեծ է երկրորդի խտությունից։ Գտեք մետաղի յուրաքանչյուր կտորի խտությունը և ծավալը։

Լուծում 1. Կազմենք աղյուսակ.

	Զանգված, գ	Խտություն, գ/սմ³	Ծավալ, սմ³
I	880	d	$\frac{880}{d}$
II	858	d−1	$\frac{858}{d-1}$

Կազմենք հավասարում և լուծենք.

$$\frac{880}{d}+10=\frac{858}{d-1},\quad 5d^2+6d-440=0,$$

$$d_1=-10,\quad d_2=8{,}8։$$

Այսպիսով, $d=8{,}8$ գ/սմ³, $d-1=7{,}8$ գ/սմ³

Հաշվենք կտորների ծավալները.

$$V_1=\frac{880}{8{,}8}=100 \text{ սմ}^3,\quad V_2=\frac{858}{7{,}8}=110 \text{ սմ}^3։$$

Լուծում 2. Կազմենք աղյուսակ.

	Զանգված, գ	Խտություն, գ/սմ³	Ծավալ, սմ³
I	880	V	$\frac{880}{V}$
II	858	V+10	$\frac{858}{V+10}$

Կազմենք հավասարում և լուծենք.

$$\frac{880}{V}-1=\frac{858}{V+10},\qquad V^2-12V-8800=0,$$

$$V_1=-88,\quad V_2=100։$$

Այսպիսով, $V=100$ սմ³, $V+10=110$ սմ³։

Խնդիր 3։ *Ունենք տարբեր մետաղների երկու կտոր։ Առաջին կտորի զանգվածը 880 գ է, իսկ երկրորդինը՝ 858 գ։ Առաջին կտորի ծավալը 10 սմ³-ով փոքր է երկրորդ կտորի ծավալից, իսկ առաջինի խտությունը 1 գ/սմ³-ով մեծ է երկրորդի խտությունից։ Գտեք մետաղի յուրաքանչյուր կտորի խտությունը և ծավալը։*

Լուծում 1. Կազմենք աղյուսակ.

	Զանգված, գ	Խտություն, գ/սմ³	Ծավալ, սմ³
I	880	d	$\frac{880}{d}$
II	858	d—1	$\frac{858}{d-1}$

Կազմենք հավասարում և լուծենք.

$$\frac{880}{d}+10=\frac{858}{d-1},\quad 5d^2+6d-440=0,$$

$$d_1=-10,\quad d_2=8{,}8։$$

Այսպիսով, $d=8{,}8$ գ/սմ³, $d-1=7{,}8$ գ/սմ³

Հաշվենք կտորների ծավալները.

$$V_1=\frac{880}{8{,}8}=100 \text{ սմ}^3,\qquad V_2=\frac{858}{7{,}8}=110 \text{ սմ}^3։$$

Լուծում 2. Կազմենք աղյուսակ.

	Զանգված, գ	Խտություն, գ/սմ³	Ծավալ, սմ³
I	880	V	$\frac{880}{V}$
II	858	V+10	$\frac{858}{V+10}$

Կազմենք հավասարում և լուծենք.

$$\frac{880}{V}-1=\frac{858}{V+10},\qquad V^2-12V-8800=0,$$

$$V_1=-88,\quad V_2=100։$$

Այսպիսով, $V=100$ սմ³, $V+10=110$ սմ³։

Հաշվենք կտորների խտությունները՝

$$d_1=\frac{880}{100}=8,8 \text{ գ/սմ}^3,\ d^x=\frac{858}{110}=7,8 \text{ գ/սմ}^3:$$

Վարժություններ

811. *Երկու վայրերի հեռավորությունը 400 կմ է։ Մի վայրից դեպի մյուսը մեկնեց առաջին ավտոմեքենան, իսկ 2 ժ հետո նրա ետևից մեկնեց երկրորդ մեքենան, որի արագությունը 10 կմ/ժ-ով մեծ էր, երկրորդի արագությունից։ Մեքենաները տեղ հասան միաժամանակ։ Որոշեցեք յուրաքանչյուր ավտոմեքենայի արագությունը։*

812. *M և N երկու քաղաքներից, որոնց հեռավորությունը 440 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ մեկնեցին երկու ավտոբուսներ։ Առաջին ավտոբուսը N քաղաք հասավ 3 ժ շուտ, քան երկրորդ ավտոբուսը՝ M քաղաք։ Որքա՞ն ժամանակում տեղ հասավ յուրաքանչյուր ավտոբուսը, եթե առաջինի արագությունը 15 կմ/ժ-ով մեծ է երկրորդի արագությունից։*

813. *94 կմ ճանապարհը ավտոմեքենան անցավ 2 ժ շուտ, քան հեծանվորդը 48 կմ-ը։ Որոշեցեք ավտոմեքենայի արագությունը, եթե այն 35 կմ/ժ-ով մեծ է հեծանվորդի արագությունից։*

814. *Շարժիչավոր նավակը գետի հոսանքի ուղղությամբ գնաց 39 կմ, իսկ այնուհետև հոսանքին հակառակ՝ 35 կմ, ամբողջ ճանապարհի վրա ծախսելով 8 ժ։ Գտեք նավակի սեփական արագությունը, եթե գետի հոսանքի արագությունը 3 կմ/ժ է։*

815. *Ջրոսաշրջիկները շոգենավով գետի հոսանքի ուղղությամբ գնացին 45 կմ և չորսժամյա կանգառից հետո ետ վերադարձան, և ընդ որում այդ ամենը տևեց 12 ժ։ Գտեք գետի հոսանքի արագությունը, եթե շոգենավի սեփական արագությունը 12 կմ/ժ է։*

816. *Ավտոմեքենան A քաղաքից շարժվեց դեպի B քաղաքը, որի հեռավորությունը A-ից հավասար է 234 կմ-ի։ Մեկ ժամ հետո B քաղաքից նրան ընդառաջ մեկնեց երկրորդ ավտոմեքենան, որը մեկ ժամում 12 կմ ավելի է անցնում, քան առաջինը։ Որոշեցեք յուրաքանչյուր ավտոմեքենայի արագությունը, եթե նրանք հանդիպեցին B քաղաքից 108 կմ հեռավորության վրա։*

817. *Ճանապարհի կեսին գնացքը հարկադրաբար կանգ առավ 2 ժ։ Որպեսզի տեղ հասնի առանց ուշացման, կանգառից հետո մեքենավարը արագությունը մեծացրեց 10 կմ/ժ-ով։ Որոշեցեք գնացքի արագությունը մինչև կանգառը, եթե ամբողջ ճանապարհի երկարությունը 280 կմ է։*

818. *A և B վայրերից, որոնց հեռավորությունը 8 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ դուրս եկան երկու տուրիստներ։ Մեկ ժամ հետո*

նրանք հանդիպեցին և առանց կանգ առնելու շարունակեցին իրենց ճանապարհը։ Առաջին տուրիստը B վայրը հասավ 1 ժ 4 ր շուտ, քան երկրորդը՝ A վայրը։ Գտեք յուրաքանչյուր տուրիստի արագությունը։

819. Մի քաղաքից մյուսը, որոնց հեռավորությունը 300 կմ է, մարդատար գնացքն անցնում է 1,5 ժ շուտ, քան բեռնատարը։ Մարդատար գնացքի արագությունը 10 կմ/ժ-ով մեծ է բեռնատարի արագությունից։ Գտեք յուրաքանչյուր գնացքի արագությունը։

820. 300 կմ հեռավորության վրա գտնվող A և B քաղաքներից միաժամանակ միմյանց ընդառաջ դուրս եկան ավտոբուսը և մոտոցիկլավարը։ 3 ժ հետո նրանք հանդիպեցին և առանց կանգ առնելու շարունակեցին իրենց ճանապարհը։ Ավտոբուսը B քաղաքը հասավ 2 ժ 30 ր ուշ, քան մոտոցիկլավարը՝ A քաղաքը։ Գտեք մոտոցիկլավարի և ավտոբուսի արագությունը։

821. Խառատը դետալը մշակեց 6 ժ, այնուհետև աշխատանքը շարունակեց աշակերտը և 4 ժ հետո ավարտեց։ Նրանցից յուրաքանչյուրն առանձին քանի՞ ժամում կավարտի աշխատանքը, եթե խառատը դա կարող է անել 3 ժ շուտ, քան աշակերտը։

822. Աշխատելով միասին, երկու բանվորներ կարող են առաջադրանքը կատարել 6 օրում։ Յուրաքանչյուր բանվորը որքա՞ն ժամանակում կարող է կատարել ամբողջ առաջադրանքը, եթե երկրորդը, աշխատելով մենակ, առաջադրանքը կարող է կատարել առաջինից 5 օր շուտ։

823. Աշխատելով միասին, երկու բանվորներ կարող են առաջադրանքը կատարել 2 ժ 24 ր-ում։ Մենակ աշխատելով առաջին բանվորը որքա՞ն ժամանակում կարող է կատարել առաջադրանքը, եթե երկրորդից այդ անելու համար կպահանջվի 2 ժ ավելի։

824. Միասին աշխատելով երկու եռակցողներ կարող են առաջադրանքը կատարել 5 ժ 50 ր-ում։ Առանձին աշխատելով յուրաքանչյուր եռակցողը որքա՞ն ժամանակում կարող է կատարել առաջադրանքը, եթե դրա համար երկրորդից կպահանջվի 4 ժ ավելի, քան առաջինից։

825. Մշակելով որոշ քանակությամբ դետալներ, առաջին խառատն աշխատեց 12 ժ, որից հետո գործն ավարտելու համար երկրորդին հարկավոր էր աշխատել ևս 15 ժ։ Աշխատելով մենակ, յուրաքանչյուր խառատը որքա՞ն ժամանակում կավարտի այդ դետալների մշակումը, եթե դրա համար երկրորդից կպահանջվի 6 ժ ավելի, քան առաջինից։

826. Տրակտորներից մեկը կարող է դաշտը վարել մեկ օր շուտ, քան մյուսը։ Տրակտորները միասին աշխատեցին երկու օր, իսկ այնուհետև դաշտի մնացած մասը երկրորդ տրակտորը վարեց 0,5 օրում։ Դաշտը քանի՞ օրում կարող է վարել յուրաքանչյուր տրակտորը, աշխատելով մենակ։

827. Բանվորը որոշակի ժամկետում պետք է պատրաստեր 200 դետալ։ Քանի որ նա յուրաքանչյուր ժամում պատրաստում էր պլանավորվածից 5 դետալ ավելի, ուստի նա առաջադրանքը կատարեց 2 ժ շուտ։ Բանվորը որքա՞ն ժամանակում կատարեց առաջադրանքը։

828. Սառատնկման աշխատանքներին մասնակցեց երկու բրիգադ։ Առաջին բրիգադը օրական տնկելով 40 ծառ ավելի, քան երկրորդը, տնկեց ընդամենը 270 ծառ։ Երկրորդ բրիգադը աշխատեց երկու օր ավելի և տնկեց 250 ծառ։ Քանի՞ օր աշխատեց յուրաքանչյուր բրիգադը։

829. Առաջադրանքը կատարելու համար առաջին բանվորը ծախսեց 8 օր ավելի, իսկ երկրորդը՝ 18 օր ավելի, քան այն, որ նրանք կծախսեին, եթե առաջադրանքը կատարեին միասին աշխատելով։ Առաջադրանքը որքա՞ն ժամանակում կարող է կատարել յուրաքանչյուր բանվորը, աշխատելով մենակ։

830. Երկու հաստոցների վրա միաժամանակ աշխատելով կարելի է առաջադրանքը կատարել 8 ժ-ում։ Եթե նախ առաջադրանքի $\frac{2}{3}$-ը կատարվի առաջին հաստոցի վրա, իսկ այնուհետև մնացած մասը երկրորդ հաստոցի վրա, ապա այդ ամենը կտևի 16 ժ։ Առաջադրանքը որքա՞ն ժամանակում կարելի է կատարել յուրաքանչյուր հաստոցի վրա առանձին աշխատելով։

831. Եռանկյան բարձրությունը 12 սմ-ով մեծ է հիմքի երկարությունից։ Եթե բարձրությունը փոքրացվի 4 սմ-ով, իսկ հիմքի երկարությունը դարձվի 27 սմ, ապա եռանկյան մակերեսը չի փոխվի։ Գտեք եռանկյան բարձրությունը և հիմքի երկարությունը։

832. Երկու լուծույթներ, որոնցից մեկը պարունակում է 0,8 կգ աղ, իսկ մյուսը՝ 0,6 կգ, խառնեցին և ստացան 10 կգ նոր լուծույթ։ Հաշվել առաջին և երկրորդ լուծույթների զանգվածները, եթե հայտնի է, որ առաջին լուծույթում աղի խտությունը 10 %-ով մեծ է, քան երկրորդում։

833. Ըստ պլանի բրիգադը մի քանի օրում պետք է պատրաստեր 216 սարք։ Առաջին երեք օրը բրիգադը կատարեց պլանով նախատեսված օրական նորման, իսկ մնացած օրերին այդ նորման գերակատարեց 8-ով, ուստի ժամկետից մեկ օր շուտ արդեն պատրաստել էր 232 սարք։ Որքա՞ն էր օրական նորման ըստ պլանի։

834. Առաջադրանքը կատարելու համար առաջին բանվորը ծախսեց 2 ժ ավելի, իսկ երկրորդը 4,5 ժ ավելի, քան այն, որ նրանք կծախսեին համատեղ աշխատելով։ Առաջադրանքը որքա՞ն ժամանակում կարող է կատարել յուրաքանչյուր բանվորը, աշխատելով մենակ։

835. Միանման դետալներ մամլելու համար հատկացված է երկու ավտոմատ հաստոց։ Առաջին ավտոմատը պատրաստեց 140 դետալ։ Երկրորդ ավտոմատը ժամում 5 դետալ քիչ էր պատրաստում, բայց դրա փո-

խարեն աշխատեց 4 ժ ավելի և պատրաստեց 165 դետալ։ Քանի՞ ժամ աշխատեց յուրաքանչյուր հաստոցը։

836. Փոսը լցնելու համար առաջին բուլդոզերը աշխատեց 2 ժ 15 ր ավելի, քան երկրորդը։ Յուրաքանչյուր բուլդոզերը, աշխատելով մենակ, քանի՞ ժամում կարող է կատարել այդ աշխատանքը, եթե նրանք միասին աշխատելով կարող են առաջադրանքը կատարել 5 ժ-ում։

§ 113. ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ ԵՎ ՆՐԱ ԳՐԱՖԻԿԸ

Սահմանում։ Քառակուսային ֆունկցիա կոչվում է

$$y=ax^2+bx+c$$

բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ $a\neq 0$։

Քառակուսային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է։

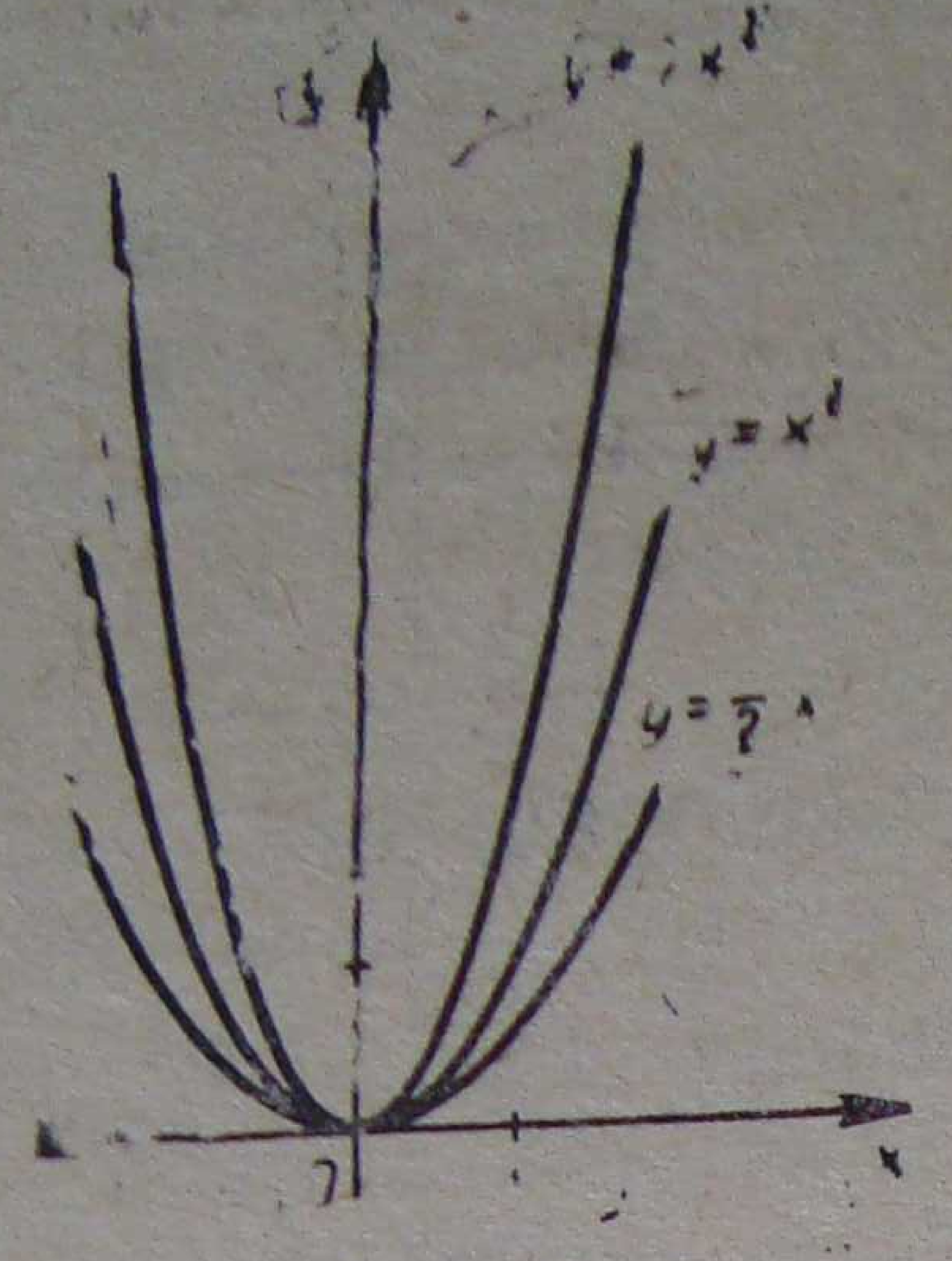
Նախ վերլուծենք քառակուսային ֆունկցիայի բանաձևի հետևյալ մասնավոր դեպքերը՝ $y=ax^2$, $y=ax^2+n$, $y=a(x+m)^2$, իսկ այնուհետև $y=a(x+m)^2+n$ ընդհանուր դեպքը։

I. $y=ax^2$. (1)

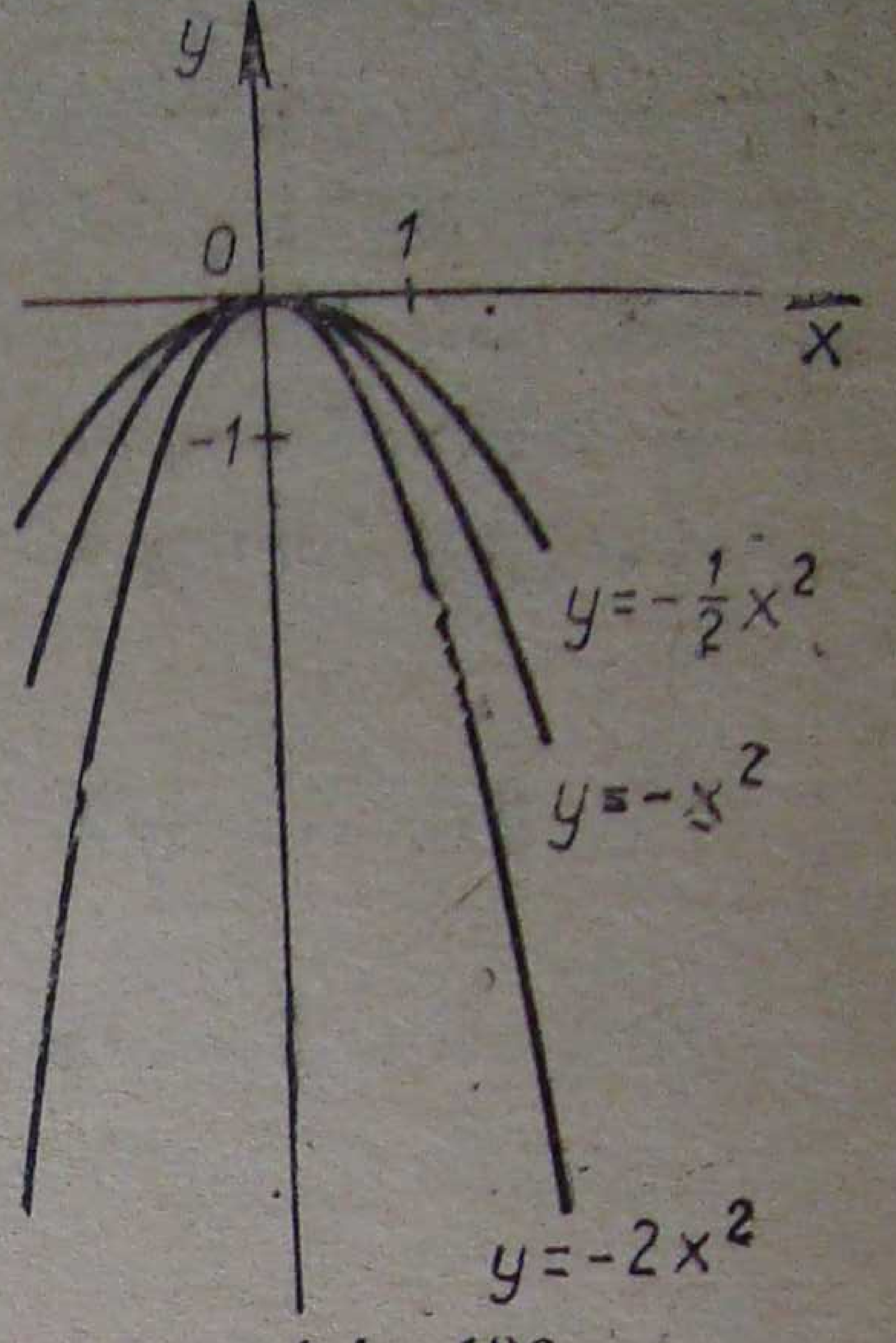
$y=x^2$ տեսքի ֆունկցիան և նրա գրաֆիկը մենք արդեն դիտարկել ենք § 94-ում։ Այժմ դիտարկենք $y=ax^2$ ֆունկցիան։

Կառուցենք վերջինիս գրաֆիկը a գործակցի որոշ արժեքների, օրինակ, $\frac{1}{2}$, 1, 2, $-\frac{1}{2}$, -1, -2 արժեքների դեպքում։ Դրա համար նախ կազմենք ֆունկցիայի արժեքների երկու աղյուսակ արգումենտի որոշ արժեքների դեպքում.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$\frac{1}{2}x^2$	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18



Նկ. 125



Նկ. 126

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$-\frac{1}{2}x^2$	$-4\frac{1}{2}$	−2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−2	$-4\frac{1}{2}$
$-x^2$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9
$-2x^2$	−18	−8	−2	0	−2	−8	−18

Կառուցելով աղյուսակում նշված կոորդինատներով կետերը և դրանք միացնելով սահուն գծով, կստանանք որոնելի գրաֆիկները։

125-րդ նկարում պատկերված են $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=x^2$ և $y=2x^2$ ֆունկցիաների, իսկ 126-րդ նկարում՝ $y=-\frac{1}{2}x^2$, $y=-x^2$ և $y=-2x^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։ Այդ նկարներից երևում է, որ $y=ax^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկը ունի սիմետրիայի առանցք (Oy առանցքը) և գագաթ, որը ամենացածր կետն է $a>0$ դեպքում (նկ. 125) և ամենաբարձր կետը՝ $a<0$ դեպքում (նկ. 126)։ Պարաբոլի գագաթը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ։ Պարաբոլի ճյուղերը $a>0$ դեպքում ուղղված են վեր, իսկ $a<0$ դեպքում՝ վար։

Ինչքան մեծ է $|a|$-ն, պարաբոլն այնքան «սլացիկ» է։

II. $y=ax^2+n$։ (2)

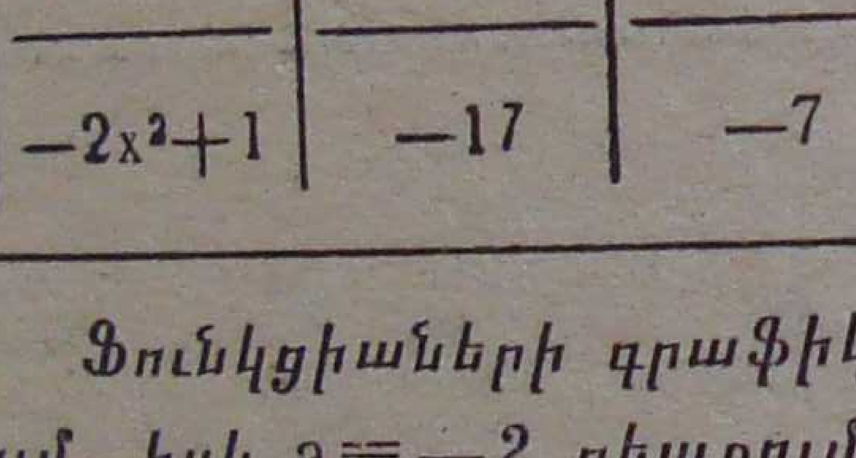
Նկարներից մեկի վրա կառուցենք $y=2x^2$, $y=2x^2-1$, $y=2x^2+1$ ֆունկցիաների գրաֆիկները, իսկ մյուսի վրա՝ $y=-2x^2$, $y=-2x^2-1$,

$y=-2x^2+1$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։ Դրա համար կազմենք հետևյալ աղյուսակները.

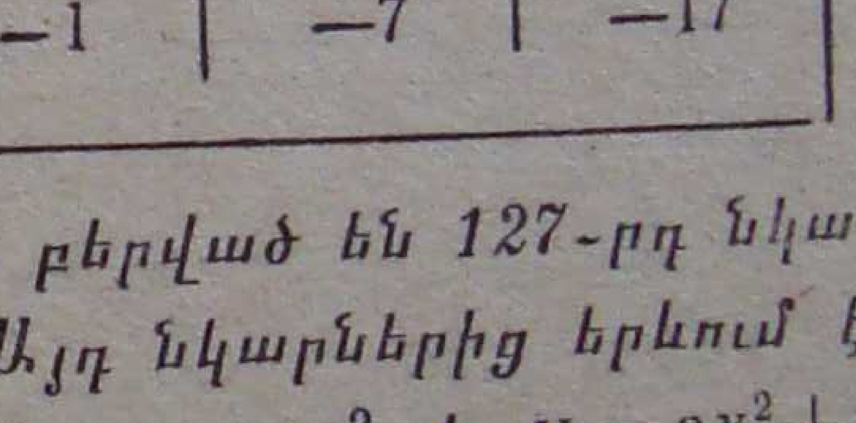
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$2x^2-1$	17	7	1	-1	1	7	17
$2x^2+1$	19	9	3	1	3	9	19

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18
$-2x^2-1$	-19	-9	-3	-1	-3	-9	-19
$-2x^2+1$	-17	-7	-1	1	-1	-7	-17

Ֆունկցիաների գրաֆիկները $a=2$ դեպքում բերված են 127-րդ նկարում, իսկ $a=-2$ դեպքում՝ 128-րդ նկարում։ Այդ նկարներից երևում է, որ x աբսցիսի միևնույն արժեքների դեպքում $y=ax^2$ և $y=ax^2+n$ ֆունկցիաների գրաֆիկների համապատասխան օրդինատների արժեքները տարբերվում են մասշտաբի ճիշտ և ճիշտ $|n|$ միավորի չափով։ $y=ax^2+n$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $y=ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համե-



Նկ. 127



Նկ. 128

մաչափությամբ դեպի վեր է բարձրացված n միավորով, եթե $n>0$, և ներքև է իջեցված $|n|$ միավորով, եթե $n<0$։

$y=ax^2+n$ պարաբոլի գագաթն այս անգամ արդեն գտնվում է $(0; n)$ կոորդինատներով կետում։ Պարաբոլի սիմետրիայի առանցքը առաջվա պես համընկնում է Oy առանցքի հետ։ (3)

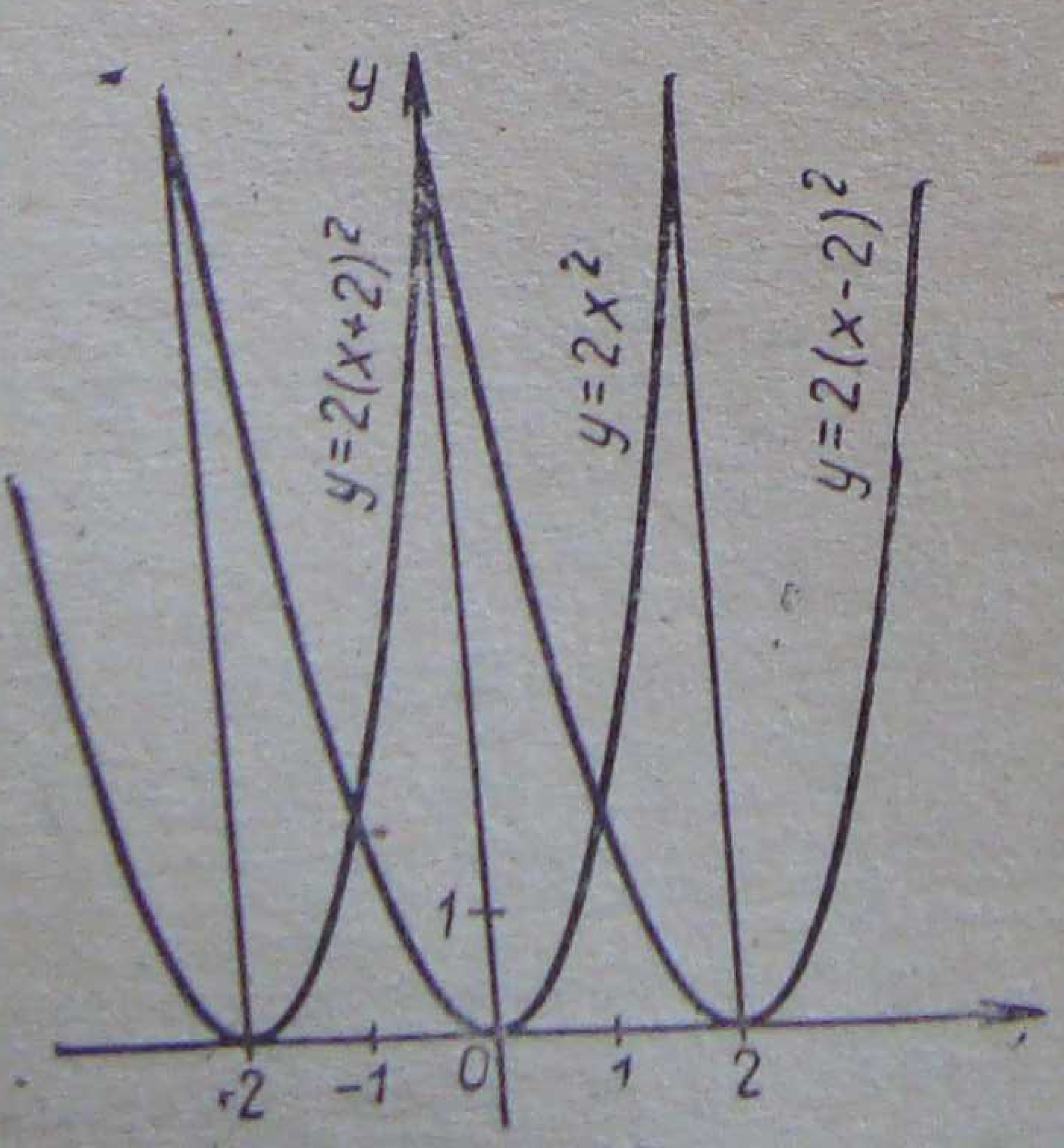
III. $y=a(x+m)^2$։

Սահմանափակվենք $a>0$ դեպքով։ Կառուցենք $y=2(x-2)^2$, $y=2x^2$ և $y=2(x+2)^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։ Դրա համար կազմենք հետևյալ աղյուսակը․

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$2(x-2)^2$	50	32	18	8	2	0	2
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$2(x+2)^2$	2	0	2	8	18	32	50

Ֆունկցիաների գրաֆիկները բերված են 129-րդ նկարում։ Համեմատենք $y=a(x+m)^2$ և $y=ax^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։ $m<0$ դեպքում $y=a(x+m)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $y=ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համեմատությամբ մասշտաբի $|m|$ միավորի չափով շեղված է դեպի աջ, իսկ $m>0$ դեպքում՝ m միավորով դեպի ձախ։ Պարաբոլի գագաթը գտնվում է $(-m; 0)$ կոորդինատներով կետում։ Սիմետրիայի առանցքի հավասարումն է $x=-m$։ (4)

IV. $y=a(x+m)^2+n$։



Նկ. 129

$y=a(x+m)^2+n$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի է ստանալ $y=ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից երկու եղանակով։

ա) (1) գրաֆիկը հորիզոնական ուղղությամբ մասշտաբի $|m|$ միավորի չափով տեղափոխենք դեպի աջ, եթե $m<0$, կամ m միավորով դեպի ձախ, եթե $m>0$, և կստանանք (3) գրաֆիկը։ Այնուհետև (3) գրաֆիկը n միավորով տեղափոխենք ուղղաձիգ դեպի վեր, եթե $n>0$, կամ $|n|$ միավորով դեպի

վար, եթե $n<0$։ Արդյունքում կստանանք որոնելի (4) գրաֆիկը։

բ) Նախ (1) գրաֆիկը n միավորով տեղափոխենք ուղղաձիգ դեպի վեր, եթե $n>0$, և $|n|$ միավորով դեպի վար, եթե $n<0$։ Կստանանք (2) գրաֆիկը։ Այնուհետև (2) գրաֆիկը հորիզոնական ուղղությամբ տեղափոխենք $|m|$ միավորով դեպի աջ, եթե $m<0$, և m միավորով դեպի ձախ, եթե $m>0$։ Կստանանք որոնելի (4) գրաֆիկը։

Պարաբոլի գագաթը $(-m;\ n)$ կոորդինատներով կետն է։ Սիմետրիայի առանցքի հավասարումն է $x=-m$։

Օ ր ի ն ա կ։ Կառուցել $y=2(x-2)^2+3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։

Գտնենք պարաբոլի գագաթը. այն (2; 3) կետն է։ Կառուցենք $y=2x^2$ օժանդակ գրաֆիկը։ Այնուհետև կիրառենք հետևյալ երկու եղանակներից մեկնումեկը։

ա) $y=2x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը նախ տեղափոխենք 2 միավորով դեպի աջ, իսկ այնուհետև 3 միավորով դեպի վեր (նկ. 130)։

բ) $y=2x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը նախ տեղափոխենք 3 միավորով դեպի վեր, իսկ այնուհետև 2 միավորով դեպի աջ (նկ. 131)։

V. $y=ax^2+bx+c$։ (5)

Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է ax^2+bx+c եռանդամը ձևափոխել $a(x+m)^2+n$ տեսքի։ Այդպիսի ձևափոխությունը միշտ հնարավոր է. այն կոչվում է քառակուսի եռանդամից լրիվ քառակուսու առանձնացում։ Նման ձևափոխության մենք արդեն հանդիպել ենք (տես § 109—110)։ Կատարենք այդ ձևափոխությունը.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a},$$

որտեղ $D=b^2-4ac$։

Եթե այժմ նշանակենք $\frac{b}{2a}=m$, $-\frac{D}{4a}=n$, ապա կստանանք.

$$ax^2+bx+c=a(x+m)^2+n։$$

Այսպիսով, (5) պարաբոլի գագաթը $\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{D}{4a}\right)$ կետն է, իսկ նրա սիմետրիայի առանցքի հավասարումը՝ $x=-\frac{b}{2a}$։

Եվ այսպես, $y=ax^2+bx^2+c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է առանձնացնել լրիվ քառակուսին և գտնել գագաթի կոորդինատները, այնուհետև կառուցել $y=ax^2$ ֆունկցիայի օժանդակ

գրաֆիկը և կատարել վերը նշված տեղափոխությունները կոորդինատային առանցքներին զուգահեռ ուղղություններով։

Դիտարկված հինգ դեպքերից կարելի է անել այսպիսի եզրակացություն. $y=ax^2$ և $y=ax^2+bx+c$ ֆունկցիաները b և c գործակիցների ցանկացած արժեքների դեպքում ունեն համընկնելի գրաֆիկներ։ Կոորդինատային առանցքների նկատմամբ նրանք դասավորված են տարբեր կերպ, բայց համապատասխան տեղափոխություններից հետո նրանք կարող են վերադրվել մեկը մյուսի վրա այնպես, որ համատեղվեն իրենց բոլոր կետերով։

Վարժություններ

Գծեցեք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները, նախապես պատրաստելով $y=\frac{1}{2}x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևանմուշը.

837. ա) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+2$, բ) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$։

838. ա) $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2$, բ) $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-2$։

839. ա) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$, բ) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-2$։

840. ա) $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$, բ) $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2-2$։

§ 114. ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ ԵՎ ՆՐԱ ԳՐԱՖԻԿԸ (շարունակություն)

Այժմ առաջարկենք $y=ax^2+bx+c$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման մեկ այլ եղանակ, որը չի պահանջում կառուցել օժանդակ՝ $y=ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Գտնենք (եթե հնարավոր է) արգումենտի այն արժեքները, որոնց դեպքում ֆունկցիան ընդունում է զրոյական արժեքներ, այսինքն՝ գտնենք $ax^2+bx+c=0$ հավասարման արմատները. դրանք Ox առանցքի հետ պարաբոլի հատման կետերի աբսցիսներն են։ Գտնենք նաև ֆունկցիայի արժեքը արգումենտի զրո արժեքի դեպքում, դա Oy առանցքի հետ պարաբոլի հատման կետի օրդինատն է։ Այդ կետի կոորդինատներն են $(0; c)$։ Սրանք են պարաբոլի կառուցման հիմնական կետերը։ Այնուհետև կարելի է ընտրել x-ի մի քանի արժեքներ, հաշվել y-ի՝ դրանց համապատասխան արժեքները և կառուցել որոնելի գրաֆիկի էլի մի քանի կետեր։

Պարաբոլի գագաթի աբսցիսը տրված քառակուսի եռանդամին համապատասխան $ax^2+bx+c=0$ հավասարման արմատների թվաբանական միջինն է։ Իրոք, եթե $b^2-4ac>0$, ապա ըստ Վիետի թեորեմի՝ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, որտեղից $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$։ Գագաթի օրդինատը գտնելու համար պետք է $y=ax^2+bx+c$ բանաձևի աջ մասում տեղադրել գագաթի աբսցիսի $-\frac{b}{2a}$ արժեքը և հաշվել գագաթի օրդինատի համապատասխան արժեքը՝ $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{D}{4a}$։

Եթե $b^2-4ac<0$, ապա հավասարումը արմատներ չունի։ Այդ դեպքում կարելի է վարվել այսպես․ $x=0$ դեպքում $y=c$․ $A(0; c)$ կետը միշտ կարելի է կառուցել։ Բայց գրաֆիկի վրա պետք է լինի ևս մեկ կետ, որի օրդինատը հավասար է c-ի ($c\neq0$)։ Այն գտնելու համար լուծենք $ax^2+bx+c=c$, կամ, որ նույնն է՝ $ax^2+bx=0$ հավասարումը։ Այդ հավասարման արմատներն են 0 և $-\frac{b}{a}$։ Եվ այսպես, կարելի է կառուցել երկրորդ կետը՝ $B(-\frac{b}{a}; c)$։

Կազմենք այդ կետերի աբսցիսների թվաբանական միջինը՝ $\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}+0\right)=-\frac{b}{2a}$․ սա էլ հենց, ինչպես տեսանք, գագաթի պարաբոլի աբսցիսն է։ Ուստի $D<0$ դեպքում պարաբոլը կառուցելու համար մենք ունենք երեք հիմնական կետ՝ գագաթը, ինչպես նաև A և B կետերը։

Պարագրաֆի սկզբում մենք նշեցինք, որ քառակուսային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է։ Այժմ կարելի է պարզել նրա արժեքների տիրույթը։

$a>0$ դեպքում գագաթը գրաֆիկի ամենաստորին կետն է, հետևաբար օրդինատի բոլոր արժեքները բավարարում են $y\geqslant-\frac{D}{4a}$ անհավասարությանը։ Հանգունորեն, $a<0$ դեպքում գագաթը գրաֆիկի ամենավերին կետն է, ուստի օրդինատի բոլոր արժեքները բավարարում են $y\leqslant-\frac{D}{4a}$ անհավասարությանը։ Հետևաբար, $y=ax^2+bx+c$ քառակուսային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը $a>0$ դեպքում $\left[-\frac{D}{4a}; +\infty\right[$ միջակայքն է, իսկ $a<0$ դեպքում՝ $\left]-\infty; -\frac{D}{4a}\right]$ միջակայքը։

Օրինակ 1: Կառուցել $y=2x^2-7x+3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

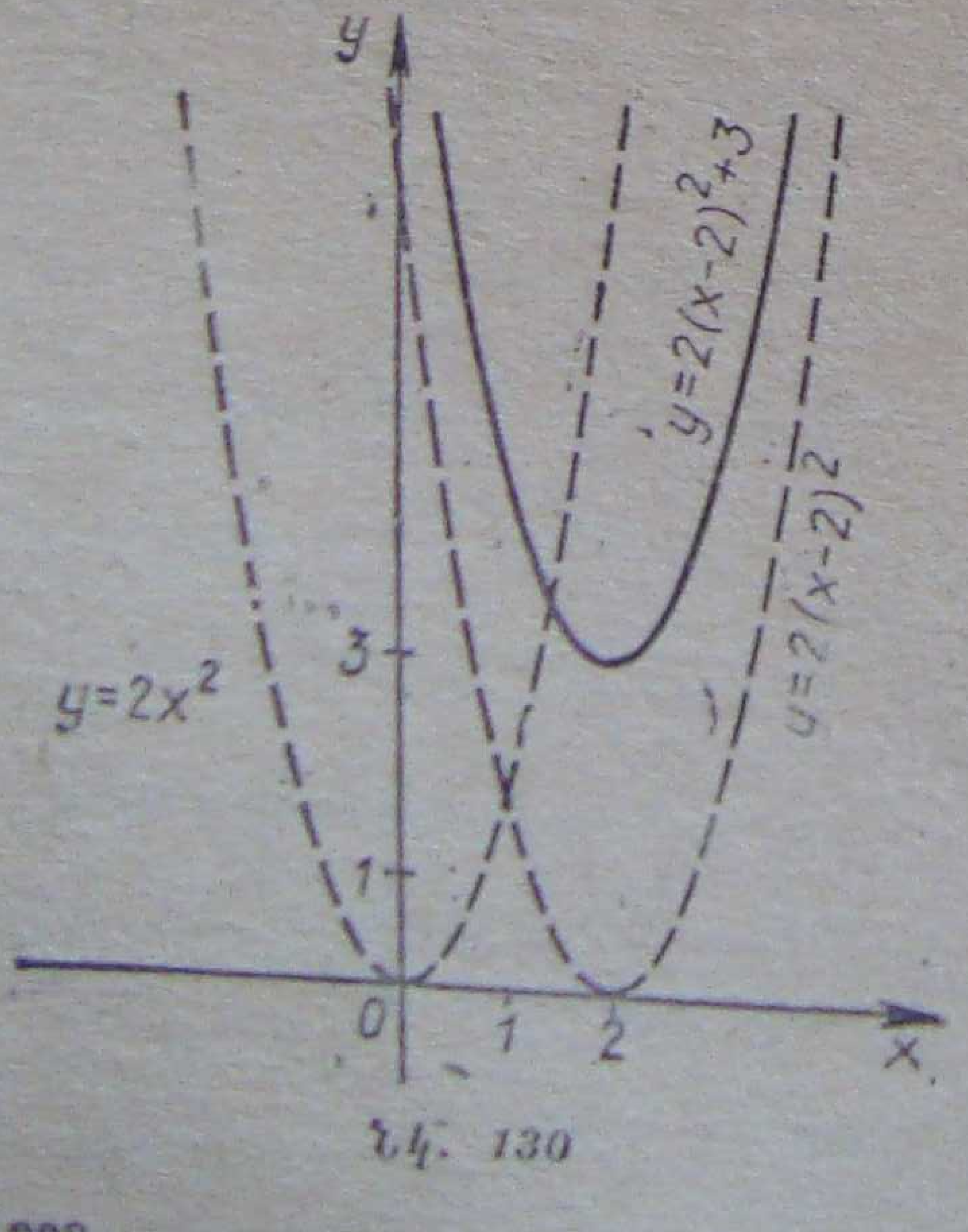
Գտնենք Ox առանցքի հետ պարաբոլի հատման կետերը, եթե դրանք գոյություն ունեն՝ $2x^2-7x+3=0$, $D=49-24=25$, $D>0$, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=3$: Հատման կետերը գտանք, դրանք են՝ $(\frac{1}{2};0)$ և $(3;0)$:

Այժմ գտնենք Oy առանցքի հետ պարաբոլի հատման կետը: Պարաբոլի հավասարումից երևում է, որ եթե $x=0$, ապա $y=3$: Որոնելի կետի կոորդինատներն են $(0;3)$:

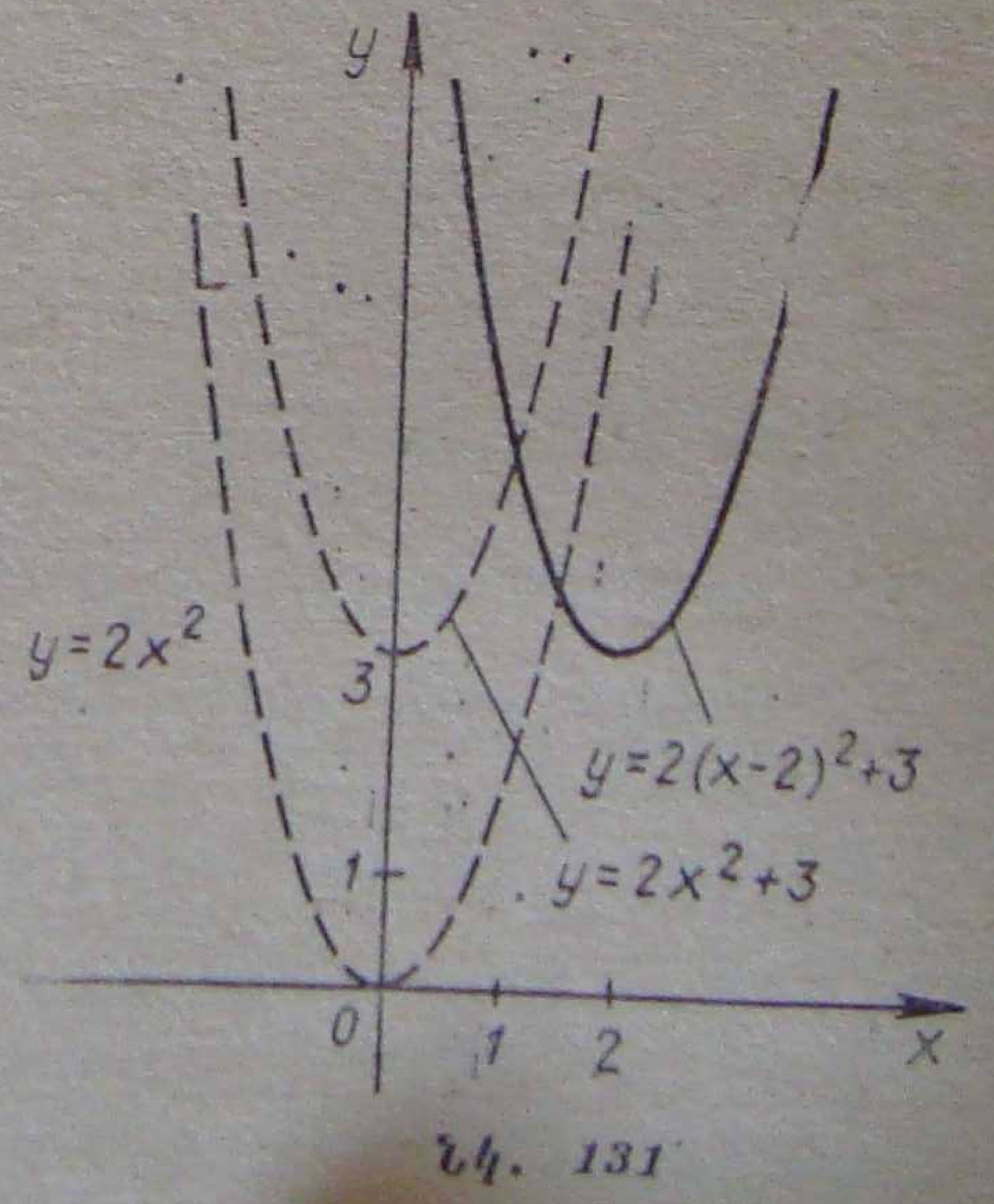
Գտնենք պարաբոլին պատկանող ևս մեկ կետ, որի օրդինատը նույնպես հավասար է 3-ի: Դրա համար $y=2x^2-7x+3$ հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք 3, կստանանք՝ $2x^2-7x=0$, $x_1=0$, $x_2=\frac{7}{2}$:

Որոնելի կետն է $\left(\frac{7}{2};\ 3\right)$:

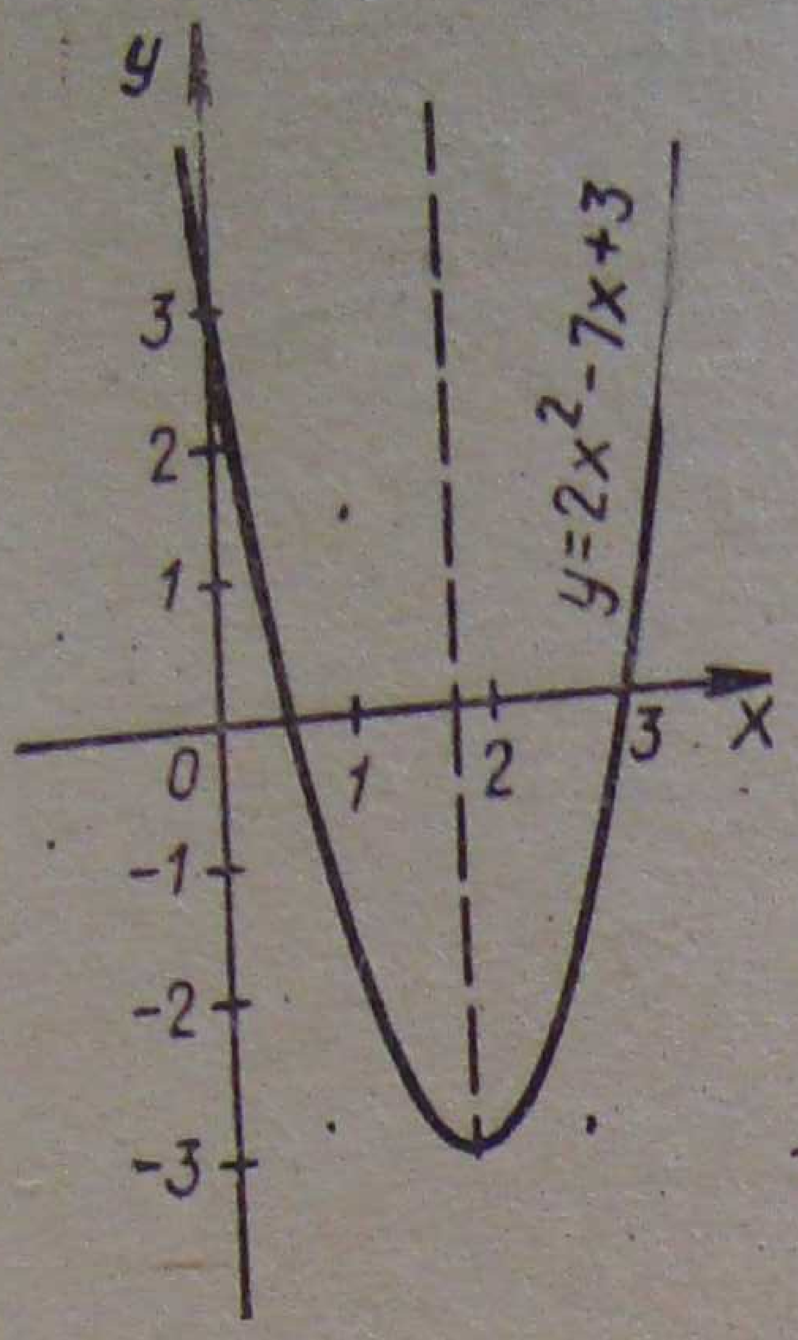
Հաշվենք պարաբոլի գագաթի կոորդինատները: Պարաբոլի գագաթի աբսցիսը հավասար է հավասարման արմատների թվաբանական միջինին՝ $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+3\right)=\frac{7}{4}$: Պարաբոլի հավասարումից գտնենք գագաթի օրդինատը. $y=2\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^2-7\cdot\frac{7}{4}+3=-\frac{25}{8}$: Այսպիսով, պարաբոլի գագաթի կոորդինատներն են $\left(\frac{7}{4};\ -\frac{25}{8}\right)$:



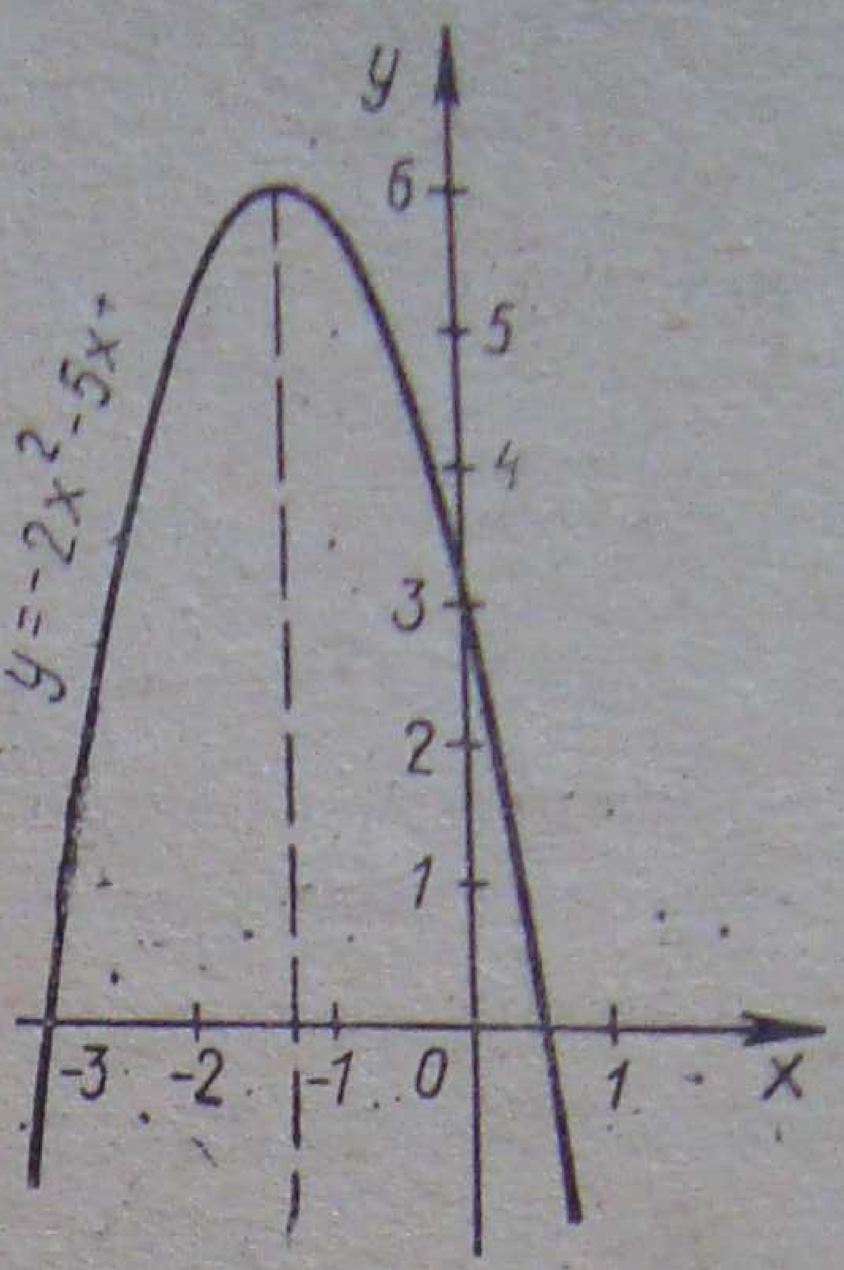
Նկ. 130



Նկ. 131



Նկ. 132



Նկ. 133

Բոլոր գտնված կետերն էլ հենց որոշում են պարաբոլը (նկ. 132)։

Օրինակ 2: Կառուցել $y=-2x^2-5x+3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։

Գտնենք քառակուսի եռանդամի արմատները. $-2x^2-5x+3=0$, $2x^2+5x-3=0$, $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$։ Պարաբոլը Ox առանցքի հետ հատվում է $(-3;\ 0)$ և $(\frac{1}{2};\ 0)$ կետերում։

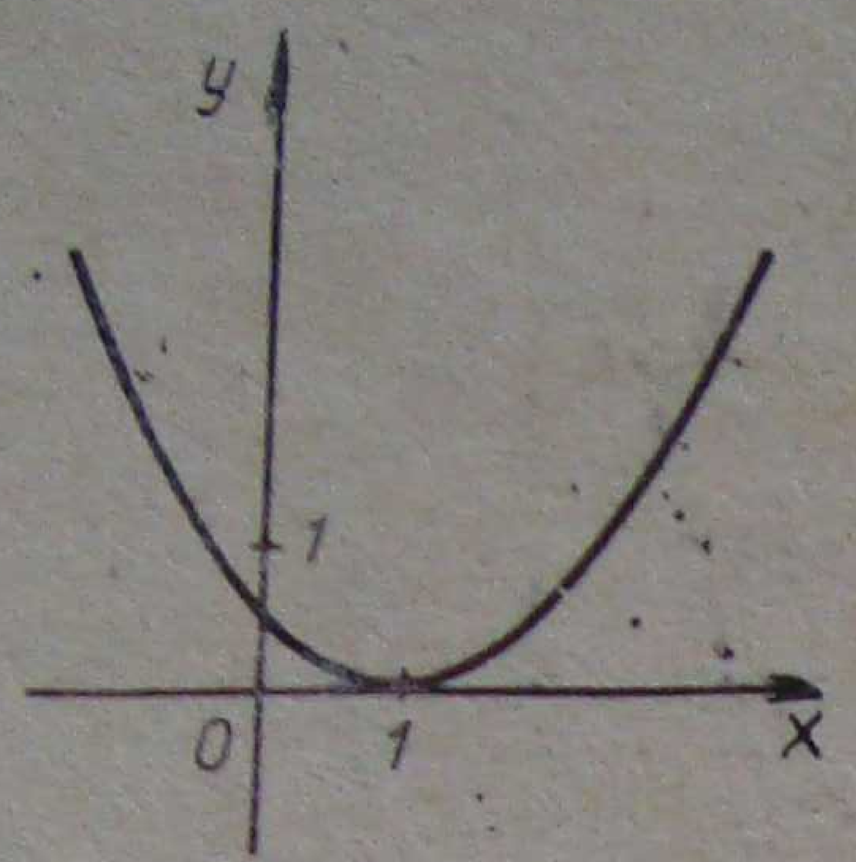
Եթե $y=3$, ապա $-2x^2-5x=0$, $x_1=0$, $x_2=-\frac{5}{2}$։

Մենք գտանք պարաբոլին պատկանող ևս երկու կետերի կոորդինատները. $(0;\ 3)$ և $(-\frac{5}{2};\ 3)$։

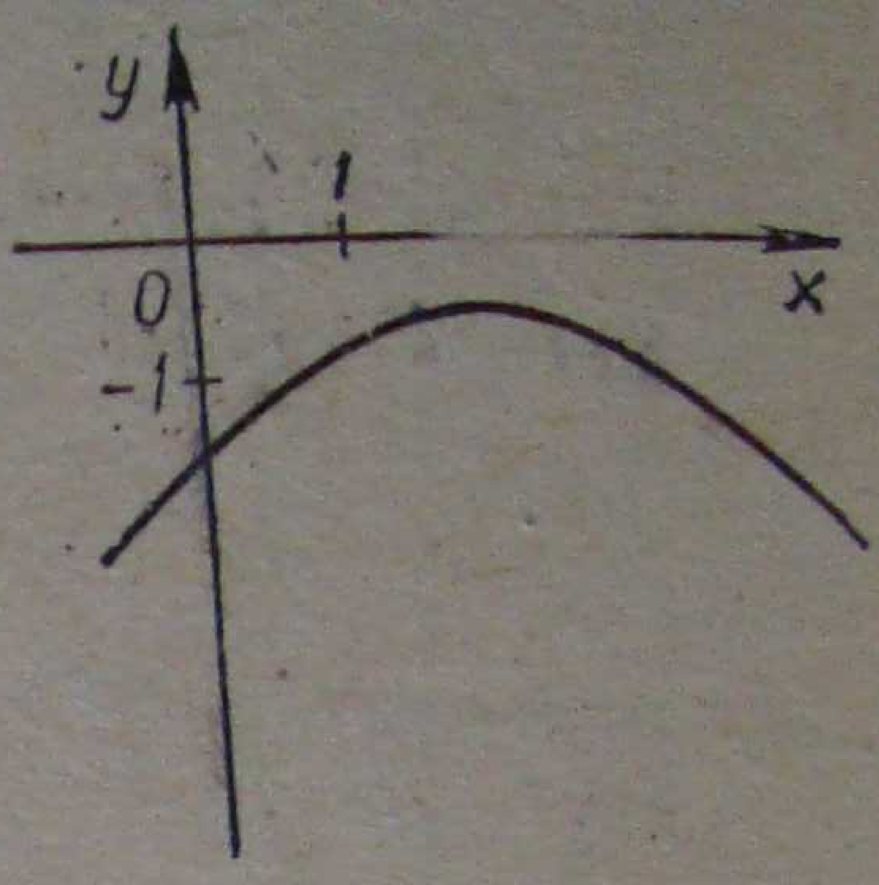
Որոշենք պարաբոլի գագաթի կոորդինատները՝ $\frac{1}{2}\left(-3+\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$, $-2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^2-5\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+3=\frac{49}{8}$։ Այսպիսով, պարաբոլի գագաթն ունի $\left(-\frac{5}{4};\ \frac{49}{8}\right)$ կոորդինատները։

Բոլոր այս կետերով կարելի է կառուցել պարաբոլը (նկ. 133)։

Օրինակ 3: Կառուցել $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ պարաբոլը։ Մի փոքր ձևափոխենք՝ $y=\frac{1}{2}(x^2-2x+1)=\frac{1}{2}(x-1)^2$, Եթե $x=1$, ապա $y=0$, բայց եթե $x\neq1$, ապա $y>0$։ Ուստի $(1;\ 0)$ կոորդինատներով կետը պա-



Նկ. 134



Նկ. 135

բոլի ամենաստորին կետն է, այսինքն նրա գագաթն է։ Պարաբոլը տեղադրված է վերին կիսահարթությունում։

Դիցուք այժմ $y=\frac{1}{2}$։ Կստանանք՝ $\frac{1}{2}x^2-x=0$, $x_1=0$ և $x_2=2$։ Գտանք պարաբոլի ևս երկու կետերի կոորդինատները. $(0; \frac{1}{2})$ և $(2; \frac{1}{2})$։ Բոլոր գտած կետերը որոշում են պարաբոլը (Նկ. 134)։

Օրինակ 4: Կառուցել $y=-\frac{1}{4}x^2+x-\frac{3}{2}$ պարաբոլը։ Հաշվենք տարբերիչը՝ $y=-\frac{1}{4}(x^2-4x+6)$, $x^2-4x+6=0$, $D=16-24<0$։ Քառակուսի եռանդամն արմատներ չունի, հետևաբար պարաբոլը չի հատում $0x$ առանցքը։

Պարաբոլը գտնվում է ստորին կիսահարթությունում։ Տեղադրելով $y=-\frac{3}{2}$, կստանանք. $-\frac{1}{4}x^2+x=0$, $x_1=0$, $x_2=4$։ Պարաբոլին պատկանում են $(0; -\frac{3}{2})$ և $(4; -\frac{3}{2})$ կետերը։ Այս երկու կետերը սիմետրիկ են $0y$ առանցքին զուգահեռ այն ուղղի նկատմամբ, որը $0x$ առանցքը հատում է մի կետում, որի աբսցիսը հավասար է տրված երկու կետերի աբսցիսների թվաբանական միջինին. դա էլ հենց պարաբոլի գագաթի աբսցիսն է։ Այն հավասար է $\frac{1}{2}\cdot(0+4)=2$։ Պարաբոլի հավասարումից գտնենք y-ը՝ $y=-\frac{1}{4}\cdot4+2-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$, Այսպիսով, պարաբոլի գագաթն ունի $(2; -\frac{1}{2})$ կոորդինատները (Նկ. 135)։

Կառուցեք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները։

841. ա) $y=x^2-7x+10$, գ) $y=-3x^2+5x+2$,

բ) $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}x+5$, դ) $y=3x^2-4x$։

842. ա) $y=x^2-5x+6$, գ) $y=\frac{1}{2}x^2-3x-8$,

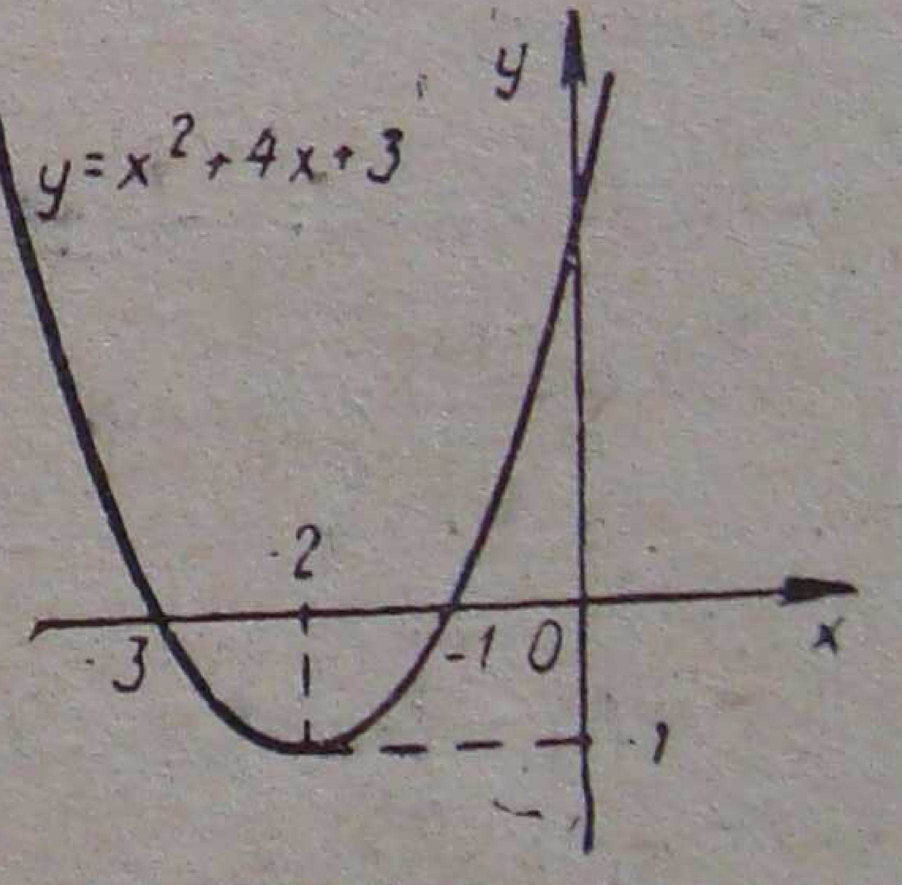
բ) $y=-6x^2+x+1$, դ) $y=3x^2+7x$։

§ 115. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Մեկ փոփոխականով քառակուսի անհավասարություն կամ երկրորդ աստիճանի անհավասարություն կոչվում է $ax^2+bx+c>0$ կամ $ax^2+bx+c<0$ տեսքի անհավասարությունը, ընդ որում $a\neq 0$։

Հիշեցնենք, որ լուծել անհավասարությունը, նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումների բազմությունը։

Քառակուսի անհավասարությունը լուծելու համար կառուցենք $y=ax^2+bx+c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և պարզենք, թե արգումենտի ինչպիսի արժեքների դեպքում է ֆունկցիայի համապատասխան արժեքներն ընդունում դրական կամ բացասական արժեքներ։

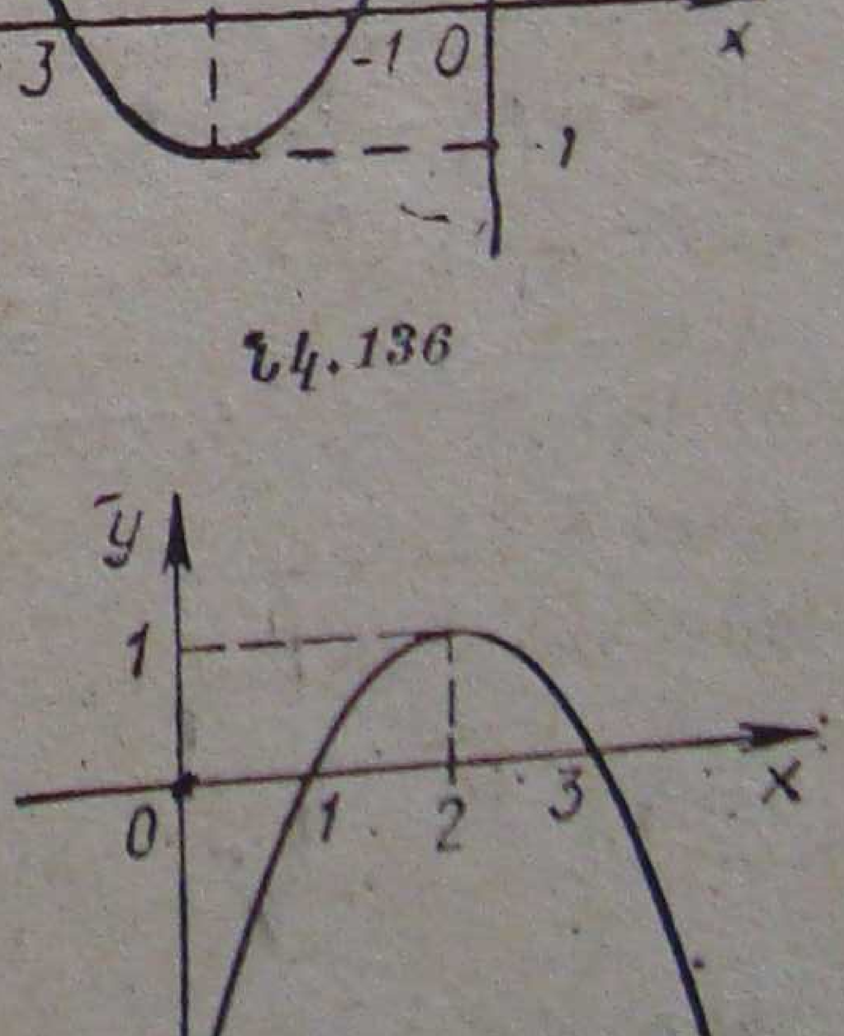


Նկ. 136

Օրինակ 1։ Անհավասարությունը լուծել գրաֆիկորեն.

ա) $x^2+4x+3\geqslant 0$, բ) $x^2+4x+3<0$։

Լուծում։ Կառուցենք $y=x^2+4x+3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Ունենք. $x^2+4x+3=(x+2)^2-1$։ Գագաթի կոորդինատներն են $(-2;\ -1)$։ Եռանդամի արմատներն են -1 և -3։ Պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են դեպի վեր։



Նկ. 137

ա) Ֆունկցիայի գրաֆիկից երևում է (Նկ. 136), որ ֆունկցիան դրական արժեքներ ընդունում է արգումենտի այն արժեքների դեպքում, որոնք փոքր են -3-ից կամ մեծ են -1-ից, իսկ զրոյական արժեքներ՝ $x=-3$ և $x=-1$ դեպքում։ Ուստի $x^2+4x+3\geqslant 0$ անհավասարության լուծումների բազմությունը

Կառուցեք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները։

841. ա) $y=x^2-7x+10$, գ) $y=-3x^2+5x+2$,

բ) $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}x+5$, դ) $y=3x^2-4x$։

842. ա) $y=x^2-5x+6$, գ) $y=\frac{1}{2}x^2-3x-8$,

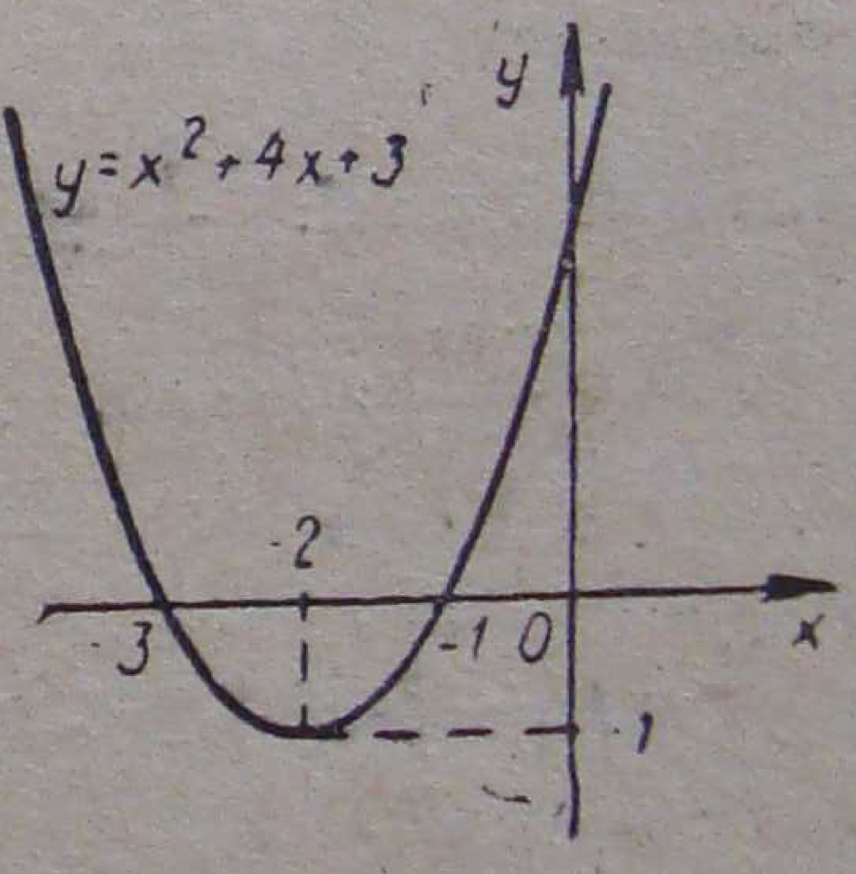
բ) $y=-6x^2+x+1$, դ) $y=3x^2+7x$։

§ 115. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Մեկ փոփոխականով քառակուսի անհավասարություն կամ երկրորդ աստիճանի անհավասարություն կոչվում է $ax^2+bx+c>0$ կամ $ax^2+bx+c<0$ տեսքի անհավասարությունը, ընդ որում $a\neq 0$։

Հիշեցնենք, որ լուծել անհավասարությունը, նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումների բազմությունը։

Քառակուսի անհավասարությունը լուծելու համար կառուցենք $y=ax^2+bx+c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և պարզենք, թե արգումենտի ինչպիսի արժեքների դեպքում է ֆունկցիայի համապատասխան արժեքները ընդունում դրական կամ բացասական արժեքներ։

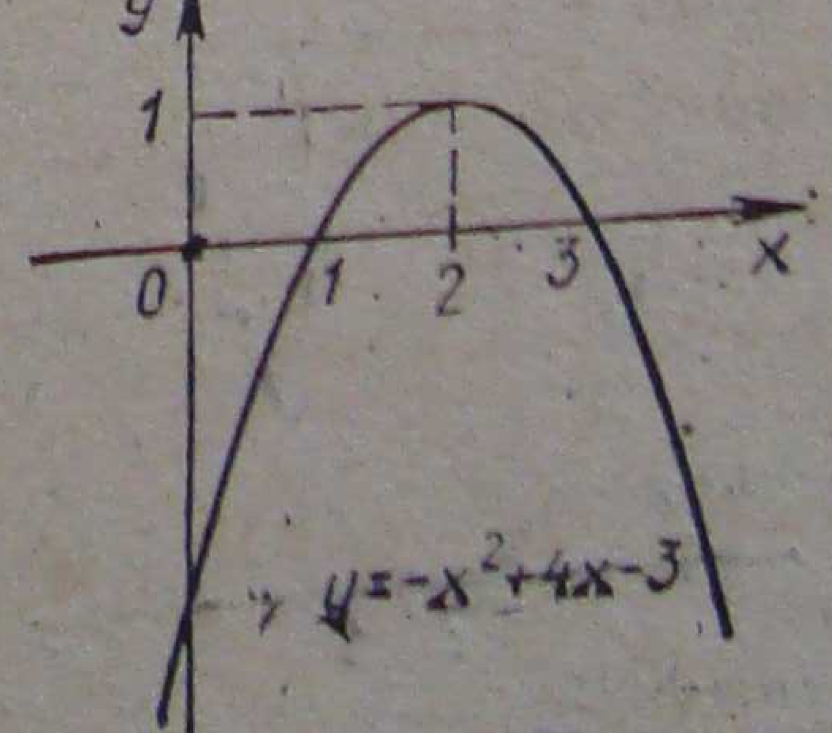


Նկ. 136

Օրինակ 1: *Անհավասարությունը լուծել գրաֆիկորեն.*

ա) $x^2+4x+3\geqslant 0$, բ) $x^2+4x+3<0$։

Լուծում։ Կառուցենք $y=x^2+4x+3$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Ունենք.* $x^2+4x+3=(x+2)^2-1$։ *Գագաթի կոորդինատներն են* $(-2;\ -1)$։ *Եռանդամի արմատներն են* -1 *և* -3։ *Պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են դեպի վեր։*



Նկ. 137

ա) Ֆունկցիայի գրաֆիկից երևում է (նկ. 136), որ ֆունկցիան դրական արժեքներ ընդունում է արգումենտի այն արժեքների դեպքում, որոնք փոքր են -3-ից կամ մեծ են -1-ից, իսկ զրոյական արժեքներ՝ $x=-3$ և $x=-1$ դեպքում։ Ուստի $x^2+4x+3\geqslant 0$ անհավասարության լուծումների բազմությունը

կարելի է գրել հետևյալ երկու միջակայքերի միավորման տեսքով. $]-\infty; -3] \cup [-1; +\infty[$։

բ) Ֆունկցիայի գրաֆիկից (նկ. 136) երևում է, որ ֆունկցիան բացասական արժեքներ ընդունում է արգումենտի այն արժեքների դեպքում, որոնք մեծ են -3-ից և փոքր՝ -1-ից։ Հետևաբար, $x^2+4x+3<0$ անհավասարության լուծումների բազմությունն է $]-3; -1[$։

Օրինակ 2: Անհավասարությունները լուծել գրաֆիկորեն.

ա) $4x-3-x^2 \geqslant 0$, *բ)* $4x-3-x^2<0$։

Լուծում։ Կառուցենք $y=-x^2+4x-3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Մի փոքր ձևափոխենք. $-x^2+4x-3=-(x^2-4x+3)=-((x-2)^2-1)=-(x-2)^2+1$։ Գագաթի կոորդինատներն են $(2; 1)$։ Եռանդամի արմատներն են. 1 և 3։ Պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են դեպի ներքև։

Ֆունկցիայի գրաֆիկից երևում են տրված անհավասարությունների լուծումները (նկ. 137).

ա) $[1; 3]$, *բ)* $]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$։

Օրինակ 3: Անհավասարությունները լուծել գրաֆիկորեն.

ա) $\frac{1}{2}x^2+2x+2>0$, *բ)* $\frac{1}{2}x^2+2x+2<0$։

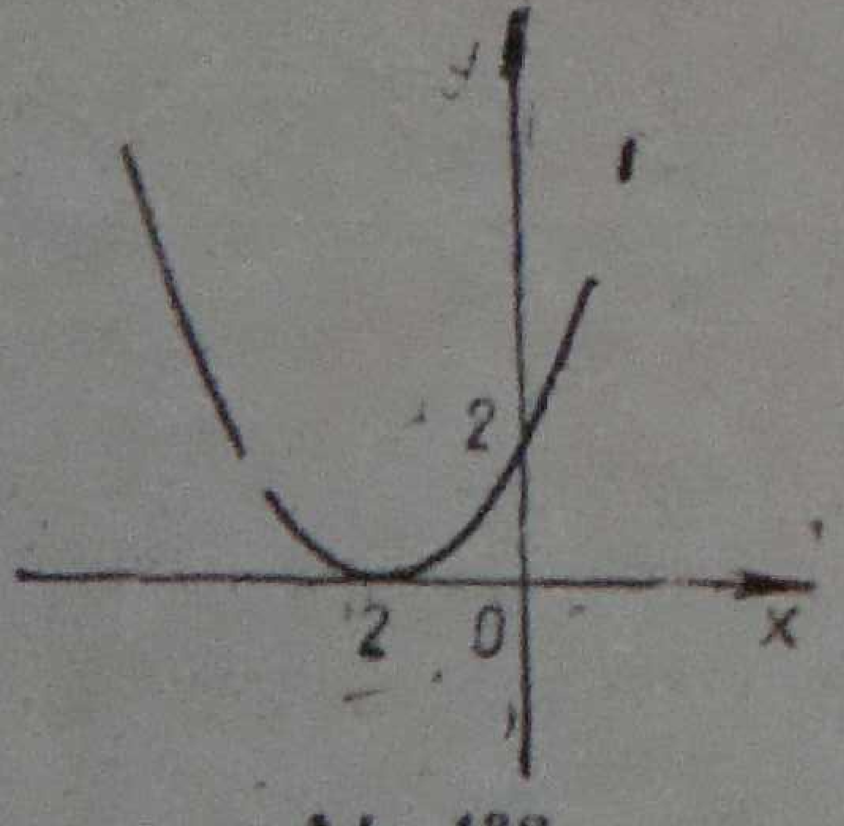
Լուծում: $\frac{1}{2}x^2+2x+2=\frac{1}{2}(x+2)^2$ (նկ. 138)։

Պատասխան. *ա)* $\{x \mid x \in R, x \neq -2\}$, *բ)* $\varnothing$։

Օրինակ 4: Անհավասարությունները լուծել գրաֆիկորեն.

ա) $-\frac{1}{3}x^2+2x-3 \geqslant 0$, *բ)* $-\frac{1}{3}x^2+2x-3<0$։

Լուծում։ $-\frac{1}{3}x^2+2x-3=-\frac{1}{3}(x-3)^2$, (նկ. 139)։



Նկ. 138

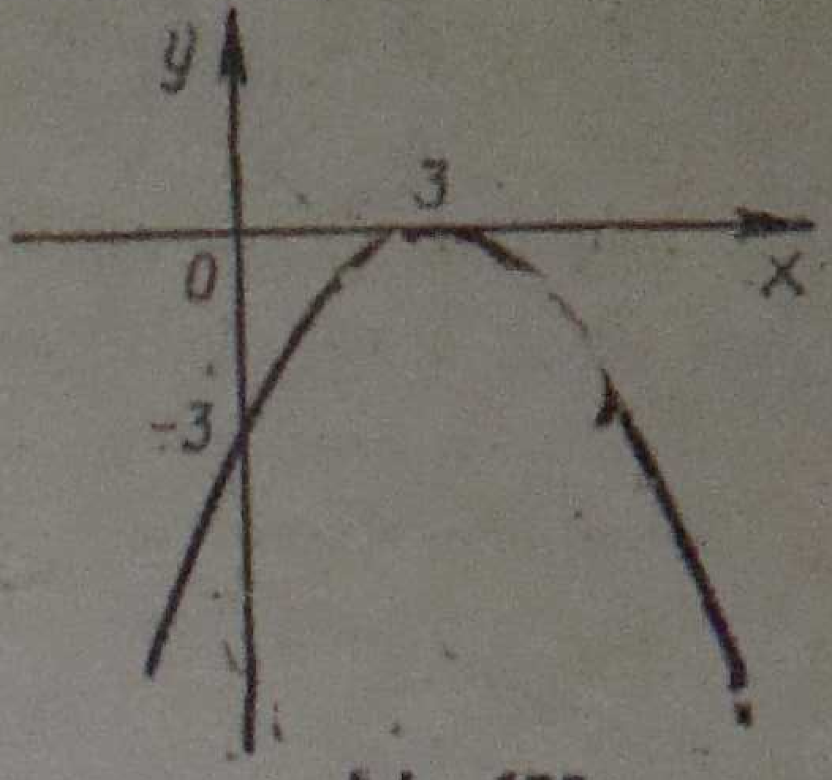
Պատասխան. *ա)* $\{3\}$, *բ)* $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$։

Օրինակ 5: Անհավասարությունները լուծել գրաֆիկորեն.

ա) $\frac{1}{4}x^2+x+2>0$, *բ)* $\frac{1}{4}x^2+x+2<0$։

Լուծում։ $\frac{1}{4}x^2+x+2=\frac{1}{4}(x^2+4x+$

$+8)=\frac{1}{4}((x+2)^2+4)=\frac{1}{4}(x+2)^2+1$



Նկ. 139

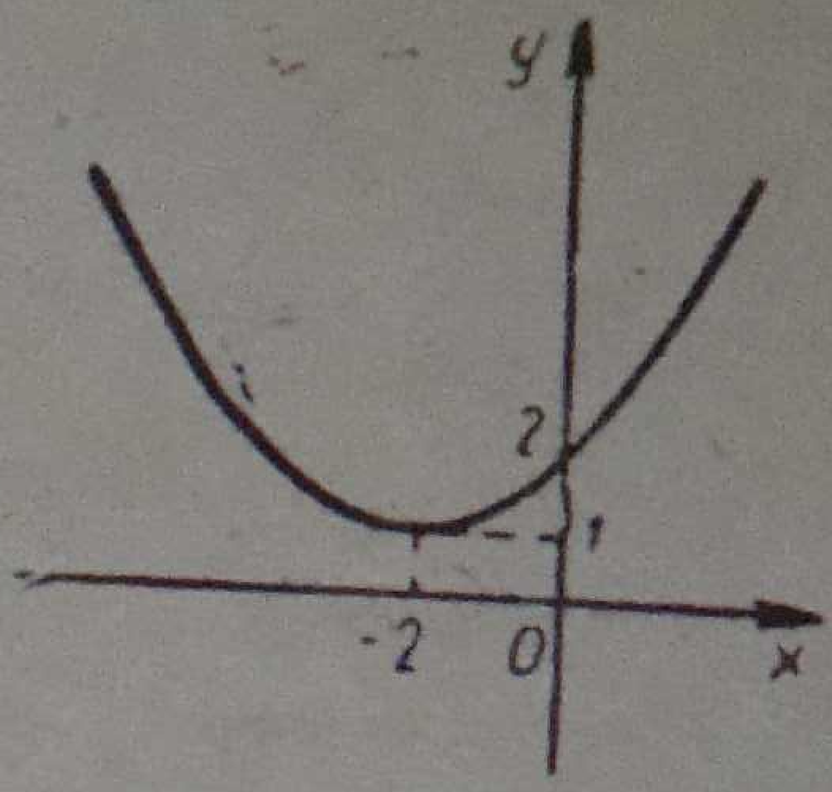
(նկ. 140)։

Պատասխան. ա) $]-\infty; +\infty[$, բ) $\varnothing$։

Օրինակ 6։ *Անհավասարությունները լուծել գրաֆիկորեն.*

ա) $-\frac{1}{3}x^2+2x-5>0$,

բ) $-\frac{1}{3}x^2+2x-5<0$։

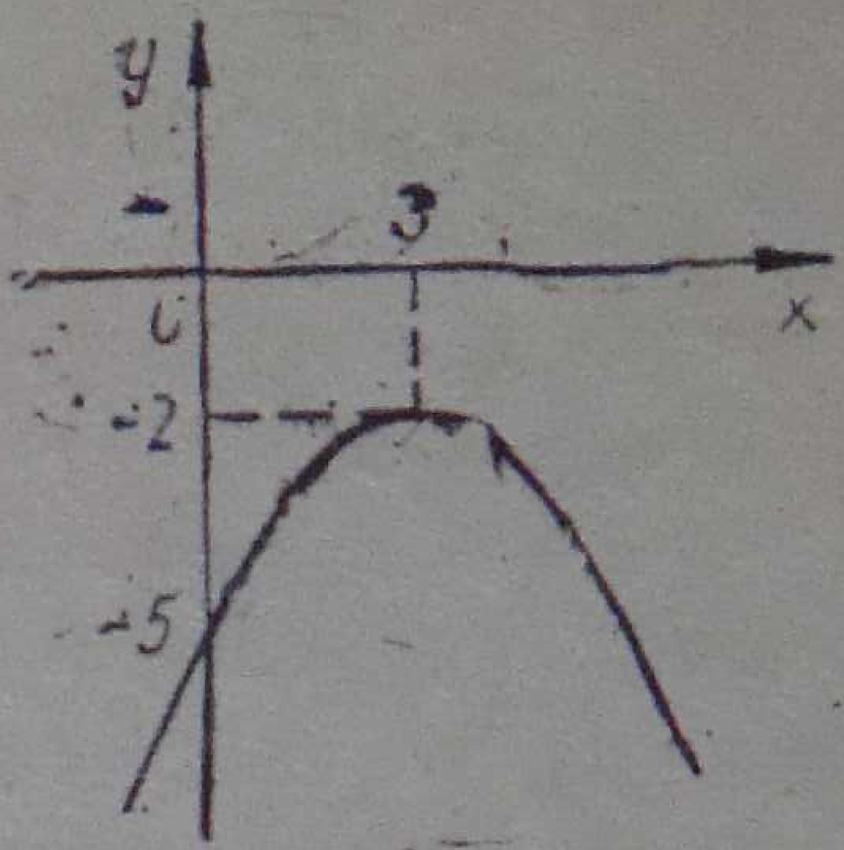


Նկ. 140

Լուծում։ $-\frac{1}{3}x^2+2x-5=-\frac{1}{3}(x^2-$

$-6x+15)=-\frac{1}{3}((x-3)^2+6)=$

$=-\frac{1}{3}(x-3)^2-2$ (նկ. 141)։



Նկ. 141

Պատասխան. ա) $\varnothing$, բ) $]-\infty; +\infty[$։

Վարժություններ

Հետևյալ անհավասարությունները ձևափոխեցեք $ax^2+bx+c>0$ *կամ* $ax^2+bx+c<0$ *տեսքի և լուծեցեք գրաֆիկորեն.*

843. ա) $3x^2-x<x+5$, բ) $2x^2+9>x^2+6x$։

844. ա) $(x-4)(3+2x)<-9$, բ) $x^2+9>5+4x$։

845. ա) $14x-7<2x^2+5$, բ) $2x^2-5>5x-2$։

846. ա) $2x^2+5>3x+4$, բ) $2x^2+20<x^2-12x$։

847. ա) $2x^2-3x+5>0$, բ) $12x^2+3x+1<0$։

848. ա) $2x-3-5x^2>0$, բ) $7x^2-48x-7>0$։

Ինքնուրույն աշխատանք № 18

1. Ստորջրյա թևեր ունեցող կատերը գետի հոսանքի ուղղությամբ գնաց 38 կմ և երկժամյա կանգառից հետո ետ վերադարձավ, այդ ամենի վրա ծախսելով 9 ժ 30 ր։ Հաշվեցեք կատերի սեփական արագությունը, եթե գետի հոսանքի արագությունը 2 կմ/ժ է։

2. Կրճատեցեք $\frac{15x^2-19x-10}{15x^2+31x+10}$ կոտորակը։

3. Կառուցեք $y=\frac{1}{3}(x^2-2x-8)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։

§ 116. ԵՐԿՐՈՐԴ ԵՎ ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՄԵԿԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

x և y երկու փոփոխականով $ax+by=c$ գծային հավասարումը, որտեղ փոփոխականների գործակիցներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից, կոչվում է երկու փոփոխականով առաջին աստիճանի հավասարում (§ 78)։

Միանդամի աստիճան կոչվում է միանդամի մեջ մտնող փոփոխականների աստիճանացույցների գումարը։

Օրինակ, $2x^2y^4$, $-3xy$, x^2y, $\frac{2}{3}x$ միանդամների աստիճանները հավասար են համապատասխանաբար 6, 2, 3 և 1։ Զրոյից տարբեր թիվը համարվում է զրո աստիճանի միանդամ։

x և y երկու փոփոխականով *երկրորդ աստիճանի հավասարում* կոչվում է $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ տեսքի հավասարումը, որտեղ երկրորդ աստիճանի միանդամների a, b և c գործակիցներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից։

Երկու փոփոխականով երկրորդ աստիճանի հավասարումների օրինակներ են $y=ax^2+bx+c$ և $xy=a$ տեսքի հավասարումները, որոնց գրաֆիկներն են համապատասխանաբար պարաբոլը (տես § 113) և հիպերբոլը (տես § 43), ինչպես նաև $x^2+y^2=r^2$ հավասարումը, որի գրաֆիկն է կոորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող r շառավղով շրջանագիծը։

Երկու փոփոխականով երկրորդ աստիճանի երկու հավասարումների համակարգ կոչվում է այն համակարգը, որի հավասարումներից մեկը երկրորդ աստիճանի է, իսկ մյուսը երկուսից ոչ բարձր աստիճանի (այսինքն՝ առաջին կամ երկրորդ աստիճանի)։

Հիշեցնենք (տես § 79), որ երկու փոփոխականով երկու հավասարումների համակարգի լուծում կոչվում է այն կարգավորյալ թվազույգը, որը համակարգի յուրաքանչյուր հավասարման լուծումն է։

Լուծել համակարգը, նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումների բազմությունը։

Սկզբում դիտարկենք այնպիսի համակարգը, որը պարունակում է մեկ երկրորդ և մեկ առաջին աստիճանի հավասարում։ Այսպիսի համակարգը լուծվում է տեղադրման եղանակով.

Օրինակ 1։ $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2-48x+4y-4=0, \\ 3x+y=2. \end{cases}$

y-ն արտահայտենք x-ով և տեղադրենք.

$$y=2-3x, \quad x^2+2x(2-3x)+3(2-3x)^2-48x+4(2-3x)-4=0։$$

Պարզեցնելուց հետո կստանանք.

$$11x^2-46x+8=0, \quad x=\frac{23\pm21}{11}, \quad x_1=\frac{2}{11}, \quad x_2=4։$$

Օգտվելով $y=2-3x$ *տեղադրությունից, կստանանք.*

$$y_1=2-\frac{6}{11}=\frac{16}{11}, \quad y_2=2-12=-10։$$

Այսպիսով, լուծումների բազմությունը կազմված է երկու կարգավորյալ թվազույգերից, այսինքն՝ երկու տարրերից։

Պատասխան. $\left\{\left(\frac{2}{11};\ \frac{16}{11}\right), (4; -10)\right\}$։

Օրինակ 2։ $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2+2x-2y+6=0, \\ y-x=1։ \end{cases}$

Լուծում.

$$y=x+1, \quad 2x^2-x(x+1)-(x+1)^2+2x-2(x+1)+6=0։$$

Այս հավասարումը, բանից պարզվում է, քառակուսի հավասարում չէ, քանի որ պարզեցումներից հետո ստացվում է $x=1$։ *Օգտագործելով* $y=x+1$ *տեղադրությունը, կստանանք՝* $y=2$։

Լուծումների բազմությունը կազմված է մեկ կարգավորյալ թվազույգից, այսինքն՝ մեկ տարրից։

Պատասխան. $\{(1; 2)\}$։

Օրինակ 3։ $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ 4x-3y=25։ \end{cases}$

Լուծենք.

$$x=\frac{3y+25}{4}, \quad \left(\frac{3y+25}{4}\right)^2+y^2=25,$$

$$9y^2+150y+625+16y^2=400,$$

$$25y^2+150y+225=0, \quad y^2+6y+9=0,$$

$$(y+3)^2=0, \quad y=-3։$$

Տեղադրությունից կստանանք՝ $x=\frac{-9+25}{4}=4$,

Պատասխան. $\{4; -3\}$։

Օրինակ 4: $\begin{cases} x^2+y^2+4x-8y+19=0, \\ 2x-y+4=0, \end{cases}$

Լուծենք.

$$y=2x+4,$$

$$x^2+(4x^2+16x+16)+4x-8(2x+4)+19=0,$$

$$5x^2+4x+3=0, \quad D=16-60<0,$$

ուստի քառակուսի հավասարումը արմատներ չունի, տրված համակարգը լուծումներ չունի։

Պատասխան. $\varnothing$։

Վարժություններ

Լուծենք հավասարումների համակարգերը.

849. ա) $\begin{cases} xy=-24, \\ x-y=11, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3a^2-2b^2=38, \\ 5a-3b=-5; \end{cases}$

850. ա) $\begin{cases} ab=35, \\ a+b=12, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^2=20-y^2, \\ x+y=6; \end{cases}$

851. ա) $\begin{cases} x+y=16, \\ xy=63, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} a^2-b^2=19+ab, \\ a-b=7; \end{cases}$

852. ա) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=-75, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y^2=41-x^2, \\ y-x=1; \end{cases}$

853. ա) $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=-45, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} a^2=2-ab, \\ 3a=b-7, \end{cases}$

854. ա) $\begin{cases} x-2y=2, \\ y^2=x^2-32, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^3+y^3=208, \\ x+y=4; \end{cases}$

855. ա) $\begin{cases} x^3-y^3=37, \\ x-y=1, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^2+y^2=6y, \\ 2x+y=0; \end{cases}$

856. Լուծեցեք համակարգը, որը կազմված է երկրորդ աստիճանի

$$x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$$

հավասարումից և հետևյալ գծային հավասարումներից որևէ մեկից.

ա) $5x-y=5$, գ) $x-3y=0$,

բ) $x+4y=1$, դ) $x+2x+2=0$։

§ 117. ԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԵՐԿՈՒ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Դիտարկենք երկու փոփոխականով երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգերի լուծման օրինակներ։

Օրինակ 1:
$$\begin{cases} x^2+5y^2+15y-29=0, \\ y^2+2x+3y-10=0։ \end{cases}$$

Այս համակարգը տեղադրման եղանակով լուծել չի հաջողվում, եթե երկրորդ հավասարումից x-ն արտահայտենք y-ով և ստացված արտահայտությունը տեղադրենք առաջին հավասարման մեջ, ապա կհանգենք չորրորդ աստիճանի հավասարման, որը մենք լուծել չգիտենք։

Սակայն այս համակարգը կարելի է լուծել այլ ճանապարհով։ Երկրորդ հավասարման մեջ կա y^2+3y գումարը, իսկ առաջինում՝ $5y^2+15y$ գումարը։ Ուստի եթե երկրորդ հավասարումը անդամ առ անդամ բազմապատկենք 5-ով, ապա համակարգը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\begin{cases} 5y^2+15y=29-x^2, \\ 5y^2+15y=5(10-2x)։ \end{cases}$$

Այստեղից կարելի է կազմել քառակուսի հավասարում՝ $29-x^2=50-10x$, $x^2-10x+21=0$, $x_1=3$, $x_2=7$։ x-ի ստացված արժեքները տեղադրենք, օրինակ, համակարգի առաջին հավասարման մեջ։

1) $x=3$ դեպքում կստանանք՝ $9+5y^2+15y-29=0$, $y^2+3y-4=0$, $y_1=-4$, $y_2=1$։ Ստացանք երկու լուծում. $(3; 4)$ և $(3; 1)$։

2) $x=7$ դեպքում կստանանք՝ $49+5y^2+15y-29=0$, $y^2+3y+4=0$։ Հավասարումը արմատներ չունի։

Պատասխան. $\{3; -4), (3; 1)\}$։

Օրինակ 2:
$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12, \end{cases}$$

Երկրորդ հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք 2-ով և նախ անդամ առ անդամ գումարենք ստացված և առաջին հավասարումները, իսկ այնուհետև առաջին հավասարումից հանենք ստացվածը, այդ դեպքում կստանանք այսպիսի համակարգ.

$$\begin{cases} (x+y)^2=49, \\ (x-y)^2=1, \end{cases}$$

Վերջինս տրոհվում է չորս գծային համակարգերի.

$$\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=7, \\ x-y=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-7, \\ x-y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-7, \\ x-y=-1, \end{cases}$$

Սկզբնական համակարգի լուծումների բազմությունը պարունակում է չորս տարր. $\{(4; 3), (3; 4), (-3; -4), (-4; -3)\}$,

Խ ն դ ի ր: A և B վայրերի միջև ճանապարհը կազմված է վերելքից և վայրէջքից։ Հեծանվորդը, որի արագությունը վայրէջքի դեպքում 6 կմ/ժ-ով մեծ է, քան վերելքի դեպքում, A-ից B ճանապարհն անցավ 2 ժ 40 ր-ում, իսկ հետադարձը՝ 20 ր-ով շուտ։ Գտնել հեծանվորդի արագությունը վերելքի և վայրէջքի դեպքում և A-ից B ուղղությամբ վերելքի երկարությունը, եթե ամբողջ ճանապարհի երկարությունը 36 կմ է։

Վերելքի և վայրէջքի սահմանագիծը նշանակենք C տառով և կազմենք հետևյալ աղյուսակը.

Շարժման ուղղությունը	s	v	t
A-ից C	x	y	$\frac{x}{y}$
C-ից B	36—x	y+6	$\frac{36-x}{y+6}$
B-ից C	36—x	y	$\frac{36-x}{y}$
C-ից A	x	y+6	$\frac{x}{y+6}$

Այժմ կազմենք հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{36-x}{y+6}=\frac{8}{3}, \\ \frac{36-x}{y}+\frac{x}{y+6}=\frac{7}{3}. \end{cases}$$

Ազատվելով կոտորակներից և պարզեցնելով, կստանանք երկրորդ աստիճանի հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 4y^2-9x-30y=0, \\ 7y^2+18x-66y-648=0. \end{cases}$$

Առաջին հավասարումից կստանանք.

$$x=\frac{4x^2-30y}{9},$$

x-ի այս արժեքը տեղադրենք երկրորդ հավասարման մեջ։ Պարզեցումներից հետո կստանանք. $5y^2-42y-216=0$, որտեղից էլ՝ $y_1=-\frac{18}{5}$, $y_2=12$ և համապատասխանաբար՝ $x_1=-\frac{444}{25}$, $x_2=24$.

Երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգի այս երկու լուծումներն էլ բավարարում են սկզբնական համակարգին, բայց խնդրին բավարարում է միայն (24; 12) լուծումը։

Այսպիսով, ճանապարհի AC հատվածի երկարությունը 24 կմ է, արագությունը վերելքի և վայրէջքի դեպքում համապատասխանաբար 12 և 18 կմ/ժ։

Վարժություններ

Լուծեցեք հավասարումների համակարգերը.

857. ա) $\begin{cases} 2x^2+40=5y^2+2x, \\ x+3y^2=x^2+28, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 5x^2+3y^2=47, \\ 3x+12=2y^2, \end{cases}$

858. ա) $\begin{cases} 3x^2+2y^2=29, \\ x^2+3y=6, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^2-5x=y^2-6, \\ 10x-12=2x^2-3y^2, \end{cases}$

Լուծեցեք խնդիրները.

859. Երկու դրական թվեր հարաբերում են ինչպես 3 : 7։ Եթե դրանցից յուրաքանչյուրը փոքրացնենք 5-ով, ապա նոր թվերի քառակուսիների գումարը հավասար կլինի 82-ի։ Գտեք տրված թվերը։

860. Երկու թվերի քառակուսիների գումարը հավասար է 208-ի, եթե առաջին թվին ավելացնենք 2, իսկ երկրորդից հանենք 2, ապա նոր թվերի քառակուսիների գումարը հավասար կլինի 200-ի։ Գտեք տրված թվերը։

861. Տրված է երկու թիվ։ Եթե դրանց արտադրյալին ավելացնենք փոքր թիվը, ապա կստացվի 54, իսկ եթե մեծ թիվը՝ ապա 56։ Գտեք այդ թվերը։

862. Երկու թվերի տարբերությունը հավասար է 1-ի, իսկ այդ թվերի խորանարդների տարբերությունը՝ 61-ի։ Գտեք այդ թվերը։

863. Տրված կոտորակի համարիչի և հայտարարի քառակուսիների գումարը հավասար է 25-ի։ Տրվածի և նրան հակադարձ կոտորակի գումարը հավասար է $2\frac{1}{12}$-ի։ Գտեք այդ կոտորակը։

864. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկի երկարությունը 1 մ-ով փոքր է ներքնաձիգի երկարությունից։ Այդ էջի և ներքնաձիգի երկարությունների գումարը 5 անգամ մեծ է մյուս էջի երկարությունից։ Գտեք եռանկյան կողմերի երկարությունները։

865. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի երկարությունը 61 սմ է, իսկ մակերեսը՝ 330 սմ²։ Գտեք եռանկյան էջերի երկարությունները։

866. Միևնույն կետի նկատմամբ ուղիղ անկյան տակ կիրառված երկու ուժերի համազորը հավասար է 17 Ն-ի։ Եթե այդ ուժերից յուրաքան-

չյուրը փոքրացնենք 3 Ն-ով, ապա դրանց համազորը հավասար կլինի 13 Ն։ Գտեք գործող ուժերի մեծությունները։

§ 118. ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԻ ՀԱՏՄԱՆ ԵՎ ՇՈՇԱՓՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Խնդիր 1։ Գտեք հետևյալ ուղիղներից յուրաքանչյուրի հետ $y=\frac{1}{4}x^2-x-3$ պարաբոլի հատման կետերի կոորդինատները.

1) $x-y=3$, 3) $x-y=9$,

2) $x-y=7$, 4) $2x+3=0$։

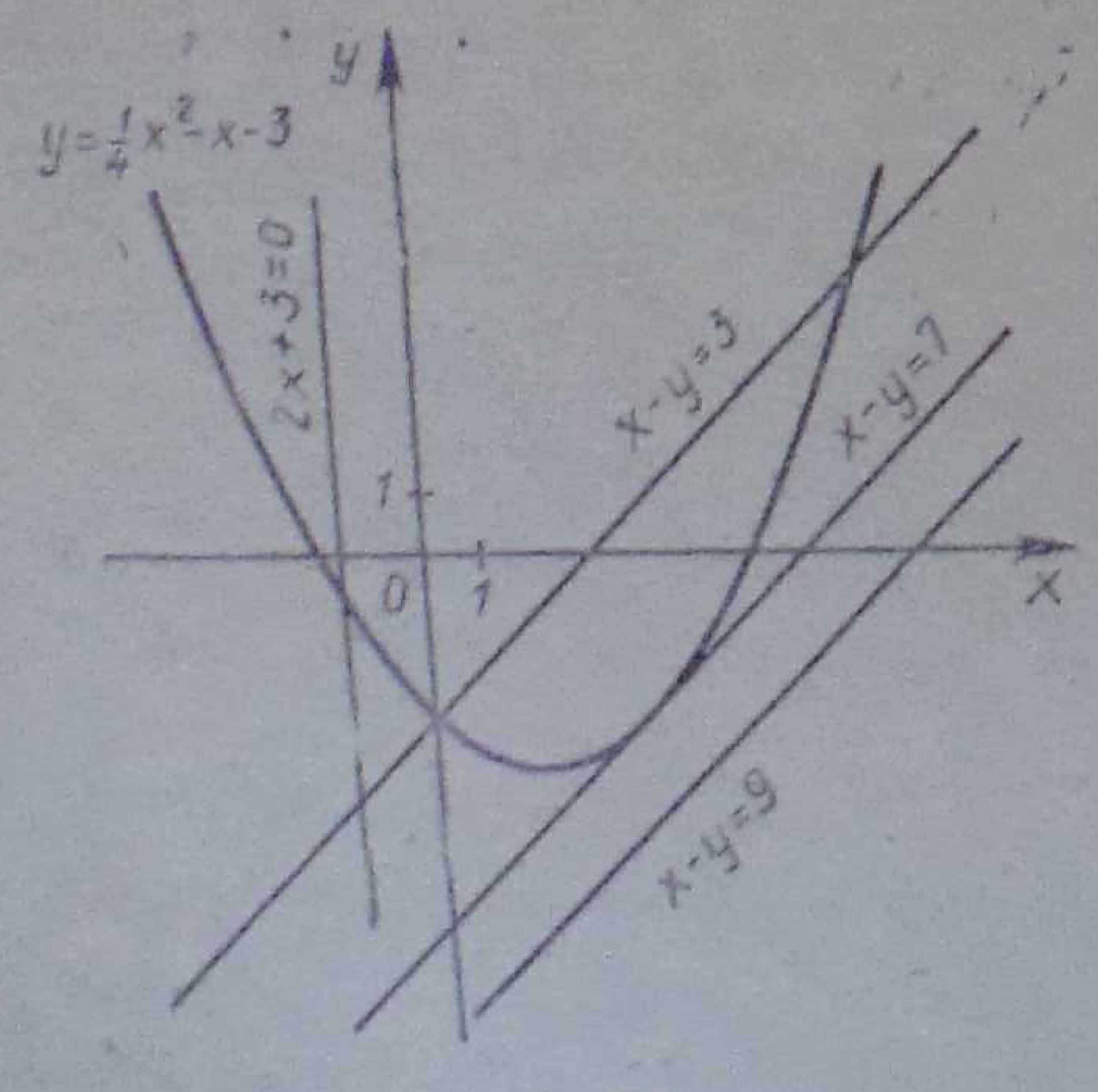
Լուծում. Կազմենք և լուծենք հավասարումների հետևյալ համակարգերը.

1) $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2-x-3, \\ x-y=3, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2-x-3, \\ x-y=9, \end{cases}$

2) $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2-x-3, \\ x-y=7, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2-x-3, \\ 2x+3=0. \end{cases}$

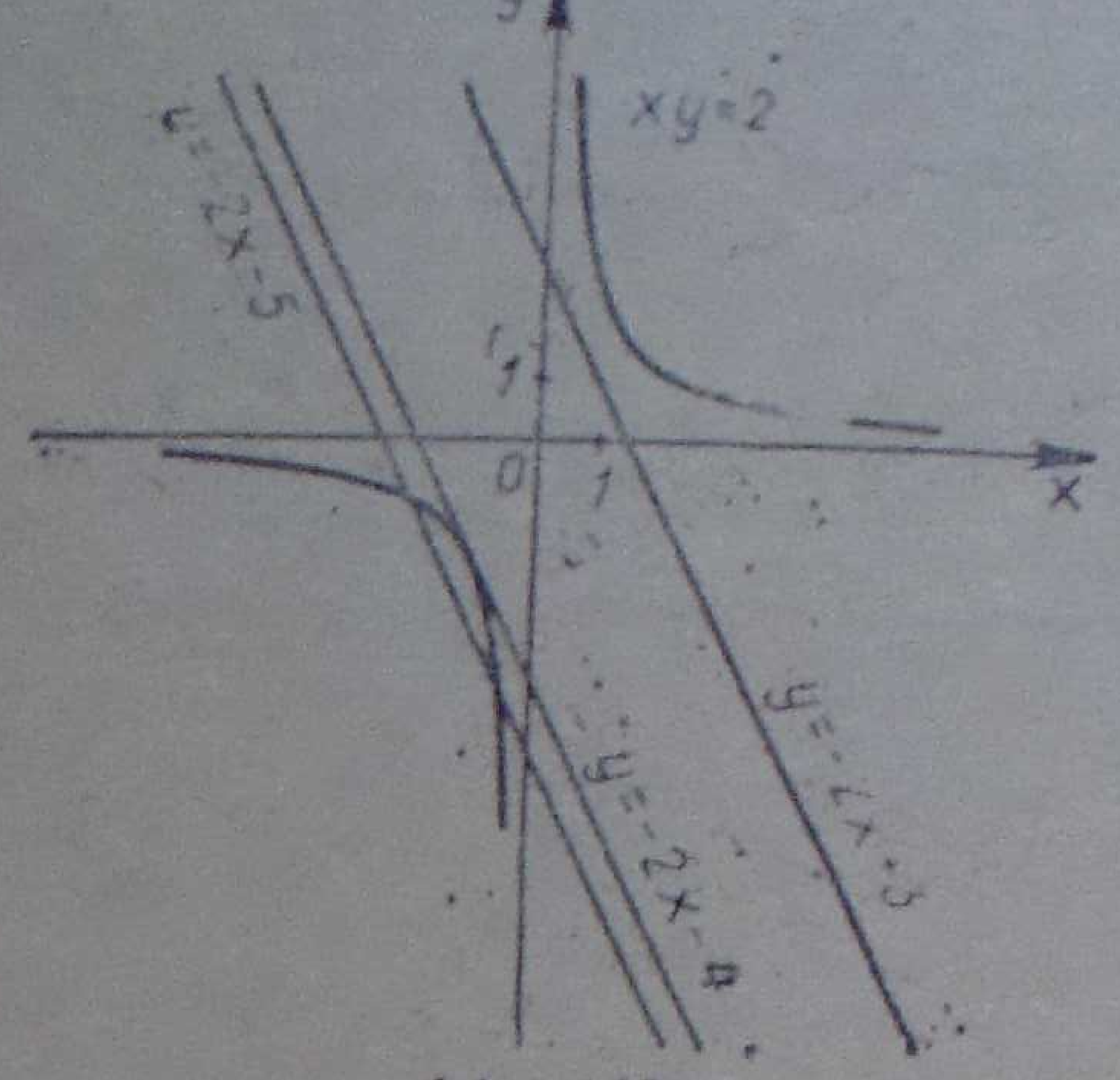
Առաջին համակարգն ունի երկու լուծում՝ $(0; -3)$ և $(8; 5)$, երկրորդն ունի մեկ լուծում՝ $(4; -3)$, երրորդ համակարգը լուծում չունի, չորրորդն ունի մեկ լուծում՝ $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{13}{16}\right)$։

Կառուցենք պարաբոլը։ Նրա գագաթի կոորդինատներն են $(2; -4)$։ Պարաբոլը $0x$ առանցքը հատում է $(-2; 0)$ և $(6; 0)$ կետերում, իսկ $0y$ առանցքը՝ $(0; -3)$ կետում։ Կառուցենք նաև տրված ուղիղներից յուրաքանչյուրը (նկ. 142)։

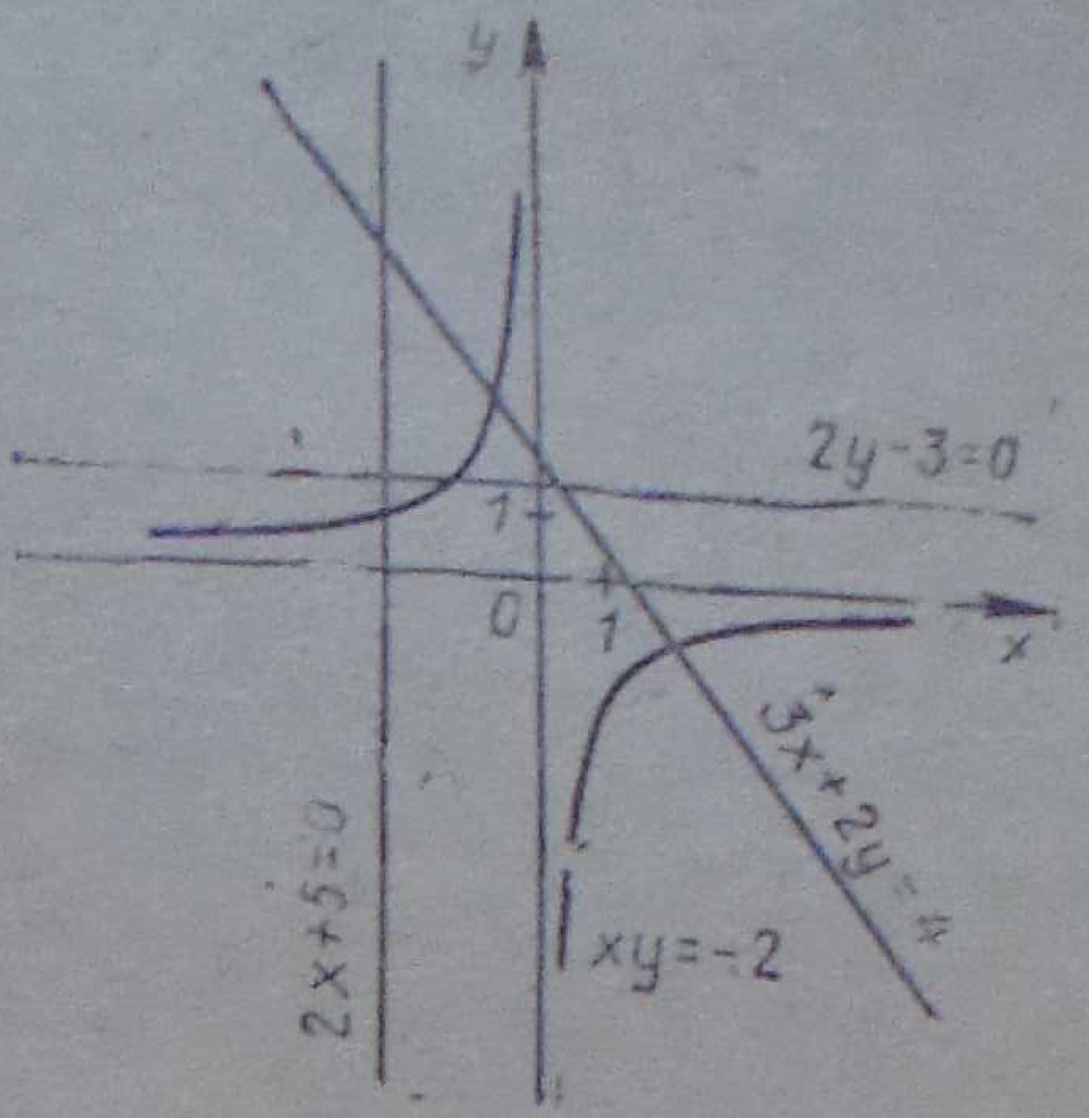


Նկ. 142

Նկարից երևում է, որ $x-y=3$ ուղիղը և պարաբոլը հատվում են երկու կետում, $x-y=7$ ուղիղը շոշափում է պարաբոլը, $x-y=9$ ուղիղը և պարաբոլը ընդհանուր կետեր չունեն, $2x+3=0$ ուղիղը և պարաբոլը հատվում են մեկ կետում։



Նկ. 143



Նկ. 144

Խ ն դ ի ր 2: Գտնք $y=-2x-5$, $y=-2x-4$, $y=-2x+3$ ուղիղներից յուրաքանչյուրի հետ $xy=2$ հիպերբոլի հատման կետերի կոորդինատները, ինչպես նաև $3x+2y=4$, $2y+5=0$ և $2y-3=0$ ուղիղների հետ $xy=-2$ հիպերբոլի հատման կետերը։

Լ ու ծ ու մ։ Կազմենք և լուծենք հավասարումների հետևյալ համակարգերը.

1) $\begin{cases} xy=2, \\ y=-2x-5, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=2, \\ y=-2x+3, \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=-2, \\ 2x+5=0, \end{cases}$

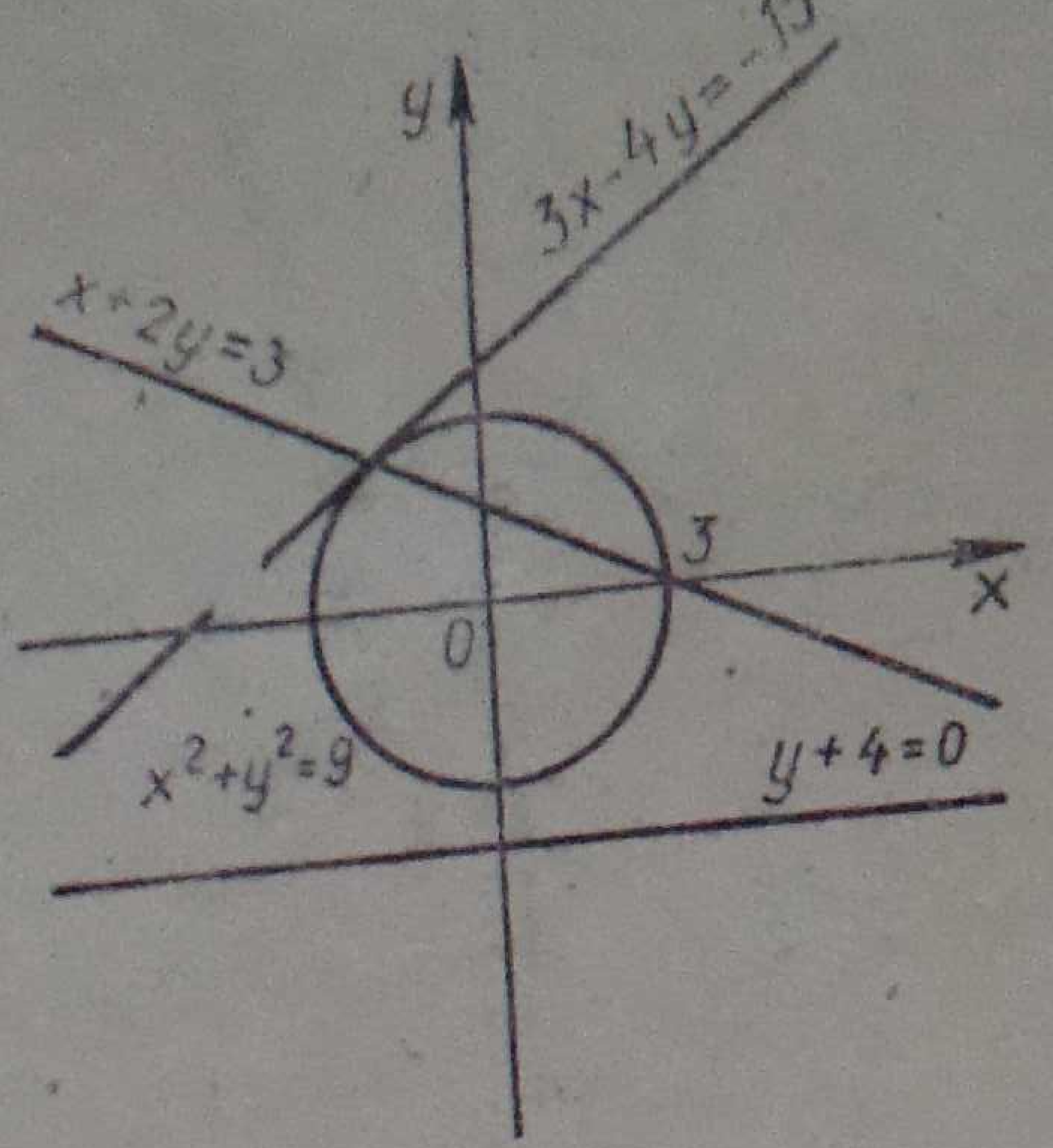
2) $\begin{cases} xy=2, \\ y=-2x-4, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy=-2, \\ 3x+2y=4, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} xy=-2, \\ 2y-3=0։ \end{cases}$

Առաջին համակարգն ունի երկու լուծում՝ $(-\frac{1}{2}; -4)$, $(-2; -1)$, երկրորդը մեկ՝ $(-1; -2)$, երրորդը լուծում չունի, չորրորդը երկու լուծում՝ $(-\frac{2}{3}; 3)$ և $(2; -1)$, հինգերորդը մեկ՝ $(-\frac{5}{2}; \frac{4}{5})$, վեցերորդը՝ մեկ $\left(-\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right)$։

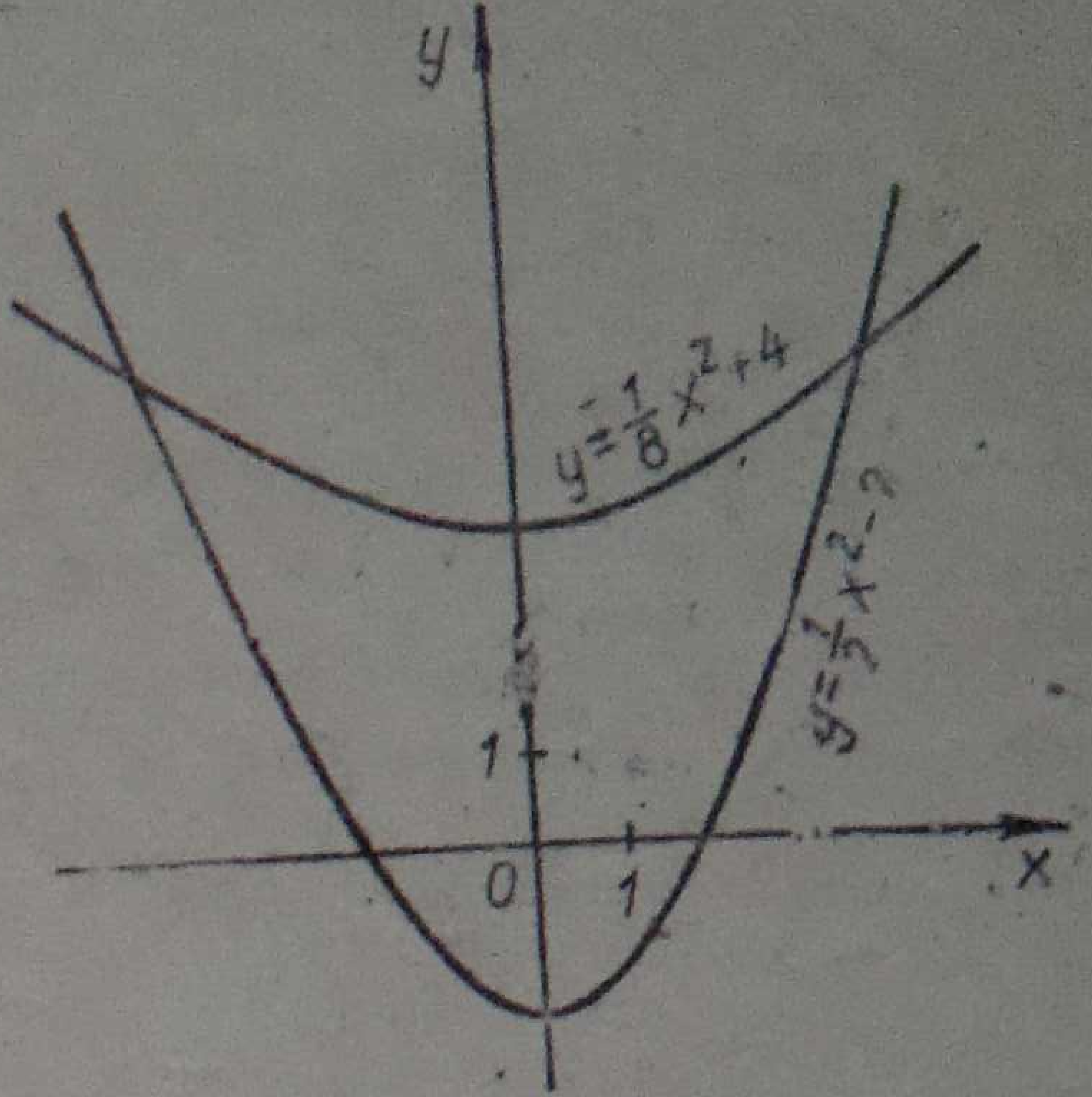
143-րդ նկարից երևում է, որ $xy=2$ հիպերբոլը $y=-2x-5$ ուղղի հետ հատվում է երկու կետում, շոշափում է $y=-2x-4$ ուղիղը և ընդհանուր կետեր չունի $y=-2x+3$ ուղղի հետ։

$xy=-2$ հիպերբոլը $3x+2y=4$ ուղղի հետ հատվում է երկու կետում, իսկ $2x+5=0$ և $2y-3=0$ ուղիղների հետ ունի մեկական ընդհանուր կետ (Նկ. 144)։

Խ ն դ ի ր 3: Գտնք $x+2y=3$, $3x-4y=-15$, $y=-4$, ուղիղներից յուրաքանչյուրի հետ $x^2+y^2=9$ շրջանագծի հատման կետերը։



Նկ. 145



Նկ. 146

Լուծում։ Կազմենք և լուծենք հավասարումների հետևյալ համակարգերը.

1) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x+2y=3, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ 3x-4y=-15, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=-4. \end{cases}$

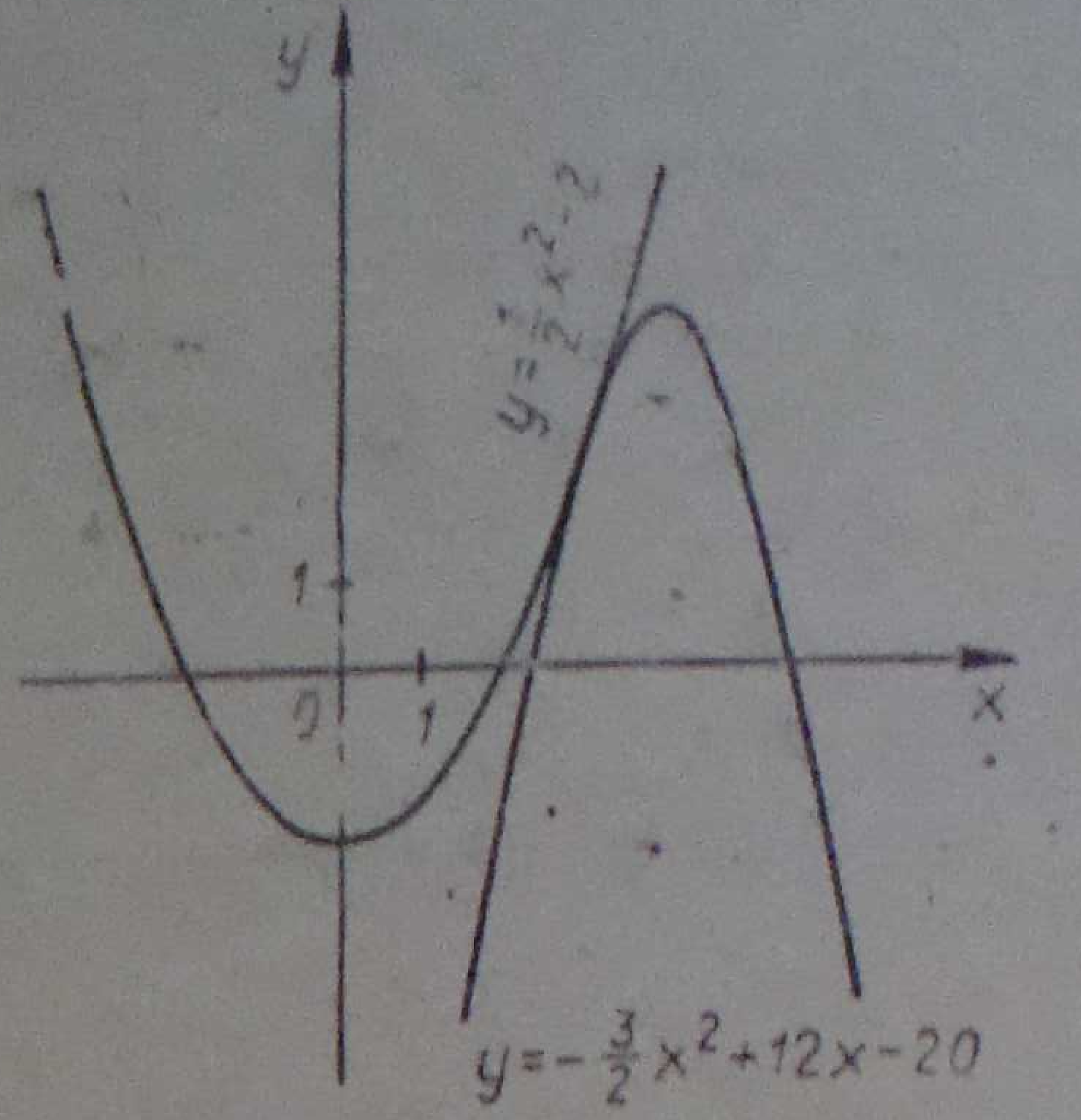
Առաջին համակարգն ունի երկու լուծում՝ $(3;\ 0)$ և $\left(-\frac{9}{5};\ \frac{12}{5}\right)$, երկրորդը՝ մեկ $\left(-\frac{9}{5};\ \frac{12}{5}\right)$, երրորդը՝ լուծում չունի։

145-րդ նկարից երևում է, որ շրջանագիծը $y+2y=3$ ուղղի հետ հատվում է երկու կետում, շոշափում է $3x-4y=-15$ ուղիղը, իսկ $y=-4$ ուղղի հետ չունի ոչ մի ընդհանուր կետ։

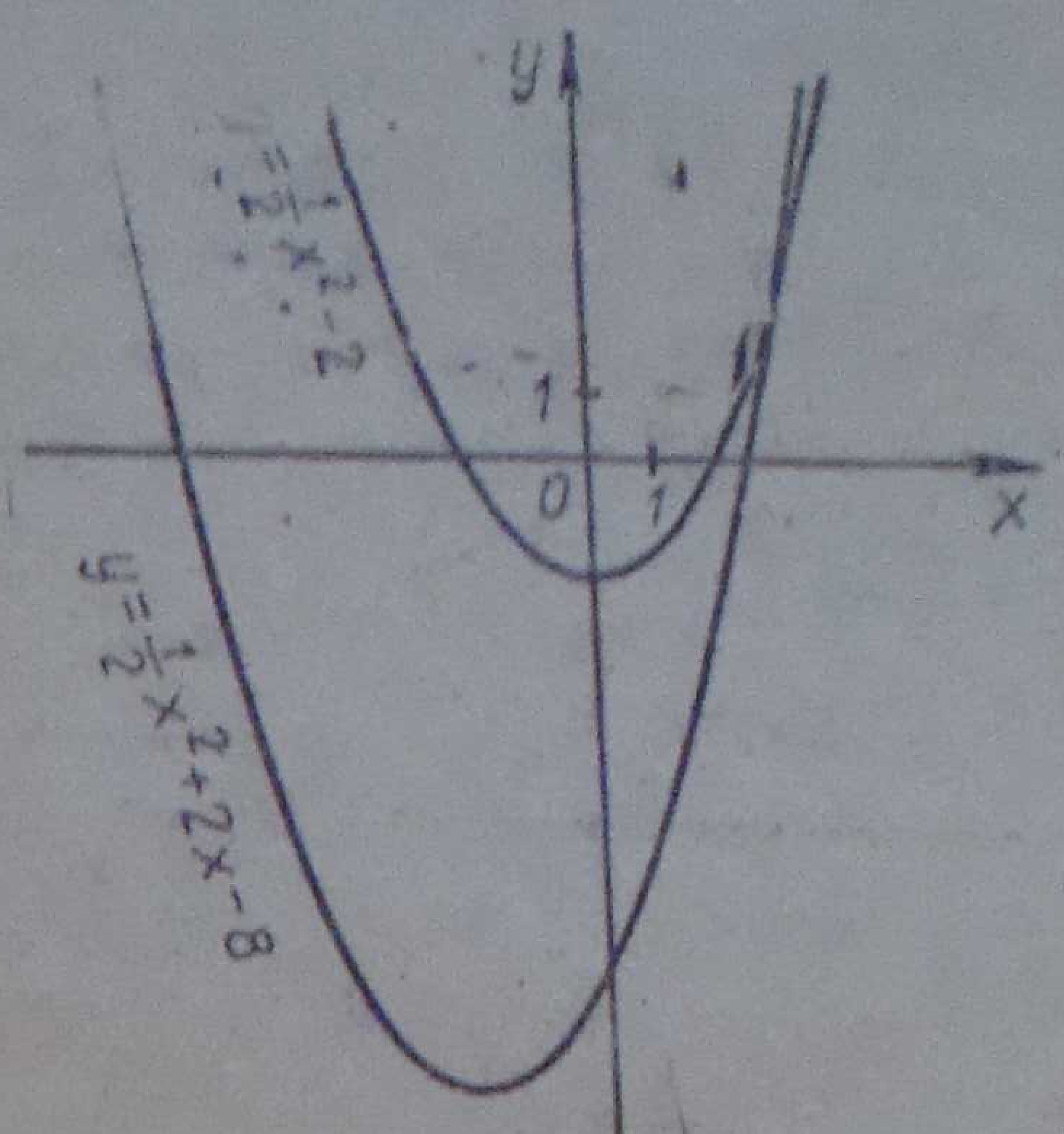
Խնդիր 4։ Գտեք $y=\frac{1}{8}x^2+4$, $y=-\frac{3}{2}x^2+12x-20$, $y=\frac{1}{2}x^2+2x-8$ պարաբոլներից յուրաքանչյուրի հետ $y=\frac{1}{2}x^2-2$ պարաբոլի ունեցած ընդհանուր կետերը։

Լուծում։ Կազմենք հավասարումների հետևյալ համակարգերը և լուծենք.

1) $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-2, \\ y=\frac{1}{8}x^2+4, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-2, \\ y=\frac{1}{2}x^2+2x-8. \end{cases}$



Նկ. 147



Նկ. 148

2) $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-2, \\ y=-\frac{3}{2}x^2+12x-20. \end{cases}$

Առաջին համակարգն ունի երկու լուծում՝ (4; 6) և (—4; 6), երկրորդը՝ մեկ (3; 2,5), երրորդը նույնպես մեկ լուծում՝ (3; 2,5)։

$y=\frac{1}{2}x^2-2$ պարաբոլն առաջին պարաբոլի հետ հատվում է երկու կետում (նկ. 146), շոշափում է երկրորդ պարաբոլը (նկ. 147), իսկ երրորդի հետ հատվում է մեկ կետում (նկ. 148)։

Ինքնուրույն աշխատանք № 19

1. Ուղղանկյուն եռանկյան պարագիծը հավասար է 30 սմ, իսկ ներքնաձիգի երկարությունը՝ 13 սմ։ Գտեք այդ եռանկյան էջերի երկարությունները։

2. $2x^2-15x+7>0$ անհավասարությունը լուծեցեք գրաֆիկորեն։

3. Լուծեցեք հավասարումների $\begin{cases} 4y-x=20, \\ \frac{3x-1}{x+1}-\frac{1}{y-1}=\frac{10-y}{(1-y)(1+x)} \end{cases}$ համակարգը։

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ո՞ր տիպի հավասարումն է կոչվում քառակուսի հավասարում։ Բացատրեցեք թերի քառակուսի հավասարումների լուծումը։

2. Ի՞նչն է կոչվում քառակուսի հավասարման տարբերիչ։ Արտածեք քառակուսի հավասարման արմատների բանաձևը դրական տարբերիչի դեպքում։

3. Բացատրեցեք քառակուսի հավասարման լուծումը բացասական տարբերիչի և զրոյի հավասար տարբերիչի դեպքում։

4. Բառերով ձևակերպեցեք քառակուսի հավասարման արմատների բանաձևը։

5. Ապացուցեք Վիետի թեորեմը։

6. Արտածեք քառակուսի եռանդամը արտադրիչների վերլուծելու բանաձևը։

7. Տրված է $y=ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Ինչպե՞ս կարելի է կառուցել $y=ax^2+n$ և $y=a(x+m)^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։

8. Տրված է $y=ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Ինչպիսի՞ երկու եղանակով կարելի է կառուցել $y=a(x+m)^2+n$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։

9. Բացատրեցեք քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման պլանը ըստ բնորոշ կետերի։

10. Բացատրեցեք քառակուսի անհավասարության գրաֆիկական լուծումը։

ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱՆԵՐ

§ 119. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ։ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԱՆԱՁԵՎՈՎ ՏԱԼԸ։

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ։

Օրինակ 1: Ամեն մի բնական թվի համապատասխանության մեջ դնենք իր քառակուսուն հավասար թիվը։ Այսպիսի համապատասխանությունը ֆունկցիա է, որի որոշման տիրույթը բոլոր բնական թվերի N բազմությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ դրանց քառակուսիների բազմությունը։ Այդ համապատասխանությունը կարելի է գրել այսպես.

$$1\to 1,\ 2\to 4,\ 3\to 9,\ \ldots,\ n\to n^2,\ \ldots$$

Օրինակ 2: Դիցուք յուրաքանչյուր բնական թվի համապատասխանում է իր հակադարձ թիվը։ Այդ համապատասխանությունը ֆունկցիա է, որի որոշման տիրույթը N բազմությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $\frac{1}{n}$ տեսքի թվերի բազմությունը։ Այդ համապատասխանությունը գրենք այսպես.

$$1\to 1,\ 2\to \frac{1}{2},\ 3\to \frac{1}{3},\ \ldots,\ n\to \frac{1}{n},\ldots$$

Օրինակ 3: Յուրաքանչյուր n, $n\in N$ թվի համապատասխանության մեջ դնենք $(-1)^{n+1}$ արտահայտության արժեքին հավասար թիվը։ n-ի զանկացած կենտ արժեքի դեպքում այդ արտահայտությունը ընդունում է 1 արժեքը, իսկ զույգի դեպքում՝ —1 արժեքը։ Ուստի.

$$1\to 1,\ 2\to -1,\ 3\to 1,\ 4\to -1,\ \ldots,\ n\to (-1)^{n+1},\ \ldots$$

Տրված համապատասխանությունը ֆունկցիա է. Նրա որոշման տիրույթը N բազմությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $\{-1;\ 1\}$ բազմությունը, որը պարունակում է միայն երկու տարր՝ —1 և 1։

Օրինակ 4: Դիցուք յուրաքանչյուր բնական թվի համապատասխանում է միևնույն 5 թիվը։ Այսպիսի համապատասխանությունը ֆունկցիա է. Նրա որոշման տիրույթը N բազմությունն է, իսկ արժեքների տի-

բույթը պարունակում է միայն մեկ տարր՝ 5 թիվը։

Սահմանում: Անվերջ հաջորդականություն կոչվում է բոլոր բնական թվերի վրա տրված ֆունկցիան:

1—4 օրինակներում դիտարկված ֆունկցիաները անվերջ հաջորդականությունների օրինակներ են։ Հաջորդականության այն արժեքները, որը նա ընդունում է արգումենտի 1-ի, 2-ի, 3-ի և այլնի համապատասխան արժեքների դեպքում, կոչվում է հաջորդականության 1-ին, 2-րդ, 3-րդ և այլն անդամներ: Հաջորդականության անդամները նշանակվում են համար (ինդեքս) ունեցող տառերով, օրինակ, a_1 (a առաջին), a_2 (a երկրորդ) a_3 (a երրորդ) և այլն։ Հաջորդականության n համարով անդամը նշանակվում է a_n (a էներորդ)։ Հաջորդականությունը նշանակվում է այսպես՝ (a_n)։

(a_n) անվերջ հաջորդականությունը կարելի է գրել այսպես.

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \cdots;\ a_n\ \cdots,$$

Սահմանում: Վերջավոր հաջորդականություն կոչվում է առաջին n բնական թվերի վրա տրված ֆունկցիան:

Օրինակ 5: *1-ից 8 թվերի խորանարդների հաջորդականությունը ֆունկցիա է, որոշված այնպիսի n բնական թվերի բազմության վրա, որոնք՝ $1 \leqslant n \leqslant 8$։ Այդ հաջորդականությունը այսպիսին է.*

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,$$

Հաջորդականությունը պարունակում է 8 անդամ։

1-ից 4 օրինակներում բերված հաջորդականությունները գրենք հետևյալ տեսքով.

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ldots,$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ldots,$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots,$$

$$5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \ldots,$$

Այս հաջորդականությունները նշանակենք համապատասխանաբար (a_n), (b_n), (c_n) և (d_n)։

Առաջին հաջորդականության համար՝ $a_1=1,\ a_2=4,\ \ldots,\ a_n=n^2,\ldots,$

Երկրորդ հաջորդականության համար՝ $b_1=1, b_2=\frac{1}{2},\ldots, b_n=\frac{1}{n}\ \ldots,$

Երրորդ հաջորդականության համար՝ $c_1=1,\ c_2=-1,\ c_3=1,\ \ldots,\ c_n=(-1)^{n+1},\ldots,$

Չորրորդ հաջորդականության համար՝ $d_1=5$, $d_2=5$, $\ldots$, $d_n=5, \ldots$։

Հաջորդականության ցանկացած անդամը նրա համարով արտահայտող բանաձևը կոչվում է **հաջորդականության n-րդ անդամի բանաձև**։

Այդպիսին են, օրինակ, հետևյալ բանաձևերը. $a_n=n^2$, $b_n=\frac{1}{n}$ և այլն։

Գիտենալով հաջորդականության n-րդ անդամի բանաձևը, կարելի է գտնել նրա ցանկացած անդամի արժեքը։

Օրինակ 6: Հաջորդականությունը տրված է $a_n=\frac{6(n-1)}{n}$ բանաձևով։ Հաշվել նրա առաջին վեց անդամները։

Հաջորդականության առաջին անդամը՝ a_1-ը, կարելի է հաշվել n-րդ անդամի բանաձևում n-ի փոխարեն 1 թիվը տեղադրելով, կստանանք $a_1=0$։ n-րդ անդամի բանաձևում n-ի փոխարեն տեղադրելով 2, կստանանք հաջորդականության երկրորդ անդամը՝ $a_2=3$։

Այնուհետև, n-րդ անդամի բանաձևում n-ի փոխարեն հաջորդաբար տեղադրելով 3, 4, 5 և 6, կստանանք հաջորդականության համապատասխանաբար երրորդ, չորրորդ, հինգերորդ և վեցերորդ անդամները. $a_3=4$, $a_4=4\frac{1}{2}$, $a_5=4\frac{4}{5}$, $a_6=5$։

Օրինակ 7: Հաշվել (y_n) հաջորդականության առաջին հինգ անդամները և 20-րդ անդամը, եթե $y_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$։

Կստանանք՝ $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=1$, $y_3=\frac{7}{10}$, $y_4=\frac{9}{17}$, $y_5=\frac{11}{26}$, $y_{20}=\frac{41}{401}$։

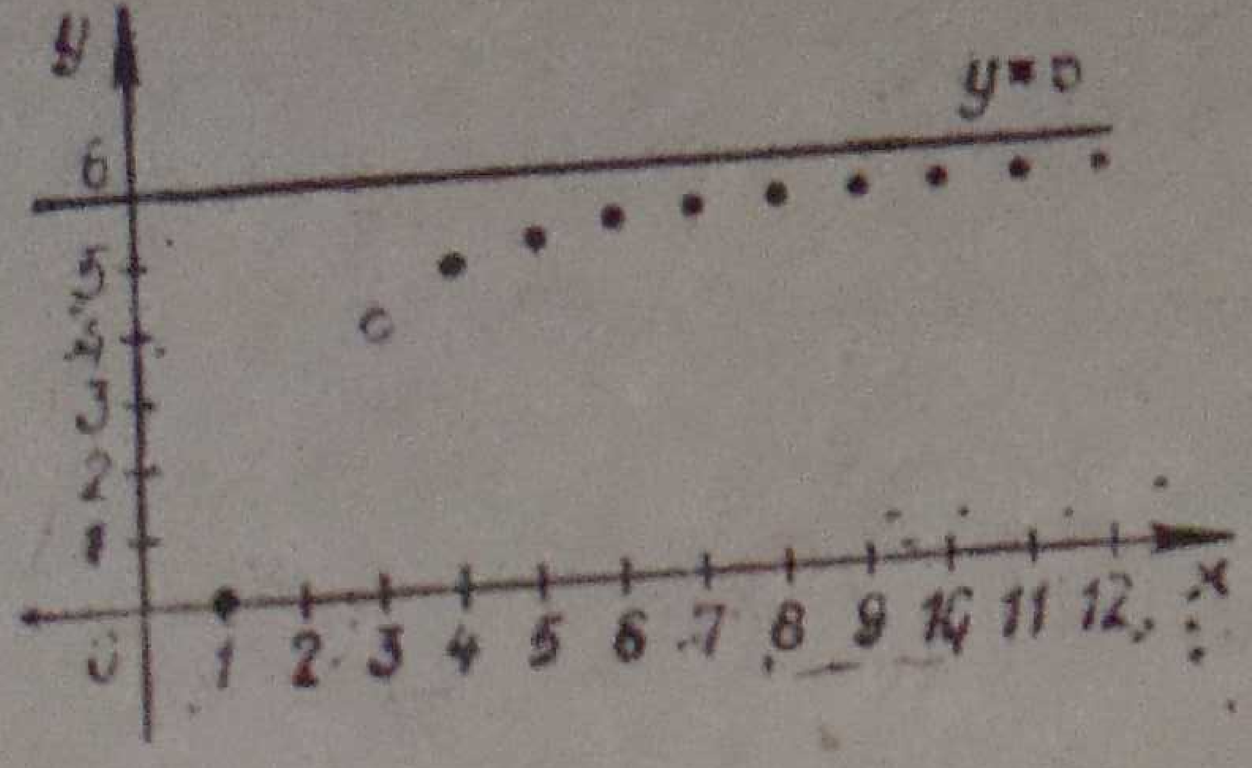
Հաճախ տրվում են հաջորդականության առաջին մի քանի անդամները և պահանջվում է ըստ դրանց կազմել n-րդ անդամի բանաձևը։ Այդ խնդիրը լուծվում է ոչ միարժեքորեն։

Օրինակ 8: Տրված են հաջորդականության առաջին չորս անդամները՝ 2, 4, 8, 16։ Գտնել n-րդ անդամի բանաձևը։

Պարզագույն բանաձևն ունի $a_n=2^n$ տեսքը։ Սակայն շատ ավելի բարդ $b_n=\frac{1}{3}n(n^2-3n+8)$ բանաձևը նույնպես բավարարում է օրինակի պայմանին (ստուգեցեք)։

Հաջորդականության համար, ինչպես և ցանկացած ֆունկցիայի համար, կոորդինատների ուղղանկյան համակարգում կարելի է կառուցել գրաֆիկ։ Դրա համար աբսցիսների առանցքի վրա նշենք հաջորդականության անդամների համարները՝ 1, 2, 3 և այլն, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ հաջորդականության համապատասխան անդամները։ Այսպիսով, (a_n) **հաջորդականության գրաֆիկը** $(n; a_n)$ կոորդինատներով բոլոր կետերի բազմությունն է։

149-րդ նկարում պատկերված է $a_n=\frac{6(n-1)}{n}$ բանաձևով տրված հաջորդականության գրաֆիկը n-ի այնպիսի արժեքների դեպքում, որոնք բավարարում են $1 \leq n \leq 12$ կրկնակի անհավասարությանը։ Գրաֆիկը պարունակում է 12 կետ։



Նկ. 149

Վարժություններ

Հաշվեցեք հետևյալ բանաձևով տրված հաջորդականության առաջին հինգ անդամները.

867. ա) $a_n=2n+5$, բ) $a_n=12-n^2$։

868. ա) $a_n=\frac{n+1}{n}$, բ) $a_n=(-1)^n \cdot (2n+3)$։

869. ա) $a_n=15-3n$, բ) $a_n=n^2-9$։

870. ա) $a_n=\frac{n}{n+1}$, բ) $a_n=(-1)^n \cdot (9n-8)$։

871. ա) $a_n=\frac{2n-1}{n}$, բ) $a_n=\frac{n}{2n-1}$։

872. ա) $a_n=2(n^2-1)$, բ) $a_n=2(n^3+1)$։

873. ա) $a_n=5 \cdot 2^n$, բ) $a_n=2^{n-1}$։

874. ա) $b_n=3(2n+1)$, բ) $b_n=-2(4n+3)$։

875. ա) $b_n=2 \cdot 3^n$, բ) $b_n=4(n^3+2)$։

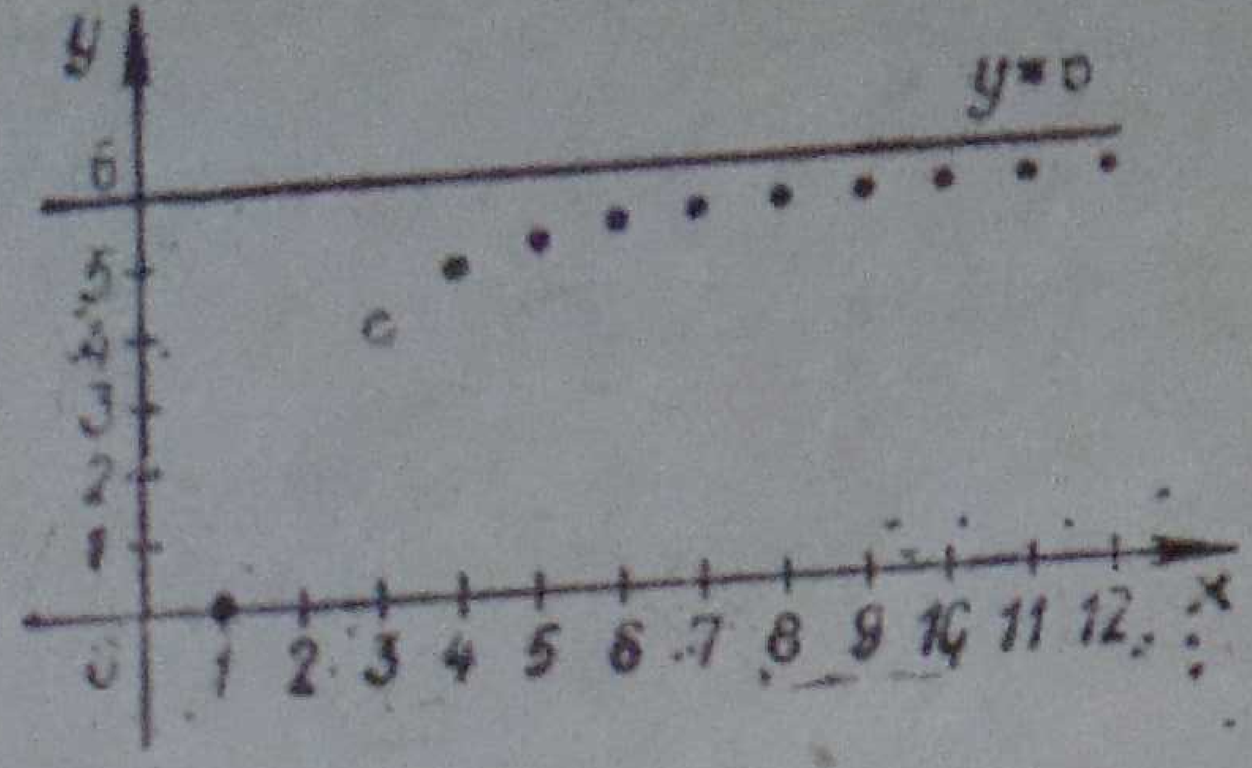
Կառուցեք հետևյալ բանաձևով տրված հաջորդականության գրաֆիկը n-ի 1-ից 5 արժեքների համար.

876. ա) $a_n=1+4(-1)^n$, բ) $a_n=7-2n$։

877. ա) $a_n=(-1)^n \cdot \frac{2}{n}$, բ) $a_n=2^{n-2}$։

878. ա) $a_n=2+\frac{3}{n}$, բ) $a_n=2n-5$։

879. ա) $a_n=(-1)^n \cdot n$, բ) $a_n=3^{n-2}$։



Նկ. 149

149-րդ նկարում պատկերված է $a_n=\frac{6(n-1)}{n}$ բանաձևով տրված հաջորդականության գրաֆիկը n-ի այնպիսի արժեքների դեպքում, որոնք բավարարում են $1\leq n\leq 12$ կրկնակի անհավասարությանը։ Գրաֆիկը պարունակում է 12 կետ։

Վարժություններ

Հաշվեցեք հետևյալ բանաձևով տրված հաջորդականության առաջին հինգ անդամները.

867. ա) $a_n=2n+5$, բ) $a_n=12-n^2$։

868. ա) $a_n=\frac{n+1}{n}$, բ) $a_n=(-1)^n\cdot(2n+3)$։

869. ա) $a_n=15-3n$, բ) $a_n=n^2-9$։

870. ա) $a_n=\frac{n}{n+1}$, բ) $a_n=(-1)^n\cdot(9n-8)$։

871. ա) $a_n=\frac{2n-1}{n}$, բ) $a_n=\frac{n}{2n-1}$։

872. ա) $a_n=2(n^2-1)$, բ) $a_n=2(n^3+1)$։

873. ա) $a_n=5\cdot 2^n$, բ) $a_n=2^{n-1}$,

874. ա) $b_n=3(2n+1)$, բ) $b_n=-2(4n+3)$։

875. ա) $b_n=2\cdot 3^n$, բ) $b_n=4(n^3+2)$։

Կառուցեք հետևյալ բանաձևով տրված հաջորդականության գրաֆիկը n-ի 1-ից 5 արժեքների համար.

876. ա) $a_n=1+4(-1)^n$, բ) $a_n=7-2n$։

877. ա) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{2}{n}$ բ) $a_n=2^{n-2}$,

878. ա) $a_n=2+\frac{3}{n}$, բ) $a_n=2n-5$։

879. ա) $a_n=(-1)^n\cdot n$, բ) $a_n=3^{n-2}$,

Տրված են (a_n) հաջորդականության առաջին երեք անդամները։ Գրեցեք այդ հաջորդականության n-րդ անդամի որևէ բանաձև։

880. ա) 4, 5, 6, բ) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{7}$, գ) 3, 5, 7, դ) 1, 5, 9։

881. ա) 1, 4, 9, բ) $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ գ,) 2, 5, 10, դ) 1, 8, 27։

§ 120. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏՐՄԱՆ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁ ԵՂԱՆԱԿԸ

Նախորդ պարագրաֆում հաջորդականությունը տրվում էր n-րդ անդամի բանաձևով։ Դիտարկենք հաջորդականության տրման մեկ այլ եղանակ՝ անդրադարձ եղանակը: *Եղանակի այսպիսի անվանումը բացատրվում է նրանով, որ ինչպես մենք կտեսնենք, որևէ անդամ հաշվելու համար պետք է գիտենալ նախորդ անդամները՝ անդրադառնալ նախորդ անդամներին։*

Դիցուք տրված են (a_n) *հաջորդականության առաջին երկու անդամները՝* $a_1=2$ *և* $a_2=5$ *և*

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$$

բանաձևը, որը հաջորդականության ցանկացած անդամն արտահայտում է իրեն անմիջապես նախորդող երկու անդամներով։ Այս բանաձևը կոչվում է անդրադարձ բանաձև:

Երբ n-ը հավասար է 1-ի, 2-ի, 3-ի, կստանանք համապատասխանաբար.

$$a_3=4a_2-3a_1=14,$$

$$a_4=4a_3-3a_2=41,$$

$$a_5=4a_4-3a_3=122։$$

Մենք ստացանք այսպիսի հաջորդականություն.

$$2;\ 5;\ 14;\ 41;\ 122;\ \ldots \qquad (1)$$

Այսպիսով, հաջորդականությունը անդրադարձ եղանակով տալու դեպքում նշվում է նրա առաջին մեկ կամ մի քանի անդամները և հաջորդականության ցանկացած անդամը նախորդ հայտնի անդամներով արտահայտող բանաձև։

Դիտարկենք նույն այդ անդրադարձ բանաձևը, բայց դիցուք այժմ $a_1=1$, $a_2=3$։ *Մենք կհանգեինք արդեն ուրիշ հաջորդականության (ստուգեցեք).*

$$1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots \qquad (2)$$

Գիտենալով անդրադարձ բանաձևը, երբեմն հաջողվում է որոշել հաջորդականության n-րդ անդամի բանաձևը։ Օրինակ, (2) հաջորդականությունն ունի այսպիսի պարզ բանաձև.

$$a_n=3^{n-1},$$

Իրոք, եթե $a_n=3^{n-1}$, ապա $a_{n+1}=3^n$, $a_{n+2}=3^{n+1}$, Ուստի

$$4a_{n+1}-3a_n=4\cdot3^n-3\cdot3^{n-1}=4\cdot3^n-3^n=3\cdot3^n=3^{n+1}=a_{n+2},$$

Այսպիսով, միևնույն (2) հաջորդականությունը կարող է տրվել կամ n-րդ անդամի $a_n=3^{n-1}$ բանաձևով, կամ անդրադարձ եղանակով. $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$։

Գոյություն ունեն հաջորդականության տրման նաև այլ եղանակներ, օրինակ, հաջորդականությունը կարող է տրվել բառային նկարագրությամբ։

Վարժություններ

882. *Հաշվեցեք հաջորդականության առաջին հինգ անդամները, եթե*

ա) $a_1=2$, $a_2=5$, $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$,

բ) $a_1=2$, $a_2=5$, $a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n$,

գ) $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+2}=4a_{n+1}+3a_n$,

դ) $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+2}=2a_{n+1}+5a_n$,

ե) $a_1=3$, $a_2=4$, $a_3=6$, $a_{n+3}=3a_{n+2}+a_{n+1}+2a_n$,

զ) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=7$, $a_{n+3}=3a_{n+2}+a_{n+1}+2a_n$:

§ 121. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱ

Սահմանում: **Թվաբանական պրոգրեսիա կոչվում է այնպիսի թվային հաջորդականությունը, որի յուրաքանչյուր անդամը, սկսած երկրորդից, հավասար է նախորդ անդամին՝ գումարած տվյալ հաջորդականության համար հաստատուն միևնույն թիվը, որը կոչվում է պրոգրեսիայի տարբերություն:**

Դիցուք a_1-ը (a_n) պրոգրեսիայի առաջին անդամն է, իսկ d-ն՝ տարբերությունը։ Ըստ սահմանման՝

$$a_{n+1}=a_n+d, \tag{1}$$

Եթե, օրինակ, $a_1=2$, $d=3$, ապա ըստ (1) բանաձևի կստանանք՝ $a_2=2+3=5$, $a_3=5+3=8$, $a_4=8+3=11$ և այլն։ (a_n) պրոգրեսիան կգրվի այս տեսքով.

$$2;\ 5;\ 8;\ 11;\ \dots$$

Թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձևի արտածումը

Դիցուք տրված է (a_n) թվաբանական պրոգրեսիան, (1) բանաձևում տեղադրելով $n=1, 2, 3, \ldots$, հաջորդաբար կստանանք.

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$

Կարելի է ապացուցել, որ բոլոր n-երի դեպքում ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

Ապացուցում։ Գրենք $(n-1)$ հավասարություն.

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d,$$

$$\ldots$$

$$a_{n-1}=a_{n-2}+d,$$

$$a_n=a_{n-1}+d.$$

Դրանք անդամ առ անդամ գումարելով, կստանանք.

$$a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1})+(n-1)d.$$

Նման գումարելիների միացումից հետո կստանանք (2) բանաձևը։

Այսպիսով, թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը հավասար է առաջին անդամին՝ գումարած պրոգրեսիայի տարբերության ու նախորդ անդամների թվի արտադրյալը։

Օրինակ 1։ Գրել (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին ինը անդամները, եթե $a_1=3$, $d=4$.

Ունենք $a_n=3+4(n-1)=4n-1;\ 1\leq n\leq 9$.

Ստանում ենք այսպիսի հաջորդականություն.

$$3;\ 7;\ 11;\ 15;\ 19;\ 23;\ 27;\ 31;\ 35.$$

Վերջավոր թվաբանական պրոգրեսիայի ծայրերից հավասարահեռ անդամների գումարի հատկությունը

Դիցուք (a_n) պրոգրեսիան պարունակում է n անդամ.

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \cdots;\ a_{n-2};\ a_{n-1};\ a_n.$$

Պարզենք, թե ինչ համարներ ունեն այդ պրոգրեսիայի ծայրերից հավա-
սարահեռ անդամները։

Ծայրանդամներն ունեն 1 և n համարները, սկզբից երկրորդ և վեր-
ջից երկրորդ անդամների համարներն են 2 և $(n-1)$ ծայրերից երրորդ
տեղում գտնվող անդամների համարներն են 3 և $(n-2)$։ Ընդհանրապես,
եթե պրոգրեսիայի անդամը գտնվում է վերջից k-րդ տեղում, իսկ կա n
անդամ, ապա նրանից առաջ գտնվում է $(n-K)$ անդամ, ուստի նա ինքն
ունի $(n-k)+1$ համարը։ Հետևաբար, պրոգրեսիայի ծայրերից k-րդ
տեղում գտնվում են k և $(n-k+1)$ համարներով անդամները։

Այժմ օգտագործելով (2) բանաձևը, հաշվենք պրոգրեսիայի ծայ-
րերից հավասարահեռ անդամների գումարը.

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+(k-1)d+a_1+(n-k)d=$$
$$=a_1+(a_1+(n-1)d)=a_1+a_n,$$
$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n: \qquad (3)$$

Այսպիսով, թվաբանական պրոգրեսիայի ծայրերից հավասարահեռ անդամների գումարը հավասար է նրա ծայրանդամների գումարին:

Թվաբանական պրոգրեսիայի n անդամների գումարի բանաձևի արտածումը

a_1-ի հավասար առաջին անդամ ունեցող (a_n) թվաբանական պրոգ-
րեսիայի n անդամների գումարը նշանակենք s_n-ով։ Այդ գումարը գրենք
երկու անգամ. մեկ համարների աճման կարգով, մեկ՝ նվազման.

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots+a_{n-1}+a_n,$$
$$s_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{n-k+1}+\cdots+a_2+a_1:$$

Անդամ առ անդամ գումարենք այս երկու հավասարությունները.

$$2s_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_k+a_{n-k+1})+$$
$$+\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1):$$

Համաձայն (3) բանաձևի, կլոր փակագծերում գրված յուրաքանչյուր
գումարը հավասար է a_1+a_n գումարին, իսկ այդպիսի գումար կա n հատ,
ուստի $2s_n=(a_1+a_n)n$։ Այստեղից ստանում ենք հետևյալ բանաձևը.

$$s_n=\frac{1}{2}(a_1+a_n)n. \qquad (4)$$

Այսպիսով, թվաբանական պրոգրեսիայի n անդամների գումարը
հավասար է ծայրանդամների կիսագումարի և անդամների թվի ար-
տադրյալին:

(4) բանաձևը կարելի է գրել այսպես.

$$s_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n: \qquad (4ա)$$

Օ ր ի ն ա կ 2։ *Գտնել առաջին հարյուր բնական թվերի գումարը։ Հարյուր բնական թվերի հաջորդականությունը կազմում է թվաբանական պրոգրեսիա, որի $a_1=1$, $d=1$, $n=100$։*

Ըստ (2) բանաձևի՝

$$a_{100}=1+99\cdot 1=100,$$

իսկ ըստ (4) բանաձևի՝

$$s_{100}=\frac{1}{2}(1+100)\cdot 10=5050,$$

այսինքն՝

$$1+2+3+\cdots+99+100=5050:$$

Օ ր ի ն ա կ 3։ *Գտնել (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի ինը անդամների գումարը, եթե $a_1=15$, $d=-3$։*

$$s_9=\frac{1}{2}(30-8\cdot 3)\cdot 9=27:$$

Թվաբանական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամների հատկությունը

Եթե a, b, c *թվերը թվաբանական պրոգրեսիայի երեք կողք-կողքի գտնվող անդամներ են, ապա* $b-a=c-b$, $b=\dfrac{a+c}{2}$, *այսինքն,* b-ն a *և* c *թվերի թվաբանական միջինն է։*

Այսպիսով, թվաբանական պրոգրեսիայի ցանկացած անդամը (բացառյալ առաջինը) հավասար է իրեն կից երկու անդամների թվաբանական միջինին։

Եվ հակադարձ՝ եթե a, b, c *երեք թվերն այնպիսին են, որ* $b=\dfrac{a+c}{2}$, *ապա* $b+b=a+c$, $b-a=c-b$։ *Նշանակելով* $b-a=d$, $c-b=d$, *կստանանք՝* $b=a+d$, $c=b+d=a+2d$։ *Այսպիսով,* a, b, c *թվերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա։*

Այսպիսով, որպեսզի a, b, c թվերը լինեն թվաբանական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամներ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ b-ն լինի a և c թվերի թվաբանական միջինը։

Գտեք թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը, եթե.

883. ա) $a_1=-12$, $d=7$, $n=8$,

բ) $a_1=427$, $d=-5$, $n=23$։

884. ա) $a_1=45$, $d=-3$, $n=11$,

բ) $a_1=17$, $d=2$, $n=14$։

Գտեք թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների գումարը, եթե.

885. ա) $a_1=6$, $a_n=52$, $n=12$,

բ) $a_1=65$, $a_n=-31$, $n=14$։

886. ա) $a_1=14$, $a_n=50$, $n=9$,

բ) $a_1=-24$, $a_n=8$, $n=16$։

§ 122. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Թվաբանական պրոգրեսիայի վերաբերյալ խնդիրները լուծվում են

$$a_n=a_1+d(n-1),$$

$$s_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

հիմնական բանաձևերով, ինչպես և (4ա) բանաձևի օգնությամբ։

Այդ բանաձևերի մեջ մտնում են հինգ փոփոխական՝ a_1, a_n, n, d, s_n։ Տալով դրանցից ցանկացած երեքը, մենք սովորաբար կարող ենք հաշվել մնացած երկուսը։ Իրոք, նշված երկու բանաձևի մեջ տեղադրելով տրված երեք թվերը, կստանանք երկու փոփոխականով երկու հավասարումների համակարգ։ (Իհարկե, համակարգը երբեմն կարող է և լուծում չունենալ)։

Խնդիր 1։ *Թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը հավասար է 4-ի, իսկ առաջին յոթ անդամների գումարը՝ 105-ի։ Գտեք այդ պրոգրեսիայի առաջին և յոթերորդ անդամները։*

Խնդրի պայմանը գրենք, օգտվելով ընդունված նշանակումներից։ Տրված է՝ $d=4$, $n=7$, $s_7=105$։ Գտնել a_1-ը և a_7-ը։ Փոփոխականների տրված արժեքները տեղադրելով երկու հիմնական բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$a_7=a_1+4\cdot 6,$$

$$105=\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7։$$

Գտեք թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը, եթե.

883. ա) $a_1=-12$, $d=7$, $n=8$,

բ) $a_1=427$, $d=-5$, $n=23$։

884. ա) $a_1=45$, $d=-3$, $n=11$,

բ) $a_1=17$, $d=2$, $n=14$։

Գտեք թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների գումարը, եթե.

885. ա) $a_1=6$, $a_n=52$, $n=12$,

բ) $a_1=65$, $a_n=-31$, $n=14$։

886. ա) $a_1=14$, $a_n=50$, $n=9$,

բ) $a_1=-24$, $a_n=-8$, $n=16$։

§ 122. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Թվաբանական պրոգրեսիայի վերաբերյալ խնդիրները լուծվում են

$$a_n=a_1+d(n-1),$$

$$s_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

հիմնական բանաձևերով, ինչպես և (4ա) բանաձևի օգնությամբ։

Այդ բանաձևերի մեջ մտնում են հինգ փոփոխական՝ a_1, a_n, n, d, s_n։ Տալով դրանցից ցանկացած երեքը, մենք սովորաբար կարող ենք հաշվել մնացած երկուսը։ Իրոք, նշված երկու բանաձևի մեջ տեղադրելով տրված երեք թվերը, կստանանք երկու փոփոխականով երկու հավասարումների համակարգ։ (Իհարկե, համակարգը երբեմն կարող է և լուծում չունենալ)։

Խնդիր 1։ Թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը հավասար է 4-ի, իսկ առաջին յոթ անդամների գումարը՝ 105-ի։ Գտեք այդ պրոգրեսիայի առաջին և յոթերորդ անդամները։

Խնդրի պայմանը գրենք, օգտվելով ընդունված նշանակումներից. Տրված է՝ $d=4$, $n=7$, $s_7=105$։ Գտնել a_1-ը և a_7-ը։ Փոփոխականների տրված արժեքները տեղադրելով երկու հիմնական բանաձևի մեջ, կստանանք.

$$a_7=a_1+4\cdot6,$$

$$105=\frac{a_1+a_7}{2}\cdot7.$$

Կազմենք համակարգը.

$$\begin{cases} a_7 - a_1 = 24, \\ a_7 + a_1 = 30: \end{cases}$$

Սկզբում անդամ առ անդամ գումարենք երկու հավասարությունները, այնուհետև երկրորդից անդամ առ անդամ հանենք առաջինը: Կստանանք.

$$2a_7 = 54, \; 2a_1 = 6, \; a_1 = 3, \; a_7 = 27:$$

Հանգում ենք հետևյալ պրոգրեսիային՝ 3; 7; 11; 15; 19; 23; 27:

Խնդիր 2: Տրված է՝ $d = -3$, $a_n = 2$, $s_n = 57$: Գտնել a_1-ը և n-ը:

Հիմնական բանաձևերում տեղադրելով խնդրի պայմանում տրված արժեքները, կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգերը.

$$\begin{cases} 2 = a_1 - 3(n-1), \\ 57 = \dfrac{a_1+2}{2} \cdot n, \end{cases} \quad \text{կամ} \quad \begin{cases} 2 = a_1 - 3n + 3, \\ 114 = (a_1+2)n: \end{cases}$$

Առաջին հավասարումից գտնենք a_1-ը՝ $a_1 = 3n - 1$: Երկրորդ հավասարման մեջ a_1-ի փոխարեն տեղադրելով այս արտահայտությունը, կստանանք՝ $114 = (3n+1)n$, $3n^2 + n - 114 = 0$: Լուծելով այս քառակուսի հավասարումը, կստանանք n-ի երկու արժեք. $n_1 = -\dfrac{19}{3}$ և $n_2 = 6$:

n-ի առաջին արժեքը չի բավարարում խնդրի պայմանին: Քանի որ $a_1 = 3n - 1$, ապա $n = 6$ դեպքում $a_1 = 17$: Հանգում ենք հետևյալ պրոգրեսիային՝ 17; 14; 11; 8; 5; 2:

Խնդիր 3: Տրված է՝ $d_1 = -2$, $a_1 = 14$, $s_n = 50$: Գտնել a_n-ը և n-ը:

Կազմենք հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} a_n = 14 - 2(n-1), \\ 50 = \dfrac{14+a_n}{2} \cdot n, \end{cases} \quad \text{կամ} \quad \begin{cases} a_n = 16 - 2n, \\ 100 = (14+a_n) \cdot n: \end{cases}$$

a_n-ի համար գտնված արտահայտությունը տեղադրելով երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք՝ $100 = 30n - 2n^2$, $n^2 - 15n + 50 = 0$: Այս հավասարումն ունի երկու արմատ՝ 5 և 10: a_n-ի համար նույնպես ստանում ենք երկու արժեք՝ 6 և −4:

Հավասարումների համակարգն ունի երկու լուծում. 1) $n = 5$, $a_n = 6$ և 2) $n = 10$, $a_n = -4$: Համակարգի առաջին լուծմանը համապատասխանում է 14, 12, 10, 8, 6 պրոգրեսիան, իսկ երկրորդին՝ 14, 12, 10, 8, 6,

4, 2, 0, −2, −4 պրոգրեսիան։ Երկու դեպքում էլ բոլոր անդամների գումարը հավասար է 50-ի։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. 1) $n=5$, $a_5=6$, 2) $n=10$, $a_{10}=-4$։

Խ ն դ ի ր 4: 17 և 32 թվերի միջև գրեք հինգ այնպիսի թվեր, որոնք տրված թվերի հետ կազմեն թվաբանական պրոգրեսիա։

Կարելի է գրել. $n=7$, $a_1=17$, $a_7=32$։ Խնդիրը հանգում է պրոգրեսիայի տարբերության գտնելուն՝ $32=17+d\cdot 6$, $d=2{,}5$։

Այժմ դժվար չէ գտնել որոնելի թվերը և գրել պրոգրեսիան՝ 17; 19,5; 22; 24,5; 27; 29,5; 32։

Վարժություններ

887. Կառուցեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի գրաֆիկը, եթե.

ա) $a_1=-2$, $d=3$, $1\leqslant n\leqslant 7$, բ) $a_1=12$, $d=-4$, $1\leqslant n\leqslant 5$։

888. Գտեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի վերջին անդամը և անդամների գումարը, եթե.

ա) $a_1=163$, $d=-13$, $n=12$, բ) $a_1=36$, $d=9$, $n=14$։

889. Գտեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին անդամն ու անդամների գումարը, եթե.

ա) $d=-11$, $a_{16}=-15$, բ) $d=7$, $a_{12}=144$։

890. Գտեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների թիվը և անդամների գումարը, եթե.

ա) $a_1=-12$, $a_{24}=-173$, բ) $a_1=67$, $a_{29}=-17$։

891. Գտեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների թիվը և անդամների գումարը, եթե.

ա) $a_1=15$, $a_n=-65$, $d=-4$, գ) $a_1=-8$, $a_n=-63$, $d=11$,

բ) $a_1=23$, $a_n=45$, $d=2$, դ) $a_1=21$, $a_n=56$, $d=5$։

892. Գտեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին անդամն ու տարբերությունը, եթե.

ա) $s_9=135$, $a_9=32$, բ) $s_{25}=1675$, $a_{25}=127$։

893. Գտեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը և վերջին անդամը, եթե.

ա) $a_1=5$, $s_{12}=258$, բ) $a_1=4$, $s_8=-108$։

894. Գտեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը և

անդամների թիվը, եթե.

ա) $a_1=27$, $a_n=69$, $s_n=1056$, բ) $a_1=35$, $a_n=-135$, $s_n=-900$։

895. Գտեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին և վերջին անդամները, եթե.

ա) $d=3$, $s_{27}=594$, բ) $d=2{,}5$, $s_{15}=607{,}5$։

896. Գտեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների թիվը և առաջին անդամը, եթե.

ա) $d=4$, $a_n=51$, $s_n=296$, բ) $d=-2$, $a_n=41$, $s_n=624$։

897. Գտեք (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների թիվը և վերջին անդամը, եթե.

ա) $a_1=27$, $d=-3$, $s_n=105$, բ) $a_1=48$, $a_2=44$, $s_n=300$։

898. ա) 9 և 51 թվերի միջև գրեք վեց թիվ այնպես, որ ստացված հաջորդականությունը լինի թվաբանական պրոգրեսիա։

բ) 97 և 73 թվերի միջև գրեք հինգ թիվ այնպես, որ ստացված հաջորդականությունը լինի թվաբանական պրոգրեսիա։

§ 123. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱ

Սահմանում: Երկրաչափական պրոգրեսիա կոչվում է այնպիսի թվային հաջորդականությունը, որի առաջին անդամը տարբեր է զրոյից և յուրաքանչյուր անդամը, սկսած երկրորդից, հավասար է նախորդ անդամին՝ բազմապատկած տրված հաջորդականության համար հաստատուն և զրոյից տարբեր միևնույն թվով, որը կոչվում է պրոգրեսիայի հայտարար:

Դիցուք b_1-ը (b_n) պրոգրեսիայի առաջին անդամն է, իսկ q-ն՝ հայտարարը։ Ըստ սահմանման՝

$$b_{n+1}=b_n \cdot q. \quad (1)$$

Եթե, օրինակ, $b_1=2$, $q=3$, ապա ըստ (1) բանաձևի կստանանք՝ $b_2=2\cdot 3=6$, $b_3=6\cdot 3=18$, $b_4=18\cdot 3=54$ և այլն։ (b_n) պրոգրեսիան գրվում է այս տեսքով.

$$2;\ 6;\ 18;\ 54;\ \ldots$$

Երկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձևի արտածումը

Դիցուք տրված է (b_n) պրոգրեսիան։ (1) բանաձևում ընդունելով

$n=1, 2, 3, \ldots,$ հաջորդաբար կստանանք.

$$b_2=b_1\cdot q,$$

$$b_3=b_2q=(b_1q)q=b_1q^2,$$

$$b_4=b_3q=(b_1q^2)q=b_1q^3:$$

Կարելի է ապացուցել, որ բոլոր n-երի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}: \qquad (2)$$

Ապացույցում։ Գրենք $(n-1)$ հավասարությունները.

$$b_2=b_1q,$$

$$b_3=b_2q,$$

$$\ldots$$

$$b_{n-1}=b_{n-2}q,$$

$$b_n=b_{n-1}q:$$

Դրանք անդամ առ անդամ բազմապատկելով, կստանանք.

$$b_2b_3\cdots b_{n-1}b_n=(b_1b_2\cdots b_{n-2}b_{n-1})\cdot q^{n-1}:$$

Քանի որ ըստ երկրաչափական պրոգրեսիայի սահմանման $b_1\neq 0$, $q\neq 0$ ապա պրոգրեսիայի բոլոր անդամները տարբեր են զրոյից։ Հավասարության երկու մասերը բաժանելով $b_2, b_3, \ldots b_{n-1}$ արտադրյալի վրա, կստանանք (2) բանաձևը։

Այսպիսով, երկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը հավասար է առաջին անդամին, բազմապատկած հայտարարի այնպիսի աստիճանով, որի ցուցիչը հավասար է նախորդ անդամների թվին:

Օրինակ 1: Գրել (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին ինը անդամները, եթե $b_1=3$, $q=2$։

Ունենք. $b_n=3\cdot 2^{n-1}$, $1\leq n\leq 9$։

Հանգում ենք այսպիսի պրոգրեսիայի.

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ 96;\ 192;\ 384;\ 768:$$

Երկրաչափական պրոգրեսիայի n անդամների գումարի բանաձևի արտածումը

Դիցուք (b_n) պրոգրեսիան պարունակում է n անդամ։ Նրա անդամների գումարը նշանակենք s_n-ով։ Օգտագործելով (2) բանաձևը, գումարը գրենք այս տեսքով.

$$s_n=b_1+b_1q+b_1q^2+\cdots+b_1q^{n-2}+b_1q^{n-1},$$

$n=1, 2, 3, \ldots$, հաջորդաբար կստանանք.

$$b_2=b_1\cdot q,$$
$$b_3=b_2q=(b_1q)q=b_1q^2,$$
$$b_4=b_3q=(b_1q^2)q=b_1q^3։$$

Կարելի է ապացուցել, որ բոլոր n-երի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}։ \qquad (2)$$

Ապացուցում։ Գրենք $(n-1)$ հավասարություններ.

$$b_2=b_1q,$$
$$b_3=b_2q,$$
$$\ldots$$
$$b_{n-1}=b_{n-2}q,$$
$$b_n=b_{n-1}q։$$

Դրանք անդամ առ անդամ բազմապատկելով, կստանանք.

$$b_2b_3\cdots b_{n-1}b_n=(b_1b_2\cdots b_{n-2}b_{n-1})\cdot q^{n-1}։$$

Քանի որ ըստ երկրաչափական պրոգրեսիայի սահմանման $b_1\neq 0$, $q\neq 0$ ապա պրոգրեսիայի բոլոր անդամները տարբեր են զրոյից։ Հավասարության երկու մասերը բաժանելով $b_2, b_3, \ldots b_{n-1}$ արտադրյալի վրա, կստանանք (2) բանաձևը։

Այսպիսով, երկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը հավասար է առաջին անդամին, բազմապատկած հայտարարի այնպիսի աստիճանով, որի ցուցիչը հավասար է նախորդ անդամների թվին։

Օրինակ 1։ Գրել (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին ինը անդամները, եթե $b_1=3$, $q=2$։

Ունենք. $b_n=3\cdot 2^{n-1}$, $1\leq n\leq 9$։

Հանգում ենք այսպիսի պրոգրեսիայի.

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ 96;\ 192;\ 384;\ 768։$$

Երկրաչափական պրոգրեսիայի n անդամների գումարի բանաձևի արտածումը

Դիցուք (b_n) պրոգրեսիան պարունակում է n անդամ։ Նրա անդամների գումարը նշանակենք S_n-ով։ Օգտագործելով (2) բանաձևը, գումարը գրենք այս տեսքով.

$$S_n=b_1+b_1q+b_1q^2+\cdots+b_1q^{n-2}+b_1q^{n-1},$$

Այս հավասարության երկու մասերը անդամ առ անդամ բազմապատկելով q հայտարարով, կստանանք.

$$s_nq=b_1q+b_1q^2+b_1q^3+\dots+b_1q^{n-1}+b_1q^n,$$

Առաջին գումարից անդամ առ անդամ հանենք երկրորդ գումարը և միացնենք նման գումարելիները.

$$s_n-s_nq=b_1-b_1q^n,$$

$$s_n(1-q)=b_1(1-q^n),$$

Եթե $q\neq 1$, ապա ստանում ենք հետևյալ բանաձևը.

$$s_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}; \qquad (3)$$

Եթե $q=1$, ապա ակնհայտ է, որ $s_n=b_1n$։

Այսպիսով, b_1 առաջին անդամով և $q(q\neq 1)$ հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիայի n անդամների գումարը հավասար է առաջին անդամին, բազմապատկած $(1-q^n)$ տարբերությամբ և բաժանած $(1-q)$ տարբերության վրա:

(3) բանաձևը կարելի է գրել նաև այս տեսքով.

$$s_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}: \qquad (3ա)$$

(3) բանաձևը կիրառվում է նաև հետևյալ տեսքով.

$$s_n=\frac{b_1-b_nq}{1-q}=\frac{b_nq-b_1}{q-1}, \qquad (3բ)$$

Օրինակ 2: Գտնել (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին վեց անդամների գումարը, եթե $b_1=4$, $q=3$։

Ունենք.

$$s_6=\frac{4(3^6-1)}{3-1}=\frac{4\cdot 728}{2}=1456$$

Օրինակ 3: Գտնել (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին հինգ անդամների գումարը, եթե $b_1=5$, $b_5=80$, $q=2$։

$$s_5=\frac{80\cdot 2-5}{2-1}=155$$

Դրական թվերով երկրաչափական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամների հատկությունը

Եթե a, b, c դրական թվերը (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի երեք

կողք-կողքի դրված անդամներ են, ապա $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$, $b^2=ac$, այսինքն՝ b-ն a և c թվերի երկրաչափական միջինն է։

Այստեղից հետևում է, որ դրական թվերով երկրաչափական պրոգրեսիայի ցանկացած անդամը (բացի առաջինից) հավասար է իրեն կից երկու անդամների երկրաչափական միջինին։

Հակադարձը, եթե երեք a, b, c դրական թվերն այնպիսին են, որ $b^2=ac$, ապա $b\cdot b=a\cdot c$, $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$։ Նշանակելով $\frac{b}{a}=q$ և $\frac{c}{b}=q$, կստանանք՝ $b=aq$, $c=bq=aq^2$։ Այսպիսով, a, b, c թվերը կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա։

Այսպիսով, որպեսզի a, b, c դրական թվերը լինեն երկրաչափական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամներ, անհրաժեշտ է և բավական, որ b-ն լինի a և c թվերի երկրաչափական միջինը։

Վարժություններ

Գտեք երկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը, եթե.

899. ա) $b_1=7$, $q=2$, $n=5$, բ) $b_1=5$, $q=3$, $n=4$։

900. ա) $b_1=64$, $q=\frac{1}{2}$, $n=6$, բ) $b_1=81$, $q=\frac{1}{3}$, $n=3$։

Գտեք հետևյալ պրոգրեսիայի առաջին վեց անդամների գումարը.

901. ա) $b_1=5$, $q=3$, բ) $b_1=5$. $q=-3$։

902. ա) $b_1=-5$, $q=3$. բ) $b_1=-5$, $q=-3$։

§ 124. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Երկրաչափական պրոգրեսիայի վերաբերյալ խնդիրները լուծվում են

$$b_n=b_1q^{n-1},$$

$$s_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

հիմնական բանաձևերի, ինչպես նաև (3 ա) և (3 բ) բանաձևերի օգնությամբ։

Այս բանաձևերի մեջ մտնում են հինգ փոփոխական՝ b_1, b^n, n, q և s_n։ Տալով դրանցից ցանկացած երեքը, մենք սովորաբար կարող ենք հաշվել մնացած երկուսը (խնդիրը երբեմն կարող է լուծում չունենալ)։

Այնպիսի խնդիրները, որոնցում n-ը որոնելի փոփոխականներից մեկն է, հանգեցնում ենք նոր տիպի հավասարումների, որոնք կոչվում են ցուցչային: Դրանք $a^x=b$ տեսքի հավասարումներն են։

Այդպիսի հավասարումների լուծումը պարզագույն դեպքերում հիմնված է այն բանի վրա, որ եթե երկու աստիճանների հիմքերը դրական և մեկից տարբեր թվեր են, ապա աստիճանների հավասարությունից և հիմքերի հավասարությունից հետևում է աստիճանացույցների հավասարությունը, այսինքն, եթե $a>0$, $a\neq1$, ապա $a^x=a^y$ հավասարությունից հետևում է $x=y$ հավասարությունը։

Խնդիր 1: Գտեք երեք թվերից բաղկացած երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարն ու առաջին անդամը, եթե երրորդ անդամը հավասար է 36-ի, իսկ բոլոր անդամների գումարը՝ 52-ի։

Այս պայմանը կարելի է գրել այսպես.

Տրված է. $b_3=36$, $s_3=52$։ Գտնել. b_1-ը և q-ն։

Փոփոխականների տրված արժեքները տեղադրենք երկու հիմնական բանաձևերի մեջ և կազմենք հավասարումների համակարգ.

$$\begin{cases} b_1q^2=36, \\ 52(1-q)=b_1(1-q^3), \end{cases} \text{կամ} \begin{cases} b_1q^2=36, \\ 52=b_1(1+q+q^2): \end{cases}$$

Երկրորդ հավասարումը մենք անդամ առ անդամ կրճատեցինք $1-q$-ով։ Ուստի պետք է պարզել, կարո՞ղ է արդյոք $q=1$ արժեքը լինել խնդրի լուծում։ Պարզվում է, որ ոչ. $q=1$ դեպքում պրոգրեսիայի բոլոր անդամները հավասար են միմյանց և հավասար են 36-ի, բայց այդ դեպքում երեք անդամների գումարը հավասար կլինի 108-ի, իսկ պայմանի համաձայն՝ $s_3=52$։

Առաջին հավասարումից գտնում ենք, որ $b_1=\dfrac{36}{q^2}$։ Այս արտահայտությունը համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ տեղադրելով b_1-ի փոխարեն, կստանանք. $52=\dfrac{36}{q^2}(1+q+q^2)$, կամ $4q^2-9q-9=0$։ Լուծելով հավասարումը, գտնում ենք q-ի երկու արժեք՝ $-0{,}75$ և 3։ b_1-ի համար նույնպես ստանում ենք երկու արժեք՝ 64 և 4։

Հավասարումների համակարգն ունի երկու լուծում. 1) $b_1=64$, $q=-0{,}75$ և 2) $b_1=4$, $q=3$։ Առաջին լուծմանը համապատասխանում է 64; -48; 36 պրոգրեսիան, իսկ երկրորդին՝ 4, 12, 36 պրոգրեսիան։

Խնդիր 2: Տրված է՝ $q=3$, $b_n=1458$, $s_n=2184$։

Գտնել՝ n-ը և b_1-ը։

(3բ) բանաձևից կստանանք՝

$$s_n(q-1)=b_nq-b_1,$$

$$b_1=3\cdot1458-2184\cdot2=6,$$

(2) բանաձևից կստանանք.

$$q^{n-1}=\frac{b_n}{b_1}=\frac{1458}{6}=243=3^5;$$

Այսպիսով, $3^{n-1}=3^5$, Հետևաբար, $n=6$։ Հանգում ենք 6, 18, 54, 162, 486, 1458 պրոգրեսիային։

Խ ն դ ի ր 3: Տ ր վ ա ծ է՝ $b_1=2$, $q=5$, $b_n=250$։ Գ տ ն ե լ՝ n-ը և S_n-ը։

Ունենք՝

$$q^{n-1}=\frac{250}{2}=125=5^3,$$

$$5^{n-1}=5^3,\ n=4,$$

$$S_4=\frac{2(5^4-1)}{4}=312.$$

Հանգում ենք 2, 10, 50, 250 պրոգրեսիային։

Խ ն դ ի ր 4: 135 և 40 թվերի միջև գրեք այնպիսի երկու դրական թվեր, որոնք տրվածների հետ կազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա։

Այստեղ $b_1=135$, $b_n=40$, $n=4$. Քանի որ $b_n=b_1 q^{n-1}$, ապա $40=135\,q^3$ կամ

$$q^3=\frac{8}{27},\ q=\frac{2}{3}:$$

Այժմ գտնենք որոնելի թվերը, այսինքն՝ պրոգրեսիայի երկրորդ և երրորդ անդամները։ Դրանք հավասար են 90-ի և 60-ի։ Պրոգրեսիան այսպիսին է՝ 135, 90, 60, 40։

Վարժություններ

903. Կառուցենք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի գրաֆիկը, եթե.

ա) $b_1=1{,}5$, $q=2$, $1\leqslant n\leqslant 4$, բ) $b_1=8$, $q=0{,}5$, $1\leqslant n\leqslant 5$։

904. Գտեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին վեց անդամների գումարը, եթե.

ա) $b_1=24$, $q=2$, բ) $b_1=192$, $q=0{,}5$:

905. Գտեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի հինգերորդ անդամը և առաջին հինգ անդամների գումարը, եթե.

ա) $b_1=5$, $q=3$, բ) $b_1=10\frac{1}{8}$, $q=\frac{2}{3}$,

906. *Գտեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին անդամը և n անդամների գումարը, եթե.*

ա) $q=4$, $b_n=16$, $n=4$, *բ)* $q=8$, $b_n=192$, $n=3$։

907. *Գտեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը և n անդամների գումարը, եթե.*

ա) $b_1=4$, $b_n=32$, $n=4$, *բ)* $b_1=256$, $b_n=32$, $n=4$։

908. *Գտեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների թիվը և դրանց գումարը, եթե.*

ա) $b_1=10$, $q=7$, $b_n=490$, *բ)* $b_1=5$, $q=3$, $b_n=405$։

909. *Հաշվեցեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին և վերջին անդամները, եթե.*

ա) $q=0{,}5$, $s_4=15$, *բ)* $q=2$, $s_8=189$։

910. *Գտեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների թիվը և վերջին անդամը, եթե.*

ա) $b_1=3$, $q=2$, $s_n=765$, *բ)* $b_1=320$, $q=0{,}5$, $s_n=635$։

911. *Գտեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը և անդամների թիվը, եթե.*

ա) $b_1=96$, $b_4=12$, $s_n=180$, *բ)* $b_2=5$, $b_5=40$, $s_n=637{,}5$։

912. *ա) Գտեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին անդամը և անդամների թիվը, եթե $b_n=320$, $q=4$, $s_n=425$։*

բ) Գտեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին անդամը և հայտարարը, եթե $b_n=36$, $n=2$, $s_n=48$։

գ) Գտեք (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայի երրորդ անդամն ու հայտարարը, եթե $b_1=8$, $S_3=56$։

913. *ա) 5 և 405 թվերի միջև գրեք երեք թիվ այնպես, որ ստացված հաջորդականությունը լինի երկրաչափական պրոգրեսիա։*

բ) 224 և 7 թվերի միջև գրեք չորս թիվ այնպես, որ ստացված հաջորդականությունը լինի երկրաչափական պրոգրեսիա։

914. *Բազմանկյան կողմերի երկարությունները, սանտիմետրերով արտահայտված, 9 տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիայի հաջոր-*

դական անդամներ են։ Բազմանկյան պարագիծը հավասար է 47 սմ-ի, իսկ ամենամեծ կողմը՝ 132 սմ-ի։ Քանի՞ կողմ ունի բազմանկյունը։

915. Ուռուցիկ բազմանկյան ներքին անկյունների մեծությունները, արտահայտված աստիճաններով, 10 տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են։ Այդ բազմանկյան ամենափոքր անկյան մեծությունը $100°$ է։ Գտեք բազմանկյան կողմերի թիվը։

916. Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի երկարությունը, լայնությունը և բարձրությունը մետրերով արտահայտող թվերը երկրաչափական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են։ Զուգահեռանիստի հիմքի մակերեսը 108 $մ^2$ է, իսկ լրիվ մակերևույթի մակերեսը՝ 312 $մ^2$։ Հաշվեցեք զուգահեռանիստի չափումները։

917. Գտեք երկրաչափական պրոգրեսիան, եթե նրա հինգերորդ անդամի հարաբերությունը երրորդ անդամին հավասար է 16-ի, իսկ առաջին երեք անդամների գումարը՝ 63-ի։

918. Գտեք այն թվաբանական պրոգրեսիան, որի հինգերորդ անդամի հարաբերությունը առաջին անդամին հավասար է 25-ի, իսկ առաջին չորս անդամների գումարը՝ 80-ի։

Ինքնուրույն աշխատանք № 20

1. Գտեք թվաբանական պրոգրեսիան, եթե նրա առաջին հինգ անդամների գումարը հավասար է 80-ի, իսկ առաջին և երրորդ անդամների գումարը՝ 20-ի։

2. Գտեք հինգ թվից կազմված երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին և վերջին անդամները, եթե նրա հայտարարը հավասար է 3-ի, իսկ անդամների գումարը 242-ի։

3. Թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին անդամը հավասար է 6-ի, իսկ չորրորդը՝ 21-ի։ Այդ պրոգրեսիայի քանի՞ անդամ պետք է վերցնել, որպեսզի դրանց գումարը հավասարվի 188-ի։

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ի՞նչն է կոչվում անվերջ հաջորդականություն։

2. Ի՞նչն է կոչվում վերջավոր հաջորդականություն։

3. Ի՞նչ բան է անդրադարձ բանաձևը։ Ինչո՞ւմն է կայանում հաջորդականության տրման անդրադարձ եղանակը։ Բերեք օրինակ։

4. Ի՞նչ բան է թվաբանական պրոգրեսիան։ Ձևակերպեցեք և արտածեցեք թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձևը։

5. Ձևակերպեցեք և ապացուցեք թվաբանական պրոգրեսիայի ծայրերից հավասարահեռ անդամների գումարի հատկությունը։

6. Ձևակերպեցեք և արտածեցեք թվաբանական պրոգրեսիայի n անդամների գումարի բանաձևը։

7. Ապացուցեք այն պայմանը, որն անհրաժեշտ է և բավարար որպեսզի երեք թվերը լինեն թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ։

8. Ի՞նչ բան է երկրաչափական պրոգրեսիան։ Ձևակերպեցեք և արտածեցեք երկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձևը։

9. Ձևակերպեցեք և արտածեցեք երկրաչափական պրոգրեսիայի n անդամների գումարի բանաձևը։

10. Ապացուցեք այն պայմանը, որն անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի երեք դրական թվերը լինեն երկրաչափական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ։

Գլուխ XV

ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՑՈՒՑԻՉՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆ։ ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ ԵՎ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐ

§ 125. ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ՑՈՒՑԻՉՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆ

Հիշեցնենք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի սահմանումը (տես § 58, 72)։

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ արտադրիչ}}$, $n \in N$, $n > 1$,

2) $a^1 = a$,

3) $a^0 = 1$, $a \neq 0$,

4) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in N$, $a \neq 0$։

Այս սահմանումից հետևում է, որ a^n *աստիճանի հասկացությունը սահմանված է ցանկացած ամբողջ* n, $n \in Z$ *ցուցիչի համար։ Այժմ մուծենք դրական կամ բացասական կոտորակային ցուցիչով աստիճանի հասկացությունը։ Դրանից հետո* a^r *աստիճանը կորոշվի ցանկացած* r, $r \in Q$ *ռացիոնալ ցուցիչի համար։*

Թվաբանական արմատի սահմանումից հետևում է, որ $a \geq 0$ *դեպքում տեղի ունի* $\sqrt[n]{a^n} = a$ *նույնությունը (տես § 97)։ Ուստի, օրինակ,*

$\sqrt[5]{2^{15}} = \sqrt[5]{(2^3)^5} = 2^3$, *կամ* $\sqrt[5]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{5}}$ ։ *Հանգունորեն,* $\sqrt[6]{2^{-18}} = \sqrt[6]{(2^{-3})^6} = 2^{-3} = 2^{-\frac{18}{6}}$,

Ընդհանրապես, դիցուք $a > 0$, $m \in Z$, $n \in N$ *և* m*-ը բաժանվում է* n*-ի վրա, այնպես որ՝* $m = nk$, *որտեղ* $k \in Z$։ *Այդ դեպքում՝*

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}։$$

Այժմ ենթադրենք, թե m*-ը չի բաժանվում* n*-ի վրա, այնպես որ* $\frac{m}{n}$*-ը կոտորակային թիվ է։ Մուծենք կոտորակային ցուցիչով աստիճանի սահմանումը։*

Սահմանում։ **a դրական թվի $\frac{m}{n}$ կոտորակային ցուցիչով աստիճան կոչվում է a թվի m աստիճանի n աստիճանի արմատը.**

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ a>0\left(m\in Z;\ n\in N;\ \frac{m}{n}\text{-ը կոտորակային թիվ է}\right),$$

Օրինակներ: $5^{\frac{3}{7}}=\sqrt[7]{5^3}=\sqrt[4]{125},\ 9^{\frac{3}{2}}=\sqrt{9^3}=9\sqrt{9}=27,$

$$3^{-\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{3^{-2}}=\sqrt[5]{\frac{1}{9}}=\frac{1}{\sqrt[5]{9}},$$

Հիշեցնենք, որ արմատի ցուցիչը կարող է լինել միայն բնական թիվ (մասնավորապես, արմատի ցուցիչ կարող է լինել և 1 թիվը, տես § 98)։ $\sqrt[-2]{9}$, $\sqrt[-3]{2^6}$, $\sqrt[0]{1}$ *տեսքի արտահայտությունները իմաստ չունեն։*

Միևնույն թիվը կոտորակի տեսքով կարող է գրվել տարբեր կերպ, օրինակ, $\frac{3}{7}=\frac{6}{14}=\frac{15}{35}$*։ Ցույց տանք, որ դրական թվի կոտորակային ցուցիչով աստիճանի արժեքը կախված չէ այն բանից, թե ինչ տեսքով է գրված աստիճանացույցը։*

Ապացուցենք, օրինակ, հետևյալ աստիճանների հավասարությունը՝ $5^{\frac{3}{7}}=5^{\frac{15}{35}}$*։ Ըստ կոտորակային ցուցիչով աստիճանի սահմանման և համաձայն արմատի հիմնական հատկության (§ 98) հաջորդաբար կստանանք.*

$$5^{\frac{3}{7}}=\sqrt[7]{5^3}=\sqrt[35]{5^{15}}=5^{\frac{15}{35}}.$$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a>0)$ *հավասարությունը ճիշտ է ցանկացած* $\frac{m}{n}$ *ռացիոնալ թվի համար,* $m\in Z,\ n\in N$*։ Եթե* m*-ը բաժանվում է* n*-ի, այսինքն՝ եթե* $\frac{m}{n}$*-ը ամբողջ թիվ է, ապա այն ճիշտ է ըստ թվաբանական արմատի սահմանման, իսկ եթե* m*-ը չի բաժանվում* n*-ի, այսինքն՝ եթե* $\frac{m}{n}$*-ը կոտորակային թիվ է, ապա այն ճիշտ է ըստ կոտորակային ցուցիչով աստիճանի սահմանման։*

Սահմանում: Զրոյի դրական կոտորակային ցուցիչով աստիճանը հավասար է զրոյի.

$$0^{\frac{m}{n}}=0, \text{ եթե } m, n\in N:$$

Սահմանումից հետևում է, որ, օրինակ, $0^{\frac{5}{9}}=0$, $0^{\frac{4}{3}}=0$: *Իսկ քանի որ զրոյի բնական աստիճանը հավասար է զրոյի, ապա ստանում ենք, որ* $0^r=0$, $r\in Q$, $r>0$, *այսինքն՝ զրոյի ցանկացած դրական ռացիոնալ աստիճանը հավասար է զրոյի:*

Կամայական կոտորակային ցուցիչով աստիճանի հասկացությունը մտցվում է միայն դրական հիմքերի համար: $(-8)^{\frac{1}{3}}$, $(-1)^{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}}$, 0 *արտահայտությունները իմաստ չունեն:*

Բացասական հիմքով աստիճանը սահմանվում է միայն ամբողջ ցուցիչների համար: Օրինակ, $(-2)^3=-8$, $(-2)^{-4}=\frac{1}{16}$:

Բերենք կոտորակային ցուցիչներով աստիճանները արմատների տեսքով գրելու և, ընդհակառակը, արմատները կոտորակային ցուցիչներով աստիճանների տեսքով գրելու ևս մի քանի օրինակներ.

$$2^{\frac{3}{7}}=\sqrt[7]{2^3}=\sqrt[7]{8},$$

$$6^{\frac{8}{3}}\sqrt[3]{6^8}=36\sqrt[3]{36},$$

$$8\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{8^5\cdot 8^2}=8^{\frac{7}{5}},$$

$$5^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{125}}=\frac{1}{5}\sqrt[4]{5},$$

$$3^{-\frac{29}{9}}\sqrt[9]{3^{-29}}=\sqrt[9]{3^{-27}\cdot 3^{-2}}=3^{-3}\cdot\sqrt[9]{3^{-2}}=\frac{1}{27}\sqrt[9]{\frac{1}{9}},$$

$$\frac{1}{49}\cdot\sqrt[8]{7^5}=7^{-2}\cdot\sqrt[8]{7^5}=\sqrt[8]{7^{-16}\cdot 7^5}=7^{-\frac{11}{8}},$$

$$27\sqrt[5]{\frac{1}{9}}=3^3\cdot\sqrt[5]{3^{-2}}=\sqrt[5]{3^{15}\cdot 3^{-2}}=3^{\frac{13}{5}}:$$

Վարժություններ

(Հետևյալ վարժություններում փոփոխականներն ընդունում են դրական արժեքներ:)

Արտահայտությունները գրեցեք արմատանշանի օգնությամբ.

Սահմանում: Զրոյի դրական կոտորակային ցուցիչով աստիճանը հավասար է զրոյի.

$$0^{\frac{m}{n}}=0, \text{ եթե } m, n \in N:$$

Սահմանումից հետևում է, որ, օրինակ, $0^{\frac{5}{9}}=0$, $0^{\frac{4}{3}}=0$: Իսկ քանի որ զրոյի բնական աստիճանը հավասար է զրոյի, ապա ստանում ենք, որ $0^r=0$, $r\in Q$, $r>0$, այսինքն՝ զրոյի ցանկացած դրական ռացիոնալ աստիճանը հավասար է զրոյի:

Կամայական կոտորակային ցուցիչով աստիճանի հասկացությունը մտցվում է միայն դրական հիմքերի համար: $(-8)^{\frac{1}{3}}$, $(-1)^{\frac{2}{5}}$, $0^{-\frac{1}{2}}$ արտահայտությունները իմաստ չունեն:

Բացասական հիմքով աստիճանը սահմանվում է միայն ամբողջ ցուցիչների համար: Օրինակ, $(-2)^3=-8$, $(-2)^{-4}=\frac{1}{16}$:

Բերենք կոտորակային ցուցիչներով աստիճանները արմատների տեսքով գրելու և, ընդհակառակը, արմատները կոտորակային ցուցիչներով աստիճանների տեսքով գրելու ևս մի քանի օրինակներ.

$$2^{\frac{3}{7}}=\sqrt[7]{2^3}=\sqrt[7]{8},$$

$$6^{\frac{8}{3}}\sqrt[3]{6^8}=36\sqrt[3]{36},$$

$$8\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{8^5\cdot 8^2}=8^{\frac{7}{5}},$$

$$5^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{125}}=\frac{1}{5}\sqrt[4]{5},$$

$$3^{-\frac{29}{9}}\sqrt[9]{3^{-29}}=\sqrt[9]{3^{-27}\cdot 3^{-2}}=3^{-3}\cdot\sqrt[9]{3^{-2}}=\frac{1}{27}\sqrt[9]{\frac{1}{9}},$$

$$\frac{1}{49}\cdot\sqrt[8]{7^5}=7^{-2}\cdot\sqrt[8]{7^5}=\sqrt[8]{7^{-16}\cdot 7^5}=7^{-\frac{11}{8}},$$

$$27\sqrt[5]{\frac{1}{9}}=3^3\cdot\sqrt[5]{3^{-2}}=\sqrt[5]{3^{15}\cdot 3^{-2}}=3^{\frac{13}{5}},$$

Վարժություններ

(Հետևյալ վարժություններում փոփոխականները ընդունում են դրական արժեքներ:)

Արտահայտությունները գրեցեք արմատանշանի օգնությամբ.

919. ա) $a^{0.5}$, բ) $x^{\frac{2}{3}}$, գ) $(a^2b^5)^{\frac{1}{3}}$, դ) $(a+b)^{0.8}$, ե) $2x^{2.5}(x+y)^{1.5}$,

920. ա) $y^{\frac{1}{3}}$, բ) $k^{1.5}$, գ) $(xy^3)^{\frac{5}{2}}$, դ) $(a-b)^{1.3}$, ե) $5x^{0.5}(x-y)^{2.5}$,

Արտահայտությունները գրեցեք առանց արմատանշանի, օգտագործելով կոտորակային աստիճանացույցեր.

921. ա) $\sqrt{x^3}$, բ) $\sqrt[6]{x^2y^5}$, գ) $\sqrt[10]{a^3b^7}$, դ) $\sqrt[4]{a^5-b^5}$,

922. ա) $\sqrt[3]{a^2}$, բ) $\sqrt[8]{x^5y^4}$, գ) $\sqrt[10]{a^4b^9}$, դ) $\sqrt[3]{a^4+b^4}$,

Գտեք թվային արտահայտությունների արժեքները.

923. ա) $27^{\frac{2}{3}}$, բ) $\left(\frac{36}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$, գ) $81^{\frac{5}{4}}$, դ) $8^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{5}{4}}$,

924. ա) $32^{\frac{3}{5}}$, բ) $\left(\frac{8}{21}\right)^{-\frac{2}{3}}$, գ) $16^{\frac{3}{4}}$, դ) $81^{0.5}-25^{1.5}$,

Արտահայտությունները գրեցեք գործակցի և փոփոխականների ամբողջ ցուցիչներով աստիճանների արտադրյալի տեսքով.

925. ա) $\frac{5a^2c^7}{b^3}$, բ) $\frac{4k^3p^4}{5m^3n}$, գ) $\frac{7x^{-2}y}{a^{-3}b^2}$, դ) $\frac{3a^{-2}b^5}{4x^{-3}y^5}$,

926. ա) $\frac{3a^5b^4}{c^9}$, բ) $\frac{a^7c^3}{2b^4}$, գ) $\frac{a^5b^{-3}}{3x^3y^{-4}}$, դ) $\frac{2x^4b^{-5}}{5a^{-3}y^5}$,

Արտահայտությունները գրեցեք գործակցի և փոփոխականների ռացիոնալ ցուցիչներով աստիճանների արտադրյալի տեսքով.

927. ա) $\frac{2x^{-2}y}{\sqrt[3]{a^2b}}$, բ) $\frac{3\sqrt{yx^4}}{a^{-3}b}$, գ) $\frac{4b^5c^{-4}}{5\sqrt[3]{a^2}}$, դ) $\frac{5\sqrt[4]{a^3b^2}}{7c^2\sqrt[3]{x}}$,

928. ա) $\frac{3a^2\sqrt[5]{b}}{c^7}$, բ) $\frac{a^4\sqrt[3]{b^2}}{2x^5}$, գ) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{a^2}}$, դ) $\frac{4a^3\sqrt{b}}{\sqrt[4]{x^3y^5}}$,

§ 126. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՑՈՒՑԻՉՆԵՐՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ապացուցենք, որ աստիճանների բոլոր հինգ հատկությունները, որոնք ապացուցվել են բնական, իսկ այնուհետև կամայական ամբողջ ցուցիչներով աստիճանների համար (տես § 58, 73), պահպանում են իրենց ուժը նաև ցանկացած ռացիոնալ ցուցիչներով աստիճանների դեպքում։

Թեորեմ 1. Միևնույն դրական հիմքերով և կամայական ռացիոնալ ցուցիչներով երկու աստիճանների արտադրյալը հավասար է այնպիսի աստիճանի, որի հիմքը նույնն է, իսկ ցուցիչը հավասար է տրված աստիճանների ցուցիչների գումարին.

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{s}{t}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{s}{t}}.$$

Ապացուցում։ Դիցուք $a>0$, $\frac{p}{q}$-ն, և $\frac{s}{t}$-ն երկու ռացիոնալ թվեր են, $q, t \in N$, $p, s \in Z$։

Եթե երկու թվերն էլ ամբողջ են, ապա ապացուցումը հետևում է § 73-ից։ Ենթադրենք, թե թվերից մեկը կամ երկուսն էլ կոտորակային են։

Ըստ կոտորակային ցուցիչով աստիճանի սահմանման՝

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{s}{t}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[t]{a^s}.$$

Ըստ թվաբանական արմատի հիմնական հատկության՝

$$\sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[t]{a^s} = \sqrt[qt]{a^{pt}} \cdot \sqrt[qt]{a^{qs}}.$$

Ըստ արմատների արտադրյալի վերաբերյալ թեորեմի՝

$$\sqrt[qt]{a^{pt}} \cdot \sqrt[qt]{a^{qs}} = \sqrt[qt]{a^{pt+qs}}.$$

Ըստ կոտորակային ցուցիչով աստիճանի սահմանման՝

$$\sqrt[qt]{a^{pt+qs}} = a^{\frac{pt+qs}{qt}},$$

Քանի

$$\frac{pt+qs}{qt} = \frac{pt}{qt} + \frac{qs}{qt} = \frac{p}{q} + \frac{s}{t},$$

ապա

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{s}{t}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{s}{t}},$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Թեորեմ 2. Միևնույն դրական հիմքերով և կամայական ցուցիչներով երկու աստիճանների քանորդը հավասար է այնպիսի աստիճանի, որի հիմքը նույնն է, իսկ ցուցիչը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի աստիճանացույցերի տարբերությանը.

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{s}{t}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{s}{t}} \quad (a>0).$$

Այս թեորեմն ապացուցվում է նույն ձևով, ինչ և 1-ին թեորեմը։

Թ ե ո ր ե մ 3. *(աստիճանը աստիճան բարձրացնելու վերաբերյալ)։* Եթե $a>0$, $\frac{p}{q}$-ն և $\frac{s}{t}$-ն երկու ռացիոնալ թվեր են, $q, t \in N$, $p, s \in Z$, ապա ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{s}{t}}=a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{t}},$$

Ա պ ա ց ու ց ու մ։ Եթե երկու $\frac{p}{q}$ *և* $\frac{s}{t}$ *թվերն էլ ամբողջ են, ապա ապացուցումը հետևում է § 73-ից։ Ենթադրենք, թե այդ թվերից գոնե մեկը կոտորակային է։*

Ըստ կոտորակային ցուցիչով աստիճանի սահմանման՝

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{s}{t}}=\sqrt[t]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{s}}=\sqrt[t]{(\sqrt[q]{a^{p}})^{s}},$$

Ըստ արմատը աստիճան բարձրացնելու վերաբերյալ թեորեմի՝

$$\sqrt[t]{(\sqrt[q]{a^{p}})^{s}}=\sqrt[t]{\sqrt[q]{a^{ps}}},$$

Ըստ արմատից արմատ հանելու վերաբերյալ թեորեմի՝

$$\sqrt[t]{\sqrt[q]{a^{ps}}}=\sqrt[qt]{a^{ps}}.$$

Ըստ կոտորակային ցուցիչով աստիճանի սահմանման՝

$$\sqrt[qt]{a^{ps}}=a^{\frac{ps}{qt}},$$

Քանի որ

$$\frac{ps}{qt}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{t},$$

ապա

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{s}{t}}=a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{t}},$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Թ ե ո ր ե մ 4. Երկու դրական արտադրիչների արտադրյալի ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը հավասար է արտադրիչների նույն ցուցիչներով աստիճանների արտադրյալին.

$$(ab)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{p}{q}}\cdot b^{\frac{p}{q}},$$

Ապացուցում։ Տրված է՝ $a>0$, $b>0$, $\frac{p}{q}$-ն ռացիոնալ թիվ է։

Ունենք.

$$(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{b^p}=a^{\frac{p}{q}}\cdot b^{\frac{p}{q}},$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

Թեորեմ 5. Երկու դրական թվերի քանորդի ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի նույն ցուցիչներով աստիճանների քանորդին.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{p}{q}}:b^{\frac{p}{q}}\ (a>0,\ b>0)։$$

Այս թեորեմն ապացուցվում է նույն ձևով, ինչ և 4-րդ թեորեմը։

Այսպիսով, եթե a-ն և b-ն ցանկացած իրական դրական թվեր են, իսկ r-ը, r_1-ը և r_2-ը՝ ցանկացած ռացիոնալ թվեր, ապա ճիշտ են աստիճանների հետևյալ հինգ հատկությունները.

1) $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$, 4) $(ab)^r=a^rb^r$,

2) $\frac{a^{r_1}}{a^{r_2}}=a^{r_1-r_2}$, 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$։

3) $(a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1r_2}$,

Սրանք նույն այն բանաձևերն են, որոնք ավելի վաղ մենք ապացուցել ենք նախ բնական, այնուհետև ցանկացած ամբողջ ցուցիչներով աստիճանների համար։ Բայց այս բանաձևերն ավելի ընդհանուր են, քանի որ աստիճանացույցները կարող են լինել կամայական ռացիոնալ թվեր (բայց հիմքերը պետք է լինեն դրական)։

Օրինակներ։ *Պարզեցնել ռացիոնալ ցուցիչներով աստիճանների արտադրյալը կամ քանորդը.*

1) $3x^{\frac{4}{9}}y^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x^{-\frac{23}{18}}y^{\frac{16}{15}}=6x^{-\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{5}}$,

2) $(8a^{0.6}b^{-0.4}c^{-2}):(2a^{0.4}b^{-0.3})=4a^{0.2}b^{-0.1}c^{-2}$,

3) $\left(8a^{-2}c^{\frac{6}{5}}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(9a^{\frac{8}{3}}c^{-\frac{16}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}a^{\frac{4}{3}}c^{-\frac{4}{5}}\times$

$\times\sqrt{3}a^{\frac{2}{3}}\cdot c=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$։

Գումարի քառակուսին ներկայացնել գումարի տեսքով.

4) $\left(3a^{-\frac{2}{3}}+5a^2b^{-\frac{3}{2}}\right)^2=9a^{-\frac{4}{3}}+30a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{3}{2}}+25a^4b^{-3}$,

5) $\left(2x^{-\frac{1}{3}}y^{-3}-5x^{-2}y^{\frac{2}{3}}\right)^2=4x^{-\frac{2}{3}}y^{-6}-20x^{-\frac{5}{3}}y^{-\frac{7}{3}}+25x^{-4}y^{\frac{4}{3}}$,

Կրճատել կոտորակը ($a>0,\ b>0,\ a^2\neq b^{-3}$).

6) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}}-b^{-\frac{6}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}-b^{-\frac{3}{5}}}=\dfrac{\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^2-\left(b^{-\frac{3}{5}}\right)^2}{a^{\frac{2}{5}}-b^{-\frac{3}{5}}}=a^{\frac{2}{5}}+b^{-\frac{3}{5}}$,

Կոտորակի հայտարարում ազատվել արմատներից.

7) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{4(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=4(\sqrt{5}+2)$,

Վարժություններ

Պարզեցրեք արտահայտությունները.

929. ա) $(3a^5b^{-4})\cdot(2a^{-2}b^3)^3$, բ) $\dfrac{2a^3b^{-2}}{3x^3y^8}\cdot\dfrac{9x^4y^5}{\sqrt[4]{a^2b^{-8}}}$:

930. ա) $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{5}}$, բ) $\left(x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{3}{5}}\right):\left(x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{11}{15}}\right)$:

931. ա) $x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{4}}$ բ) $\left(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{4}}\right):\left(x^{\frac{7}{12}}y^{\frac{5}{6}}\right)$:

Պարզեցրեք արտահայտությունները և հաշվեցեք դրանց արժեքները.

932. ա) $(5x^{-2}y^8)^2\cdot(x^4y^{-3})^5$, երբ $x=-1,\ y=6$,

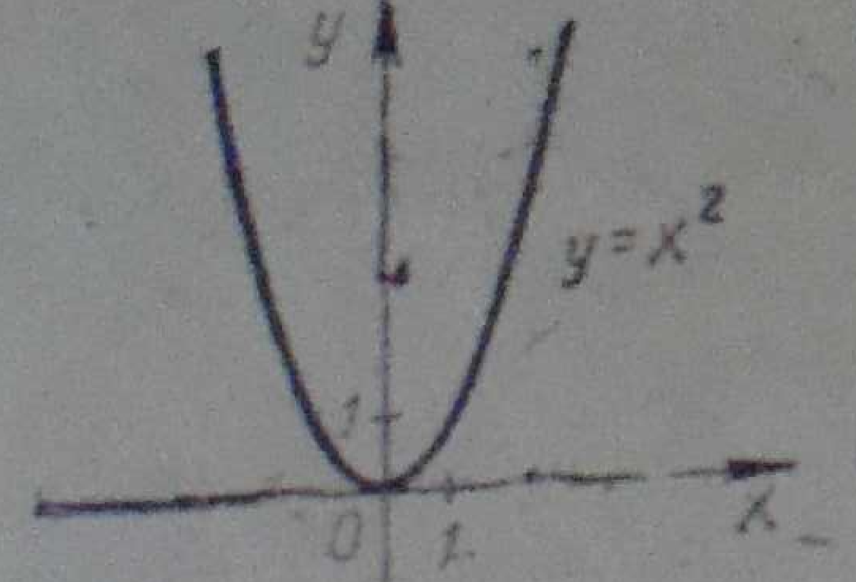
բ) $\dfrac{7a^3x^{-2}}{b^{-2}}\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^{-5}}}{b^4x^3}$, երբ $a=2,\ b=4,\ x=1$:

Կոտորակների հայտարարներում ազատվեցեք արմատներից.

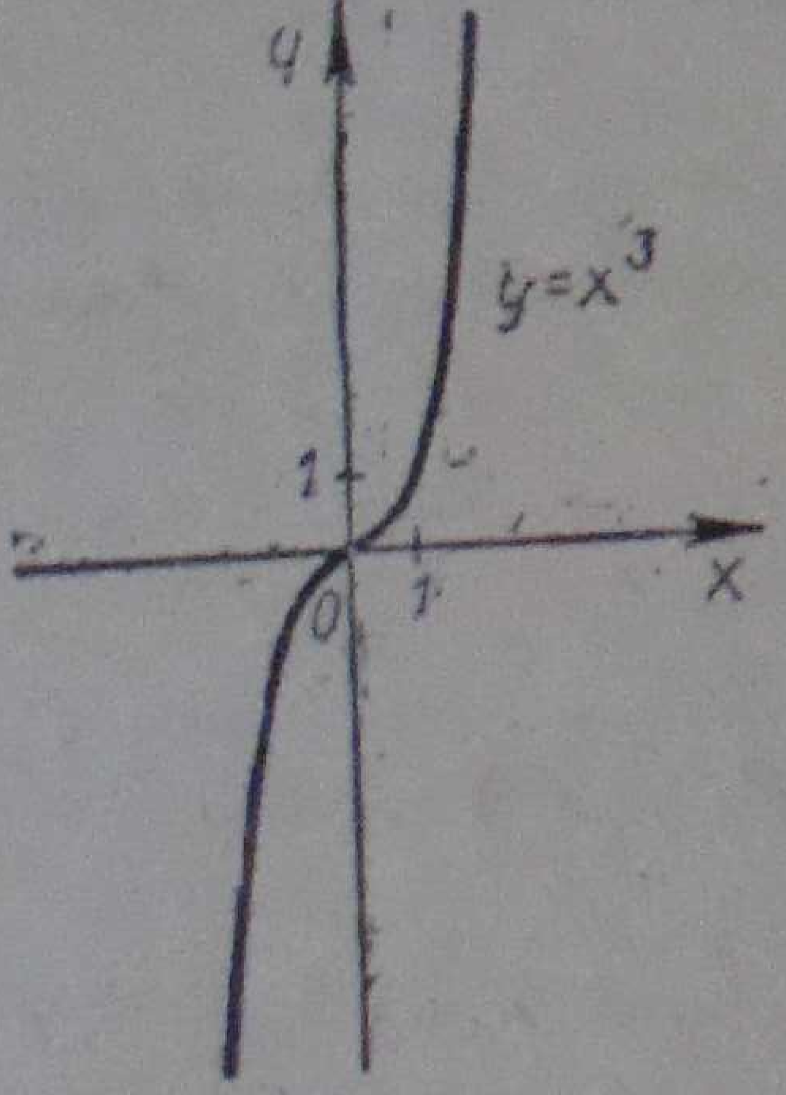
933. ա) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, բ) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$:

934. ա) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, բ) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$:

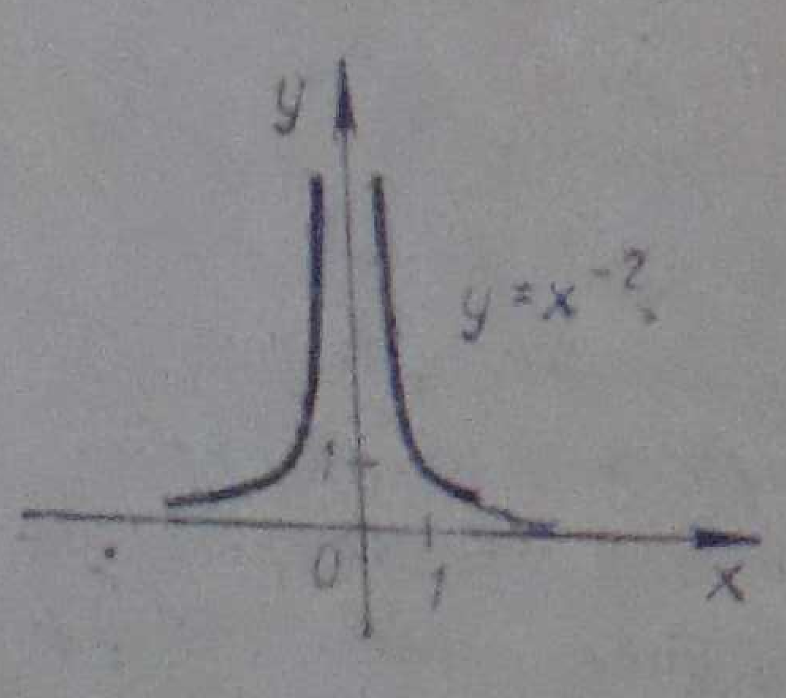
Ձևափոխեցեք ռացիոնալ ցուցիչներով աստիճանները և արմատները.



Նկ. 150



Նկ. 151



Նկ. 152

935. ա) $(\sqrt[7]{a^4}-\sqrt[7]{b^4}):(\sqrt[7]{a^2}-\sqrt[7]{b^2})$,

բ) $(4\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{a^5})\cdot\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{\frac{1}{a}}\right)$։

936. ա) $(\sqrt[3]{a^2}-8\sqrt[4]{a^3})\cdot\left(\sqrt[3]{a}-\frac{2}{\sqrt[4]{a}}\right)$,

բ) $(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{y^4}):(\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{y^2})$,

937. ա) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$,

բ) $\left(\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{11-4\sqrt{7}}\right)^2$։

938. ա) $\left(\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right)^2$,

բ) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$։

939. ա) $\left(a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}\right)^3$,

բ) $\left(\frac{x^{0.25}y^{0.25}-y^{0.5}}{x^{0.5}-x^{0.25}y^{0.25}}\right)^{-4}$։

940. ա) $\frac{1-a^{0.5}}{1+a^{0.5}}-\frac{a^{0.5}+a^{-0.5}}{a-1}$,

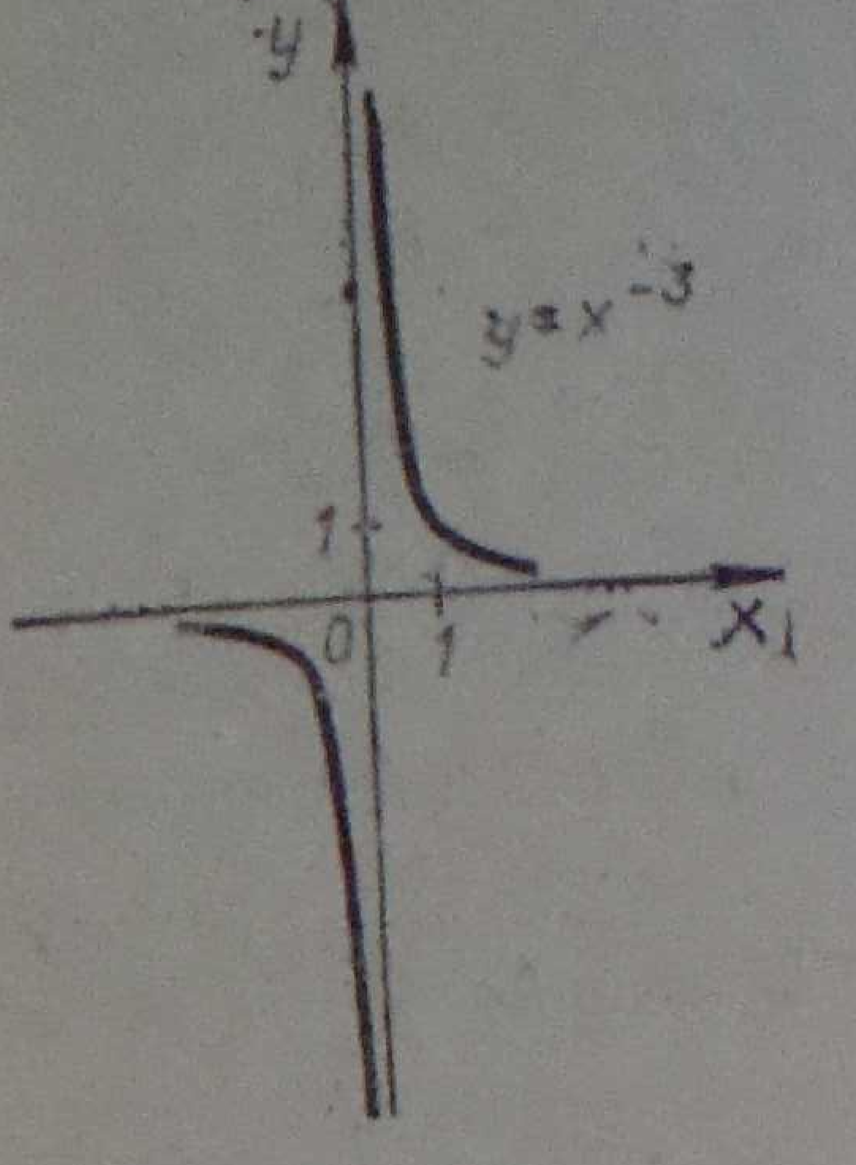
բ) $\frac{a-b}{a^{0.75}+a^{0.5}b^{0.25}}-\frac{a^{0.5}-b^{0.5}}{a^{0.25}+b^{0.25}}$,

941. ա) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}+\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$,

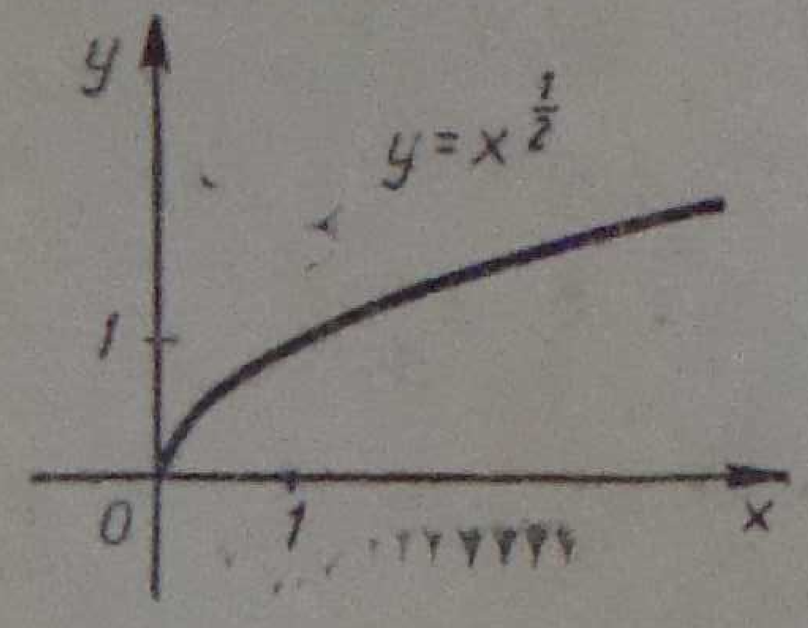
բ) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}$։

§ 127. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

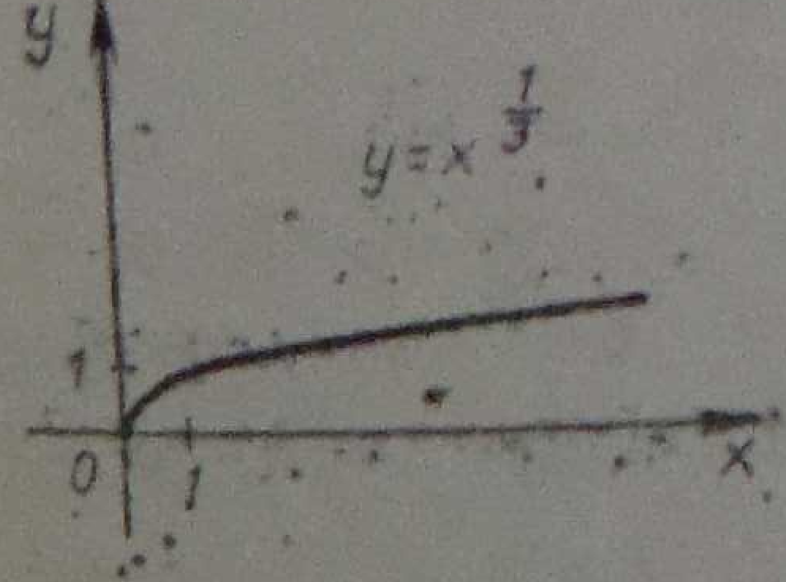
Ավելի վաղ մենք ուսումնասիրել ենք $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^{-1}$ *բանաձևերով տրված ֆունկցիաները։ Այժմ կարելի է դիտարկել, օրինակ, այնպիսի ֆունկցիաներ, ինչպիսիք են*



Նկ. 153



Նկ. 154



Նկ. 155

$y=x^{\frac{2}{3}}$ կամ $y=x^{-\frac{2}{3}}$ ֆունկցիաները և, ընդհանրապես, $y=x^r$ տեսքի ֆունկցիաները, որտեղ r-ը որևէ ռացիոնալ թիվ է։

Սահմանում։ Ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիա կոչվում է $y=x^r$ բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ $r \in Q$։

Պարզենք, թե x փոփոխականի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում է որոշված x^r արտահայտությունը, և դրանով իսկ որոշենք աստիճանային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը։ Այդ տիրույթը նշանակենք D տառով։ Դիտարկենք երեք դեպք։

1) x^2 կամ x^3 արտահայտությունները որոշված են x փոփոխականի ցանկացած արժեքների դեպքում։ Ուստի, եթե r-ը բնական թիվ է, ապա $y=x^r$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է։

Այսպիսով, եթե $r \in Z$, $N \notin r$, ապա $D = \{x|x \in R\}$։

2) x^0, x^{-2}, x^{-3} արտահայտությունները իմաստ ունեն x-ի բոլոր արժեքների դեպքում, բացի զրոյից։ Ուստի, եթե r-ը զրո է կամ բացասական ամբողջ թիվ, ապա $y=x^r$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը զրոյից տարբեր բոլոր իրական թվերի բազմությունն է։

Այսպիսով, եթե $r \in Z$, $r \notin N$, ապա $D=\{x|x| \in R;\ x \neq 0\}$։

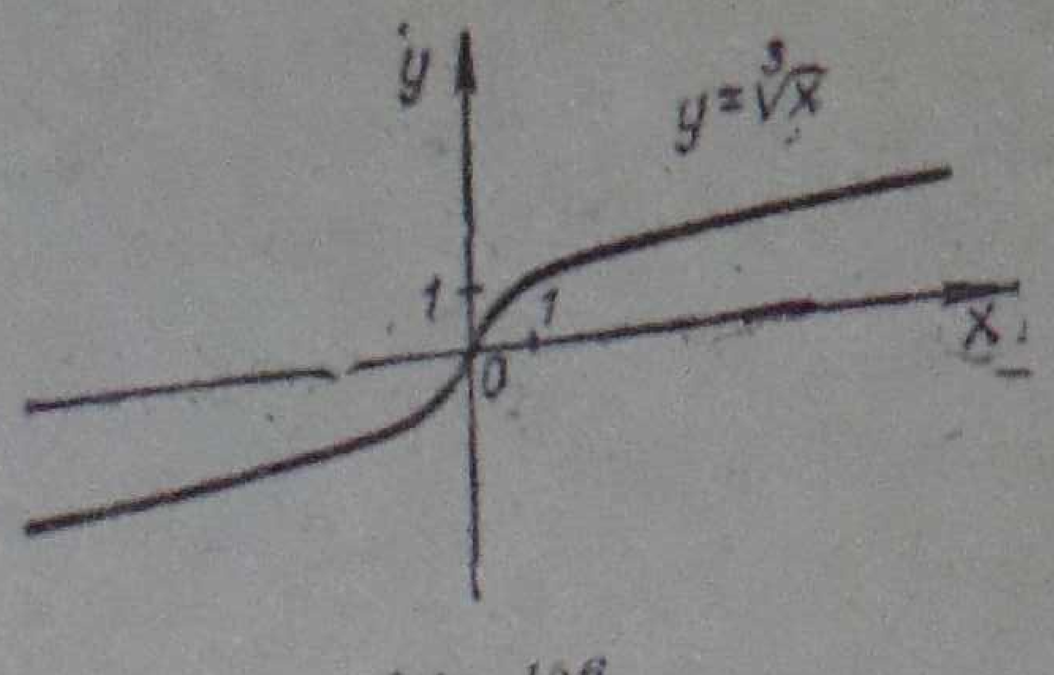
3) Դիցուք r-ը կոտորակային թիվ է։ Եթե $r>0$, ապա $y=x^r$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը ոչ բացասական իրական թվերի բազմությունն է, իսկ եթե $r<0$, ապա՝ դրական իրական թվերի բազմությունը։

Այսպիսով, եթե $r \in Q$, $r \notin Z$, $r>0$, ապա $D=\{x|x \in R;\ x \geqslant 0\}$,

եթե $r \in Q$, $r \notin Z$, $r<0$, ապա $D=\{x|x \in R;\ x>0\}$։

Ասածները լուսաբանելու համար բերենք տարբեր ռացիոնալ ցուցիչներ ունեցող աստիճանային ֆունկցիաների մի քանի գրաֆիկներ։ 150—155-րդ նկարներում տրված են համապատասխանաբար $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^{-2}$, $y=x^{-3}$, $y=x^{\frac{1}{2}}$, $y=x^{\frac{1}{3}}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։

$$x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$$



Նկ. 156

Հավասարությունը նույնություն է ոչ բացասական թվերի բազմության վրա։ Այս հավասարության աջ և ձախ մասերի որոշման տիրույթները տարբեր են։

156-րդ նկարում տրված է $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (համեմատեցեք 155-րդ նկարի հետ)։

Սրանով էլ մենք կավարտենք աստիճանային ֆունկցիայի հասկացության դիտարկումը։

Վարժություններ

942. 150—156-րդ նկարներում ներկայացված ֆունկցիաներից որո՞նք են. ա) աճող ամբողջ որոշման տիրույթի վրա, բ) նվազող ամբողջ որոշման տիրույթի վրա։

943. 150—156-րդ նկարներում ներկայացված ֆունկցիաներից որո՞նք են աճող իրենց որոշման տիրույթի մի ենթաբազմության (ո՞ր) վրա և նվազող՝ մյուս (ո՞ր) ենթաբազմության վրա։

944. Ելնելով գրաֆիկներից (նկ. 150—156), որոշեցեք յուրաքանչյուր ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը։

945. 150, 151, 152, 152, 156-րդ նկարներում պատկերված ֆունկցիաների գրաֆիկներից որո՞նք են սիմետրիկ Oy առանցքի նկատմամբ։

946. 150, 151, 152, 153, 156-րդ նկարներում պատկերված ֆունկցիաների գրաֆիկներից որո՞նք են սիմետրիկ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։

§ 128. ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ԳՐԱՖԻԿԸ

Մենք անցնում ենք մի ֆունկցիայի ուսումնասիրման, որը կարևոր նշանակություն ունի ինչպես մաթեմատիկայի, այնպես էլ ֆիզիկայում և տեխնիկայում նրա կիրառությունների համար։ Դա $y=a^x$ բանաձևով տրվող ֆունկցիան է, որտեղ a-ն որևէ թիվ է, իսկ x-ը՝ փոփոխական։

Որպեսզի a^x արտահայտությունը իմաստ ունենա x աստիճանացույցի ցանկացած արժեքների դեպքում, աստիճանի a հիմքը պետք է լինի դրական։

$a=1$ դեպքում $y=a^x$ ֆունկցիան դառնում է հաստատուն. x փոփոխականի բոլոր արժեքների դեպքում ֆունկցիան ընդունում է միևնույն արժեքը՝ 1։ Ուստի ֆունկցիայի ուսումնասիրումը $a=1$ դեպքում հետաքրքրություն չի ներկայացնում։

Սահմանում։ Ցուցչային ֆունկցիա կոչվում է $y=a^x$ բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ $a>0$, $a\neq 1$։

Կառուցենք $y=a^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $a=2$ դեպքում, այսինքն՝ $y=2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Դրա համար կազմենք x-ի և 2^x-ի համապատասխան արժեքների աղյուսակը $\frac{1}{2}$ քայլով։ Օգտվենք քառակուսի արմատների և $\frac{1}{n}$ տեսքի կոտորակների արժեքների աղյուսակներից, որոնք զետեղված են Վ. Մ. Բրադիսի «Քառանիշ մաթեմատիկական աղյուսակներ» գրքում։ Ունենք.

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\approx 1{,}41\approx 1{,}4, \qquad 2^{-\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{1{,}41}\approx 0{,}7,$$

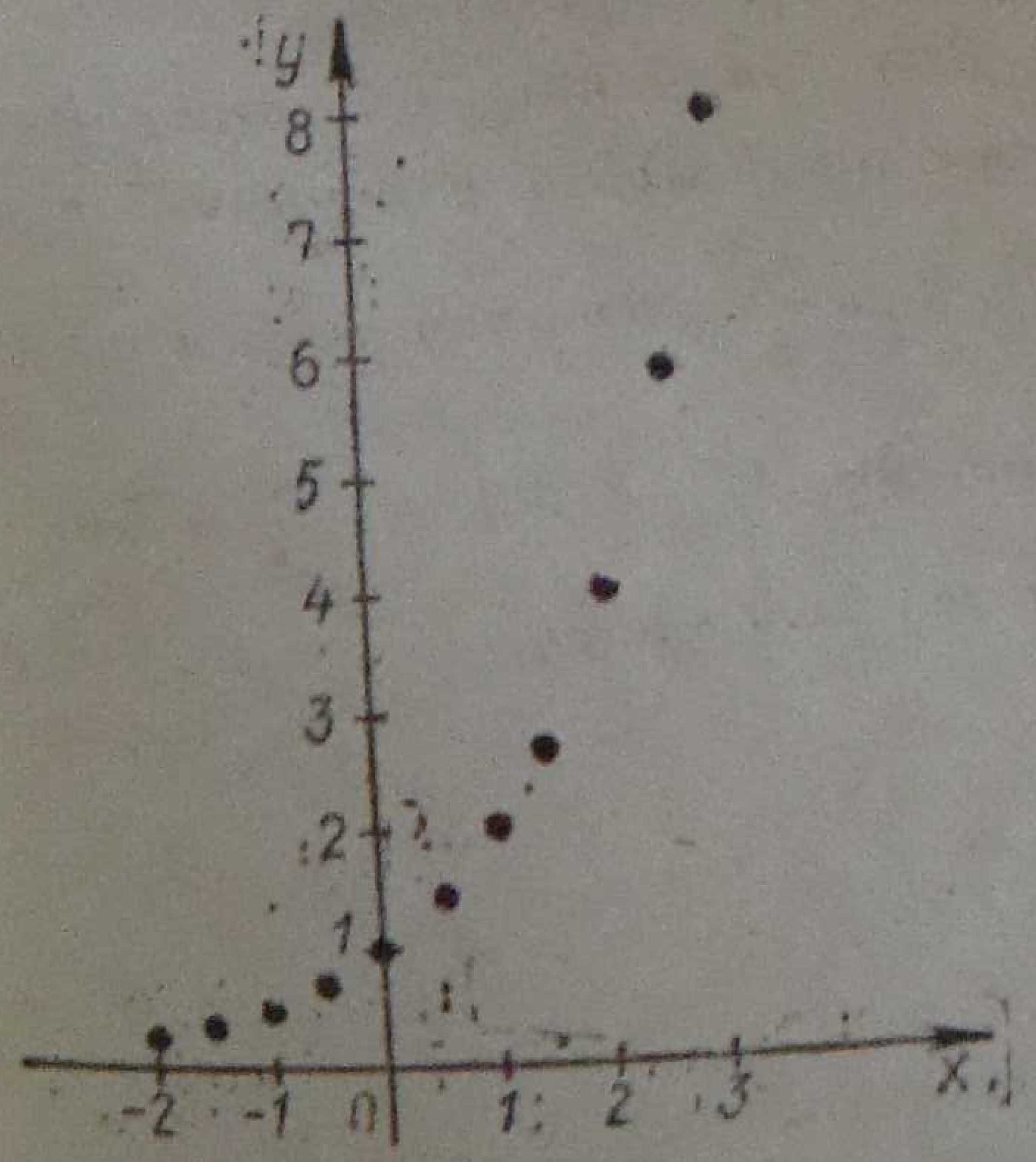
$$2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}\approx 2{,}83\approx 2{,}8, \qquad 2^{-\frac{3}{2}}\approx\frac{1}{2{,}83}\approx 0{,}4,$$

$$2^{\frac{5}{2}}\approx\sqrt{32}\approx 5{,}66\approx 5{,}7,$$

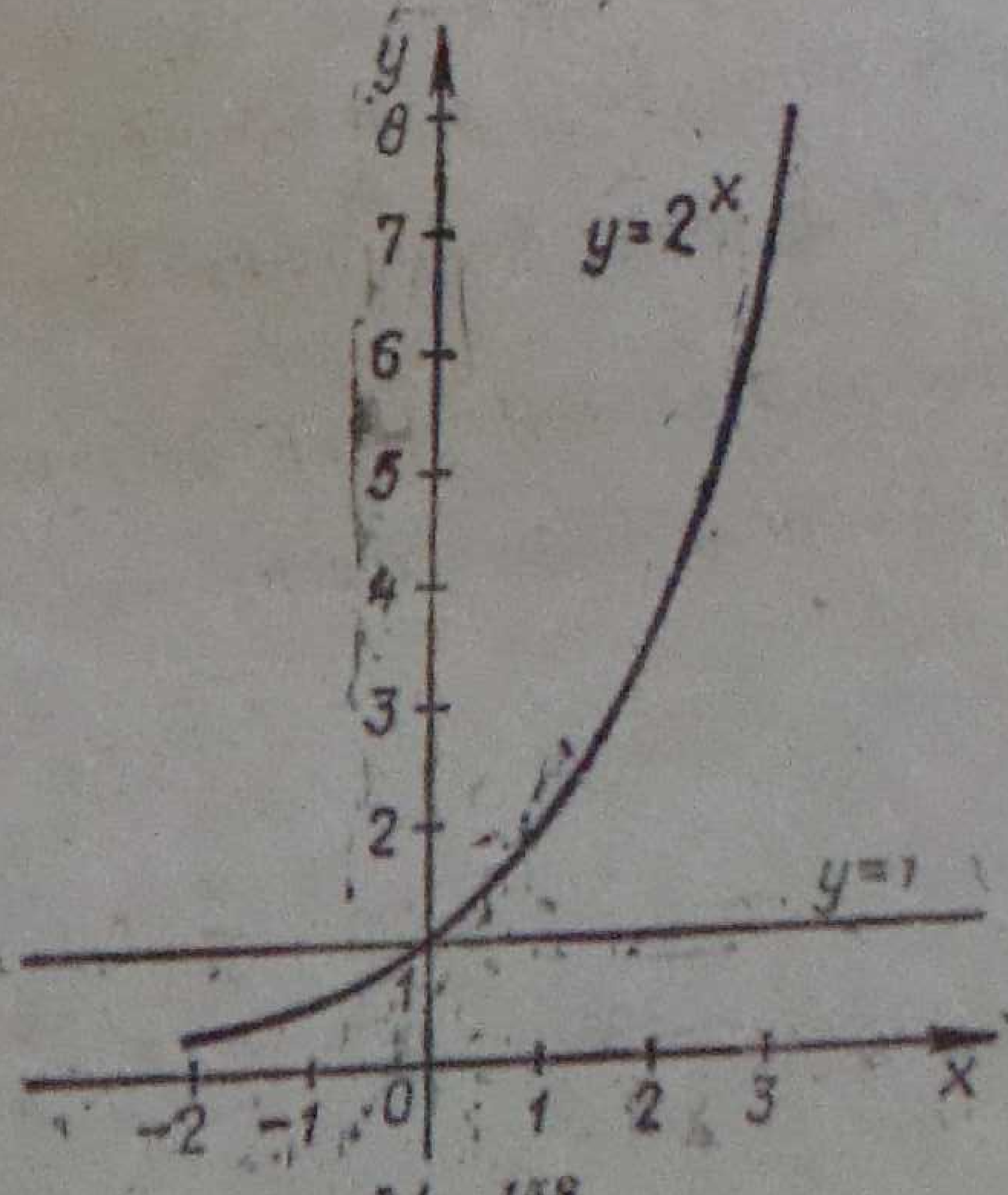
x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
2^x	0,3	0,4	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	4,0	5,7	8,0

Կոորդինատային հարթության վրա կառուցենք այն կետերը, որոնց կոորդինատները նշված են աղյուսակում (նկ. 157)։

Բոլոր կետերը միացնելով սահուն հոծ գծով, կստանանք $y=2^x$ ցուցչային ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 158)։



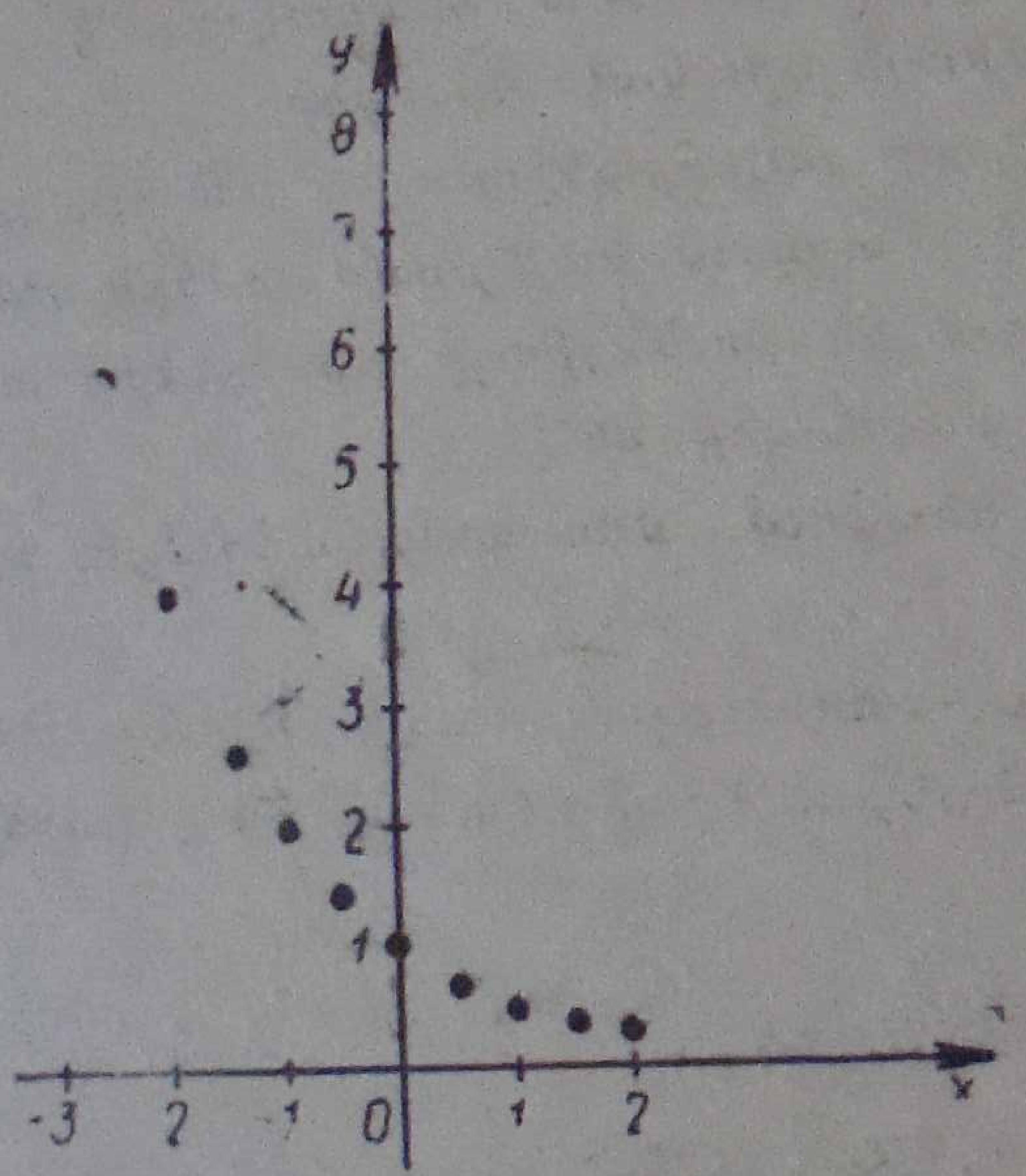
Նկ. 157



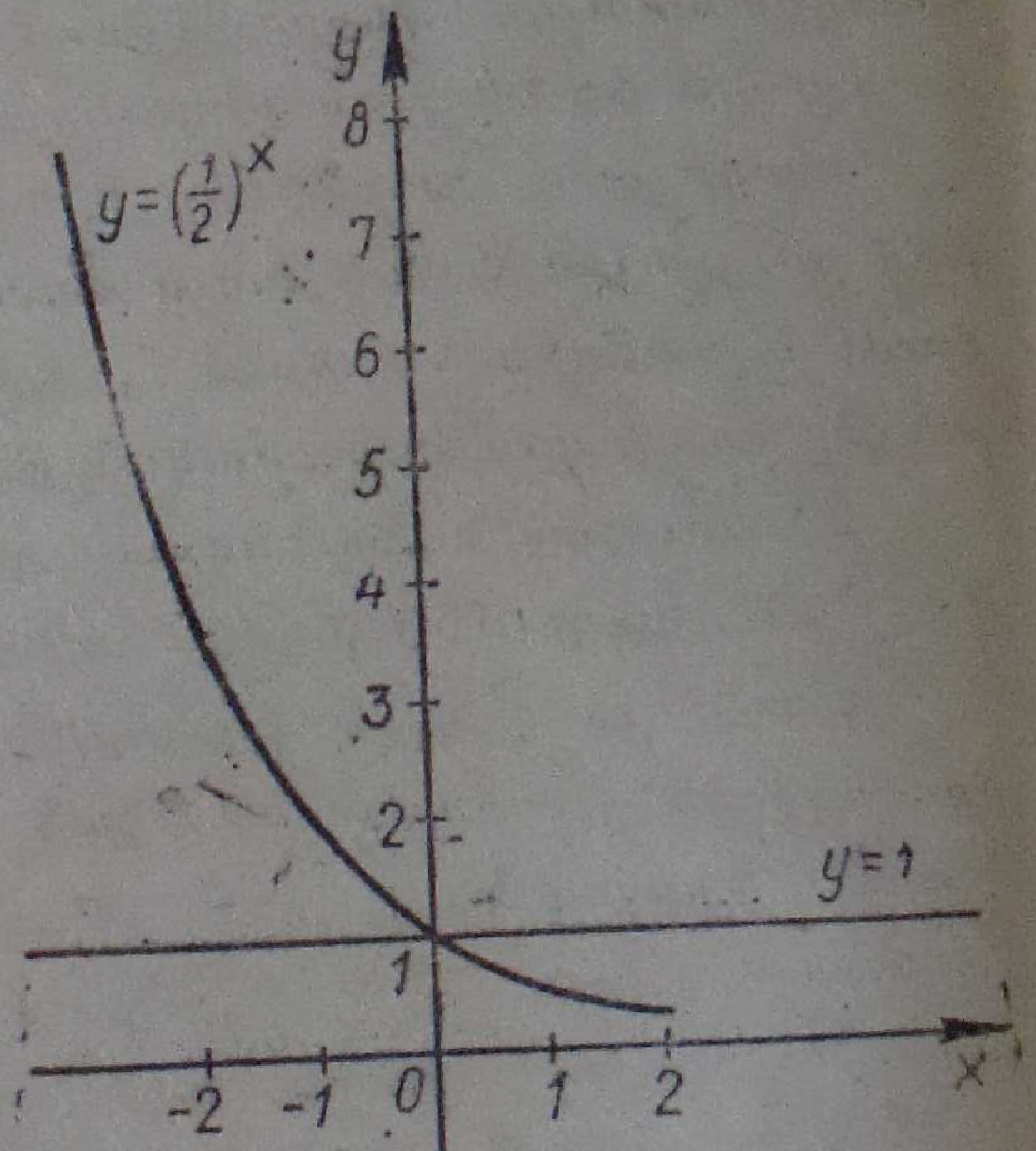
Նկ. 158

Այժմ կառուցենք $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Քանի որ $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$, ուստի $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ֆունկցիայի արժեքները հաշվելու համար օգտվենք 2^x ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակից։

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8,0	5,7	4,0	2,8	2,0	1,4	1,0	0,7	0,5	0,4	0,3



Նկ. 159



Նկ. 160

Կոորդինատային հարթության վրա կառուցենք համապատասխան կոորդինատներով կետերը (նկ. 159)։ Միացնելով բոլոր կետերը սահուն գծով, կստանանք $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 160)։

Վարժություններ

947. Կազմեցեք $y=3^x$ ֆունկցիայի արժեքների $\frac{1}{2}$-ի հավասար քայլով աղյուսակը x-ի −1,5-ից 2 արժեքների համար և կառուցեք $y=3^x$ և $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։

948. Միևնույն նկարի վրա կառուցեք հետևյալ երկու գրաֆիկները.

ա) $y=2^x$ և $y=3^x$, բ) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ և $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

§ 129. ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Վերլուծելով $y=a^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկները $a=2$ և $a=\frac{1}{2}$ դեպքում (նկ. 158, 160), կարելի է հանգել հետևյալ եզրակացությունների.

1) ցուցչային ֆունկցիան որոշված է արգումենտի բոլոր արժեքների համար, այսինքն, նրա որոշման տիրույթը բոլոր իրական թվերը R բազմությունն է։

2) Ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է Ox առանցքից վերև, այսինքն՝ կոորդինատային վերին կիսահարթությունում։ Դա նշանակում է, որ ցուցչային ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական արժեքներ։

Բացի այդ, գրաֆիկից երևում է, որ յուրաքանչյուր $y>0$ դրական թիվ ցուցչային ֆունկցիայի արժեքն է x արգումենտի որոշ արժեքի դեպքում։ Այստեղից հետևում է, որ ցուցչային ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը բոլոր դրական իրական թվերի բազմությունն է։

3) Ցուցչային ֆունկցիան $a>1$ դեպքում մոնոտոն աճում է, իսկ $0<a<1$ դեպքում՝ մոնոտոն նվազում։

$y=a^x$ ցուցչային ֆունկցիայի մոնոտոնության հատկությունը, եթե օգտագործենք տրամաբանական հետևության նշանը (տես § 84), կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

Եթե $a>1$, ապա $(x_2>x_1)\Rightarrow(y_2>y_1)$,

Եթե $0<a<1$, ապա $(x_2>x_1)\Rightarrow(y_2<y_1)$։

Գրաֆիկներից երևում է, որ ճիշտ են և հակադարձ պնդումները.

Եթե $a>1$, ապա $(y_2>y_1)\Rightarrow(x_2>x_1)$,

Եթե $0<a<1$, ապա $(y_2>y_1)\Rightarrow(x_2<x_1)$։

Կիրառելով համարժեքության նշանը (տես § 84), կարելի է այդ ուղիղ և հակադարձ պնդումները գրել հետևյալ կերպ.

Եթե $a>1$, ապա $(x_2>x_1)\Leftrightarrow(y_2>y_1)$,

Եթե $0<a<1$, ապա $(x_2>x_1)\Leftrightarrow(y_2<y_1)$։

4) $y=2^x$ և $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկների օրդինատները համեմատենք $y=1$ ուղղի օրդինատների հետ, այսինքն՝ ցուցչային ֆունկ-

ցիայի արժեքները համեմատենք 1-ի հետ, և համեմատման արդյունքները գրենք այսպիսի տեսքով.

$a>1$	$0<a<1$
$(x<0)\Leftrightarrow(0<a^x<1)$,	$(x<0)\Leftrightarrow(a^x>1)$,
$(x=0)\Leftrightarrow(a^x=1)$,	$(x=0)\Leftrightarrow(a^x=1)$,
$(x>0)\Leftrightarrow(a^x>1)$.	$(x>0)\Leftrightarrow(0<a^x<1)$։

Ստացված կախումները հաճախ օգտագործում են խնդիրներ լուծելիս։

Հաջորդ պարագրաֆում մենք կապացուցենք վերը ձևակերպված հետևյալ երկու հատկությունները. ցուցչային ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական արժեքներ և ցուցչային ֆունկցիան մոնոտոն է։

Օրինակ 1։ ա) $3^m>3^n$ անհավասարությունը ճիշտ է։ Համեմատել m-ը և n-ը։

3^m և 3^n արտահայտությունները կարելի է դիտել որպես $y=3^x$ ֆունկցիայի երկու արժեքներ $x_1=m$ և $x_2=n$ դեպքերում։ $y=3^x$ ֆունկցիան աճող է՝ ֆունկցիայի մեծ արժեքին համապատասխանում է արգումենտի մեծ արժեք։ Ուստի $m>n$։

բ) $\left(\frac{1}{3}\right)^p>\left(\frac{1}{3}\right)^q$ անհավասարությունը ճիշտ է։ Համեմատել p-ն և q-ն։

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ցուցչային ֆունկցիան նվազող է։ Ֆունկցիայի մեծ արժեքին համապատասխանում է արգումենտի փոքր արժեք։ Ուստի $p<q$։

Օրինակ 2։ $a^3<a^7$ անհավասարությունը ճիշտ է, $a>0$։ a հիմքը համեմատել 1-ի հետ։

Ըստ պայմանի՝ $a^3<a^7$, այնպես որ արգումենտի փոքր արժեքին (3) համապատասխանում է ֆունկցիայի փոքր արժեք (a^3)։ Ուստի տվյալ օրինակում $y=a^x$ ֆունկցիան աճող է։ Հետևաբար, $a>1$։

Վարժություններ

Համեմատեցեք x և y ատիճանացույցները, եթե ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները.

949. ա) $1{,}5^x>1{,}5^y$, գ) $0{,}2^x>0{,}2^y$,

բ) $\left(\frac{3}{7}\right)^x<\left(\frac{3}{7}\right)^y$, դ) $\left(\frac{9}{2}\right)^x<\left(\frac{9}{2}\right)^y$,

950. ա) $\left(\frac{5}{4}\right)^x>\left(\frac{5}{4}\right)^y$, գ) $\left(\frac{4}{9}\right)^x>\left(\frac{4}{9}\right)^y$,

բ) $3{,}2^x < 3{,}2^y$, դ) $(0{,}9)^x < (0{,}9)^y$։

Դրական a հիմքը համեմատեցեք 1-ի հետ։

951. ա) $a^{0{,}2} > a^{0{,}5}$, բ) $a^{4{,}1} < a^2$, գ) $a^{3{,}2} > a^3$, դ) $a^{2{,}3} < a^{1{,}2}$,
952. ա) $a^{3{,}3} > a^{5{,}9}$, բ) $a^{6{,}1} < a^{7{,}2}$, գ) $a^{3{,}6} < a^{-4{,}1}$, դ) $a^{0{,}3} > a^{-0{,}1}$։

§ 130. ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԵՐԿՈՒ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՊԱՑՈՒՑՈՒՄԸ

Դիտարկենք a դրական թվի a^x աստիճանի, այսինքն՝ $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) ցուցչային ֆունկցիայի երկու հատկություն։

Հատկություն 1. a դրական թվի ռացիոնալ ցուցիչով a^x աստիճանը ընդունում է միայն դրական արժեքներ։

Ապացուցումը տրոհվում է մի քանի մասերի, համապատասխան այն բանին, որ աստիճանի հասկացությունն ինքը ընդլայնվում է հետզհետե։

1) $x=n$, $n\in N$, $n\neq 1$։ $a^x=a^n=\underbrace{aaa\cdot\cdot\cdot a}_{n \text{ արտադրիչ}}>0$,

2) $x=1$, $a^x=a^1=a>0$,

3) $x=0$, $a^x=a^0=1>0$,

4) $x=\frac{p}{q}$, որտեղ $\frac{p}{q}$-ն դրական կոտորակային թիվ է, $p, q\in N$, $a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$։

Քանի որ $a>0$, ապա $a^p>0$ (տես § 86), ուստի և $\sqrt[q]{a^p}>0$ (տես § 102), հետևաբար, $a^x>0$,

5) $x<0$, $a^x=\frac{1}{a^{-x}}$, որտեղ $-x>0$։

a^{-x} հայտարարը դրական թվի դրական ցուցիչով աստիճան է։ Քիչ առաջ դիտարկված 1 (—4) դեպքերից հետևում է, որ $a^{-x}>0$։ Ուստի $\frac{1}{a^{-x}}>0$, այսինքն՝ $a^x>0$։

1-ին հատկությունն ապացուցվեց։

Հատկություն 2. (*ցուցչային ֆունկցիայի մոնոտոնությունը*)։ **Տրված է a դրական թվի x ռացիոնալ ցուցիչով a^x աստիճանը։ Եթե $a>1$, ապա x ցուցիչի մեծ արժերին համապատասխանում է a^x աստիճանի մեծ արժեք։ Եթե $0<a<1$, ապա x ցուցիչի մեծ արժերին համապատասխանում է a^x աստիճանի փոքր արժեք։**

Ապացուցում։ **1-ին դեպք։** $a>1$, Դիցուք x_1-ը և x_2-ը երկու

կամայական ռացիոնալ թվեր են և դիցուք $x_1 < x_2$, այսինքն՝ $x_2 - x_1 > 0$։ Համեմատենք a^{x_1} և a^{x_2} երկու աստիճանները։ Դրա համար պարզենք $a^{x_1} - a^{x_2}$ տարբերության նշանը։ Ունենք.

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1)\text{։} \quad (1)$$

a^{x_1} արտադրիչը դրական է ըստ 1-ին հատկության։ Ապացուցենք, որ երկրորդ արտադրիչն էլ է դրական, այսինքն, որ $a^{x_2 - x_1} > 1$։

Քանի որ x_1-ը և x_2-ը ռացիոնալ թվեր են և $x_2 - x_1 > 0$, ապա հնարավոր է հետևյալ երկու դեպքերից մեկը. կամ $x_2 - x_1$ թիվը բնական է, կամ այն դրական կոտորակային թիվ է։

Սկզբում ենթադրենք, թե $x_2 - x_1 = n$, որտեղ $n \in \mathbf{N}$։ Ըստ պայմանի $a > 1$։ Այս անհավասարության երկու մասերը բարձրացնենք n աստիճան (տես § 86), կստանանք՝ $a^n > 1$, այսինքն՝ $a^{x_2 - x_1} > 1$։

Այժմ ենթադրենք, թե $x_2 - x_1 = \frac{p}{q}$, որտեղ $p, q \in \mathbf{N}$, $\frac{p}{q}$-ն կոտորակային թիվ է։ Քանի որ $a > 1$ և $p \in \mathbf{N}$, ապա $a^p > 1$։ Այս անհավասարության երկու մասերից հանենք q աստիճանի արմատ (տես § 102), կստանանք.

$$\sqrt[q]{a^p} > 1, \quad a^{\frac{p}{q}} > 1, \quad a^{x_2 - x_1} > 1\text{։}$$

Դառնանք (1) հավասարությանը։ Նրա աջ մասը դրական է, քանի որ երկու արտադրիչներն էլ դրական են։ Ուստի և ձախ մասն է դրական, այսինքն՝ $a^{x_2} - a^{x_1} > 0$, հետևաբար, $a^{x_2} > a^{x_1}$։

Այսպիսով, $y = a^x$ ֆունկցիան $a > 1$ դեպքում աճող է իր որոշման ամբողջ տիրույթում։

2-րդ դեպք: Եթե $0 < a < 1$, ապա $y = a^x$, $x \in \mathbf{Q}$ ֆունկցիան նվազում է իր որոշման ամբողջ տիրույթում։ Ապացուցումը կատարվում է նախորդի նմանությամբ։

Ճշմարիտ է 2-րդին հակադարձ հետևյալ պնդումը։ Երբ $a > 1$, ապա a^x աստիճանի մեծ արժեքին համապատասխանում է աստիճանացույցի մեծ արժեք: Երբ $0 < a < 1$, ապա a^x աստիճանի փոքր արժեքին համապատասխանում է աստիճանացույցի մեծ արժեք:

Ապացուցում, 1-ին դեպք. $a > 1$։ Դիցուք $a^{x_1} < a^{x_2}$, Ապացուցենք, որ $x_1 < x_2$։ Ենթադրենք հակառակը, այսինքն, որ $x_1 \geqslant x_2$։ Եթե $x_1 = x_2$, ապա $a^{x_1} = a^{x_2}$, բայց դա հակասում է պայմանին։ Իսկ եթե $x_1 > x_2$, ապա 2-րդ հատկության հիման վրա կունենայինք $a^{x_1} > a^{x_2}$, որը

նույնպես հակասում է պայմանին։ Մնում է մեկ հնարավորություն՝ $x_1<x_2$։ Թեորեմն ապացուցված է։

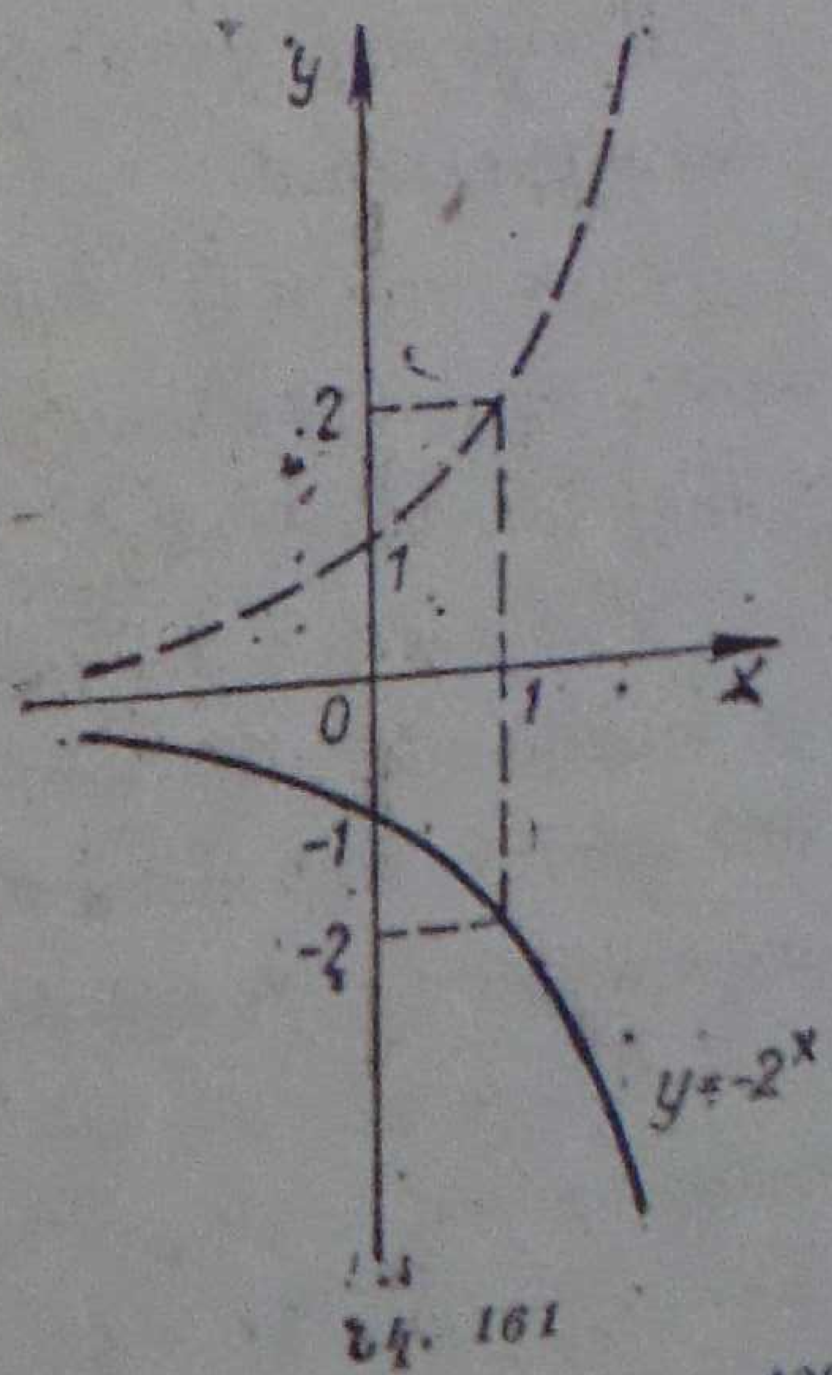
2-րդ դեպք։ $0<a<1$։ Ապացուցումը կատարվում է նախորդի նմանությամբ։

a^x աստիճանի հասկացությունը $a>0$ դեպքում մենք սահմանեցինք (տես § 125) կամայական ռացիոնալ $x(x\in Q)$ աստիճանացույցի համար։ Ուստի նախորդ երկու հատկությունները ձևակերպվեցին և ապացուցվեցին ռացիոնալ ցուցիչներով աստիճանների համար։ Բայց $a>0$ դեպքում a^x աստիճանի հասկացությունը կարելի է սահմանել նաև իռացիոնալ x աստիճանացույցի համար։ Դրանով իսկ a^x աստիճանի հասկացությունը $a>0$ դեպքում կսահմանվի ցանկացած իրական $x(x\in R)$ աստիճանացույցի համար։ Այդ դեպքում a^x աստիճանի երկու հատկությունները, որ ապացուցվեցին ցանկացած ռացիոնալ x-ի համար, ուժի մեջ կլինեն նաև ցանկացած իրական (ռացիոնալ և իռացիոնալ) x թվի համար։

Կառուցենք մի քանի գրաֆիկներ, որոնք բերվում են ցուցչային ֆունկցիաների գրաֆիկների։

Օրինակ 1։ Կառուցել $y=-2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։

Նախ կառուցենք $y=2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Դիցուք $(a;\ b)$ կետը պատկանում է այդ գրաֆիկին, այդ դեպքում $b=2^a$, հետևաբար, $-b=-2^a$։ Այս հավասարությունից հետևում է, որ $(a;\ -b)$ կետը պատկանում է $y=-2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկին։ Եվ հակադարձը, եթե $(c;\ d)$ կետը պատկանում է $y=-2^x$ ֆունկցիայի որոնելի գրաֆիկին, ապա $d=-2^c$, այսինքն՝ $-d=2^c$։ Այստեղից հետևում է, որ $(c;\ -d)$ կետը պատկանում է $y=2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկին։



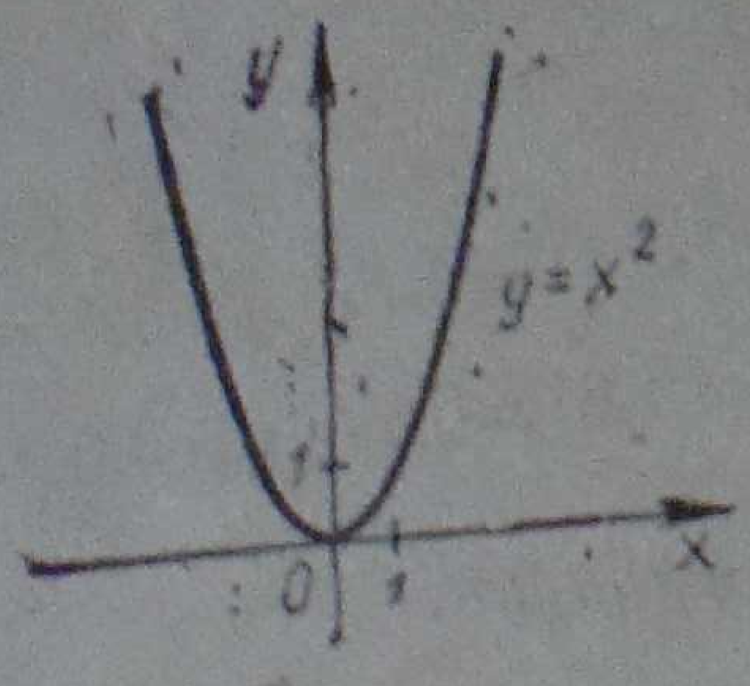
Նկ. 161

Այսպիսով, $y=-2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է $y=2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը սիմետրիկ արտապատկերել Ox առանցքի նկատմամբ (նկ. 161)։

Օրինակ 2։ Կառուցել $y=2^{|x|}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։

Եթե $x\geq 0$, ապա $|x|=x$ և $y=2^x$։ Ուստի Oy առանցքից աջ կառուցենք $y=2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Եթե $x<0$, ապա $|x|=-x$ և $y=2^{-x}$, ուստի Oy առանցքից

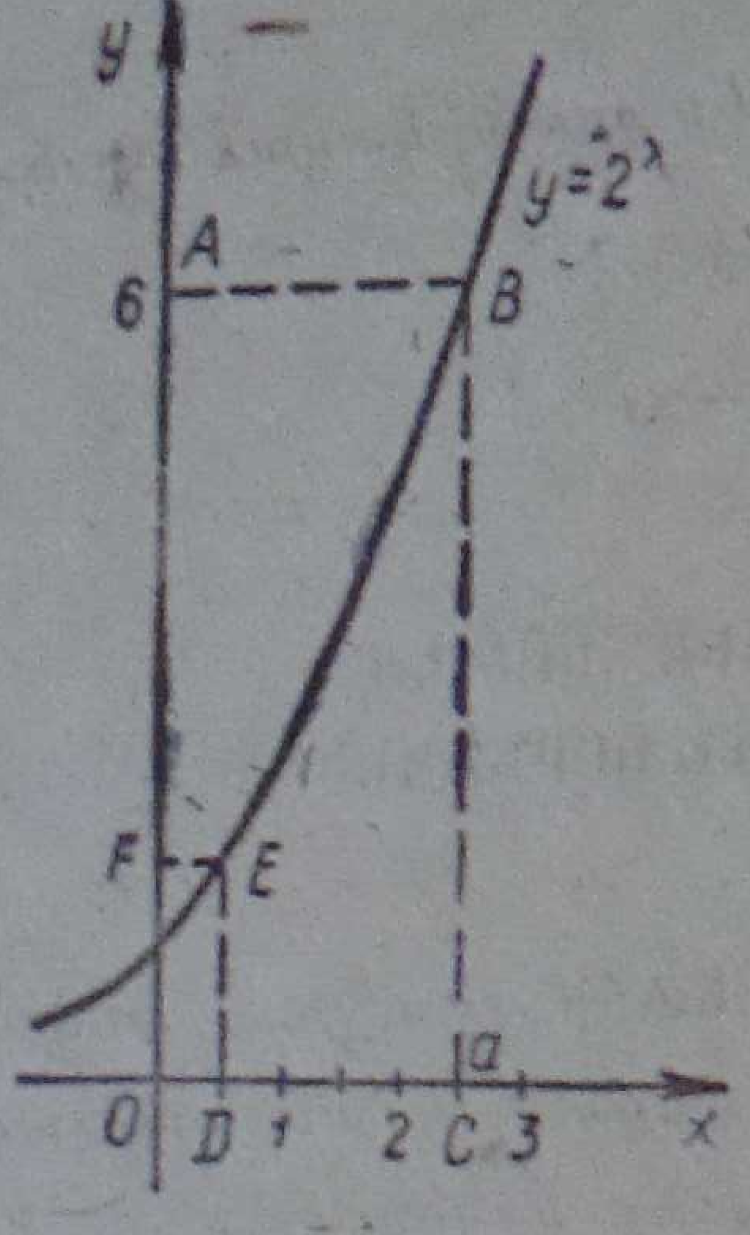
ձախ կառուցենք $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 162)։



Նկ. 162

Խ ն դ ի ր ։ $y=2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով գտնել $\sqrt[5]{6}$-ի մոտավոր արժեքը (նկ. 163)։

Լ ու ծ ու մ ։ Oy առանցքի վրա O կետից սկսած դրական ուղղությամբ տեղադրենք այնպիսի OA հատված, որ $|OA|=6$։ A կետից տանենք Oy առանցքին ուղղահայաց AB հատվածը, որը $y=2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ հատվում է B կետում։ B կետից տանենք Ox առանցքին ուղղահայաց BC հատվածը, որը Ox-ի հետ հատվում է C կետում։



Նկ. 163

Դիցուք C կետի աբսցիսը հավասար է a-ի, այդ դեպքում B կետի կոորդինատները կլինեն $(a;\ 2^a)$, այնպես որ $|BC|=2^a$, ընդ որում $2^a=6$։ OC հատվածը բաժանենք 5 համընկնելի մասերի։ Եթե $|OD|=\frac{a}{5}$, ապա

$$|DE|=2^{\frac{a}{5}}, \text{ բայց } 2^{\frac{a}{5}}=\sqrt[5]{2^a}=\sqrt[5]{6}.$$

Այսպիսով $\sqrt[5]{6}$-ի մոտավոր արժեքը հավասար է DE հատվածի երկարությանը, այսինքն՝ $\sqrt[5]{6}\approx 1,4$։

Վարժություններ

Հետևյալ ատիճանները համեմատեցեք 1-ի հետ.

953 ա) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$, գ) $0{,}24^{-0{,}24}$, ե) $\left(\frac{4}{9}\right)^{0}$,

բ) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{5}{4}}$, դ) $3{,}21^{3-2}1$, զ) $6{,}2^{6{,}2}$։

954. ա) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{4}{3}}$, գ) $\left(\frac{9}{8}\right)^{-\frac{2}{11}}$, ե) $0{,}215^{-0{,}7}$,

բ) $5{,}2^{-1{,}5}$, դ) $0{,}01^{4{,}2}$, զ) $\left(\frac{32}{3}\right)^{-\frac{5}{8}}$,

Ի՞նչ նշան ունի x ատիճանացույցը, եթե.

955. ա) $2{,}3^x=4{,}5$, բ) $0{,}2^x=0{,}4$, գ) $0{,}7^x=2{,}7$, դ) $5{,}1^x=0{,}23$,

956. ա) $0{,}4^x=0{,}25$, բ) $4{,}3^x=3{,}1$, գ) $15{,}6^x=0{,}7$, դ) $0{,}01^x=6{,}4$,

Հետևյալ հավասարումները լուծեցեք գրաֆիկորեն.

957. ա) $2^x-6=0$, բ) $2-x=0{,}5^x$,

958. ա) $3^x-5=0$, բ) $3^x=2x+3$։

Հետևյալ անհավասարությունները լուծեցեք գրաֆիկական եղանակով.

959. ա) $2^x>10-3x$, բ) $0{,}5^x>x+1$,

960. ա) $3^x<5-2x$, բ) $3^x>1-x$։

§ 131. ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Ցուցչային հավասարում կոչվում է աստիճանի ցուցիչում փոփոխական պարունակող հավասարումը: Ցուցչային հավասարման պարզագույն օրինակ է $a^x=b$ հավասարումը: Այսուհետև մենք կընդունենք, որ $a>0$, $a\neq 1$։

Համանմանորեն սահմանվում է ցուցչային անհավասարությունը: Այդպիսի անհավասարությունների պարզագույն օրինակներ են $a^x>b$ կամ $a^x<b$ անհավասարությունները: Այստեղ ևս մենք կընդունենք, որ $a>0$, $a\neq 1$։

Պարզագույն ցուցչային հավասարումների մենք արդեն հանդիպել ենք երկրաչափական պրոգրեսիաներն ուսումնասիրելիս (տես § 124)։ Ցուցչային հավասարումների լուծումը հիմնված է այն բանի վրա, որ դրական և 1-ից տարբեր միևնույն հիմքերն ունեցող երկու աստիճանների հավասարությունից հետևում է աստիճանացույցների հավասարությունը.

$$(a^x=a^y,\ a>0,\ a\neq 1)\Rightarrow(x=y)։$$

Օրինակ 1: Լուծել $7^{2x-3}=7^{17-3x}$ հավասարումը։

Լուծում: Միևնույն 7 հիմքով երկու աստիճանների հավասարությունից հետևում է աստիճանացույցների հավասարությունը: Մենք հանգում ենք հետևյալ հավասարմանը. $2x-3=17-3x$, $x=4$։

Պատասխան. $\{4\}$։

Օրինակ 2: Լուծել $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{9-6x}$ հավասարումը։

Լուծում։ Այստեղ տրված է $\frac{3}{5}$ և $\frac{5}{3}$ տարբեր հիմքերով երկու աստիճանների հավասարություն։ Տրված հավասարումը ձևափոխենք $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{6x-9}$ տեսքի։ Այժմ կարելի է կազմել հավասարում. $x^2=6x-9$, $x^2-6x+9=0$, $x=3$։

Պատասխան. $\{3\}$։

Օրինակ 3: Լուծել $0{,}5\sqrt[4]{2^x}=2^{x+1}$ հավասարումը։

Լուծում։ Հավասարման ձախ մասը ներկայացնենք 2 հիմքով աստիճանի տեսքով՝ $0{,}5\cdot\sqrt[4]{2^x}=2^{-1}\cdot 2^{\frac{x}{4}}=2^{\frac{x}{4}-1}$։ Մենք հանգեցինք $2^{\frac{x}{4}-1}=2^{x+1}$ հավասարմանը։ Աստիճանների հիմքերը հավասար են։ Կազմենք հավասարում. $\frac{x}{4}-1=x+1$, $\frac{3}{4}x=-2$, $x=-\frac{8}{3}$։

Պատասխան. $\left\{-\frac{8}{3}\right\}$։

Օրինակ 4: Լուծել $3^{4x+10}\cdot 5^{6x+2}=15^{5x+6}$ հավասարումը։

Լուծում։ Հավասարման աջ մասը ներկայացնենք $3^{5x+6}\cdot 5^{5x+6}$ տեսքով։ Հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$3^{4x+10}\cdot 5^{6x+2}=3^{5x+6}\cdot 5^{5x+6},$$

$$\frac{3^{4x+10}}{3^{5x+6}}=\frac{5^{5x+6}}{5^{6x+2}},$$

$$3^{4-x}=5^{4-x},\quad 4-x=0,\quad x=4,$$

Պատասխան. $\{4\}$։

Անցնենք ցուցչային անհավասարությունների լուծմանը։ Այն հիմնըված է a^x ցուցչային ֆունկցիայի մոնոտոնության հատկության վրա. 1-ից մեծ հիմքի դեպքում ֆունկցիան աճում է, իսկ 1-ից փոքր դրական հիմքի դեպքում՝ նվազում։

Օրինակ 5: Լուծել $7^{2x-3}<7^{17-3x}$ անհավասարությունը։

Լուծում։ Եթե աստիճանի հիմքը մեծ է 1-ից, ապա աստիճանի փոքր արժեքին համապատասխանում է փոքր աստիճանացույց։ Կազմենք անհավասարություն. $2x-3<17-3x$, $x<4$,

Պատասխան. $]-\infty;\,4[$։

Օրինակ 6։ Լուծել $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}>\left(\frac{3}{5}\right)^{6x-9}$ անհավասարությունը։

Լուծում։ Եթե աստիճանի հիմքը դրական է և փոքր է 1-ից, ապա աստիճանի փոքր արժեքին համապատասխանում է մեծ աստիճանացույց։ Կազմենք անհավասարություն. $x^2<6x-9$, $(x-3)^2<0$։ Անհավասարությունը լուծում չունի։

Պատասխան. $\varnothing$։

Օրինակ 7։ Լուծել $5^{x^2}\geqslant 5^{6-x}$ անհավասարությունը։

Լուծում։ $x^2\geqslant 6-x$, $x^2+x-6\geqslant 0$, $x^2+x-6=0$ հավասարման արմատներն են -3 և 2։ $y=x^2+x-6$ պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են դեպի վեր։ Ուստի տրված անհավասարության լուծումների բազմությունը հետևյալ երկու միջակայքերի միավորումն է $]-\infty;\ -3]$ և $[2;\ +\infty[$։

Պատասխան. $]-\infty;\ -3]\cup[2;\ +\infty[$։

Օրինակ 8։ Լուծել $(0{,}25)^{x+6}<\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$ անհավասարությունը։

Լուծում։ $x+6>x^2$, $x^2-x-6<0$։

Պատասխան. $]-2;\ 3[$։

Վարժություններ

Լուծեցեք հետևյալ հավասարումները.

961. ա) $3^x-3^3=0$, բ) $5^{x+3}-5^{5-x}=0$։

962. ա) $2^{4x}=64$, բ) $16^{x+2}-4^{3x}=0$։

963. ա) $625-5^{x+1}=0$, բ) $3^{4x+3}=3^{2x+4}$,

964. ա) $b^{x^2-15x+56}=1$, $b>0$, $b\neq 1$,

բ) $a^{x^2-7x+12}=1$, $a>0$, $a\neq 1$։

965. ա) $5^{x+6}-5^{x+4}=600$, բ) $4^{x+7}+4^{x+6}=20$։

966. ա) $3^{x-5}+3^{x-8}-3^{x-6}=57$, բ) $6^{x+3}-6^{x+2}+6^{x+8}=181$,

967. ա) $2^{x+4}-2^{x+2}+2^x=52$, բ) $9^{x-5}+9^{x-6}-9^{x-7}=89$,

Լուծեցեք հետևյալ անհավասարությունները․

968. ա) $0{,}2^x > 0{,}2^5$, բ) $1{,}6^{x+1} > 1{,}6$։

969. ա) $6{,}5^{2x} > 6{,}5^4$, բ) $0{,}7^{3x+1} < 0{,}7^{x+11}$,

970. ա) $12^{x-2} < 12^{2x+5}$, բ) $25^{2x-3} < 5^{3x-9}$,

Ինքնուրույն աշխատանք № 21

1. Պարզեցրեք հետևյալ արտահայտությունը և հաշվեցեք նրա արժեքը $x=32$, $y=243$ դեպքում․

$$\left(\frac{x^{-1,2}y^{6,8}}{x^{-2}y^{7}\sqrt[5]{x^{3}y^{-2}}}\right)^{2}:$$

2. Լուծեցեք $2^{x+1}+3\cdot2^{x}-5\cdot2^{x+2}+120=0$ հավասարումը։

3. Համեմատեցեք ատիճանացույցները, եթե հետևյալ անհավասարությունները ճիշտ են․

ա) $4{,}5^x > 4{,}5^y$, բ) $0{,}1^x < 0{,}1^y$։

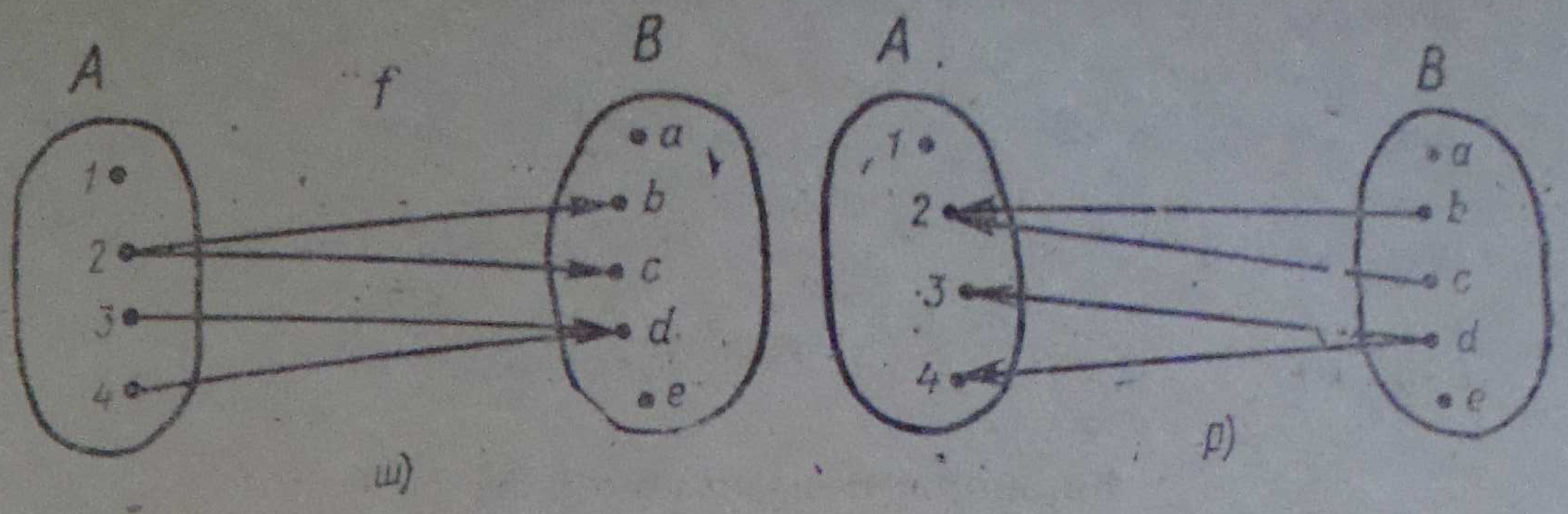
4. Հետևյալ աստիճանները համեմատեցեք 1-ի հետ․

ա) $1{,}3^{3,2}$, բ) $0{,}7^{0,4}$, գ) $0{,}2^{-0,2}$, դ) $9{,}7^{-1,3}$։

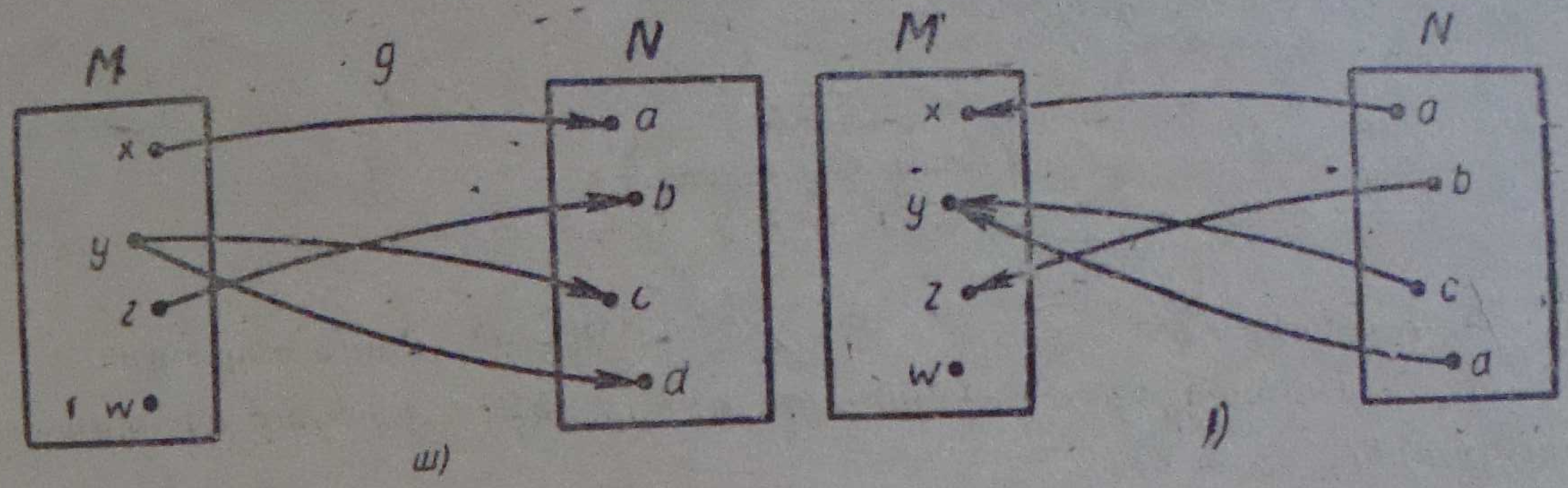
§ 132. ՓՈԽՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Հիշեցնենք (տես § 40), որ ֆունկցիա կոչվում է X և Y բազմությունների այնպիսի համապատասխանությունը, որի դեպքում յուրաքանչյուր $x \in X$ տարրին համապատասխանում է մեկից ոչ ավելի $y \in Y$ տարր։ Բոլոր այն $x \in X$ տարրերի բազմությունը, որոնք համապատասխանում են մեկ $y \in Y$ տարրի, ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է։ Բոլոր այն $y \in Y$ տարրերի բազմությունը, որոնց համապատասխանում է գոնե մեկ $x \in X$ տարր, ֆունկցիայի արժեքների տիրույթն է։

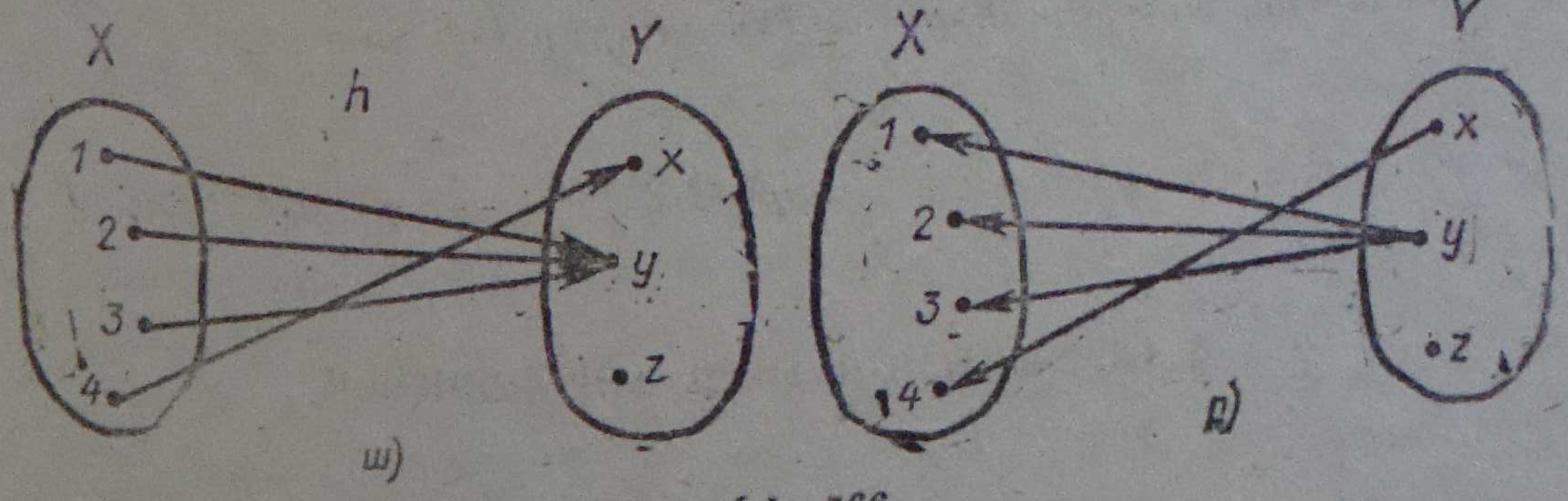
Ոչ շատ թվով տարրեր ունեցող բազմությունների միջև համապատասխանությունը, ինչպես հայտնի է, կարող է տրվել սլաքավոր սխեմայի միջոցով կամ տարրերի կարգավորված զույգերի բազմության նշումով։



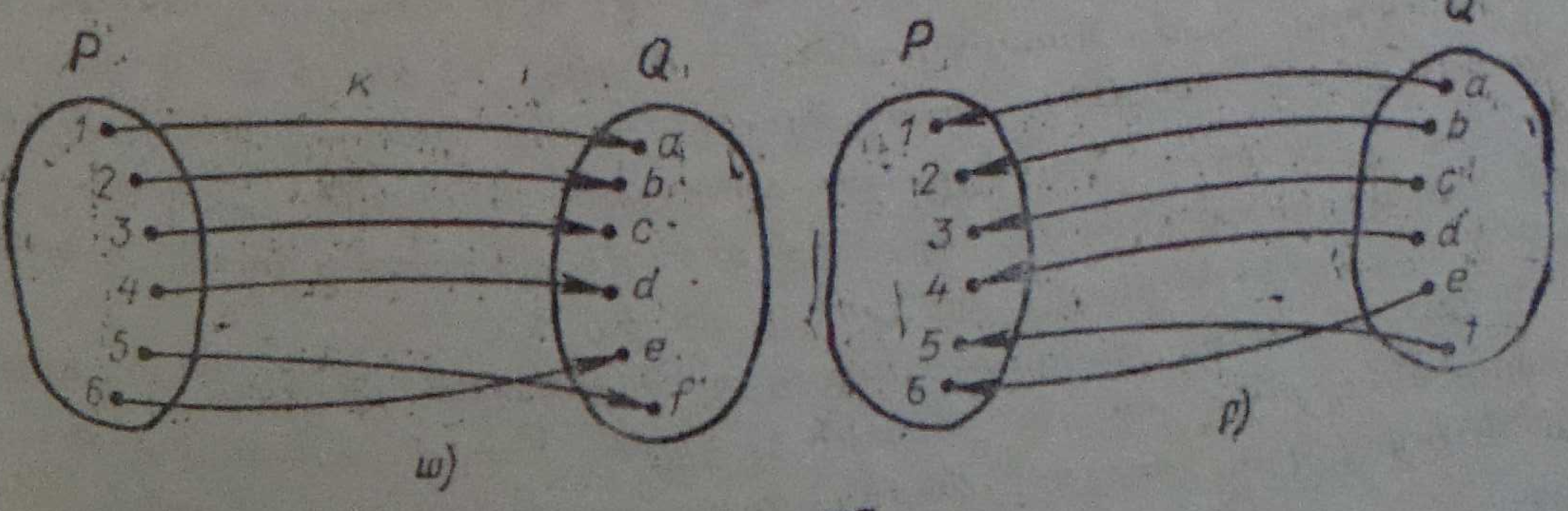
Նկ. 164



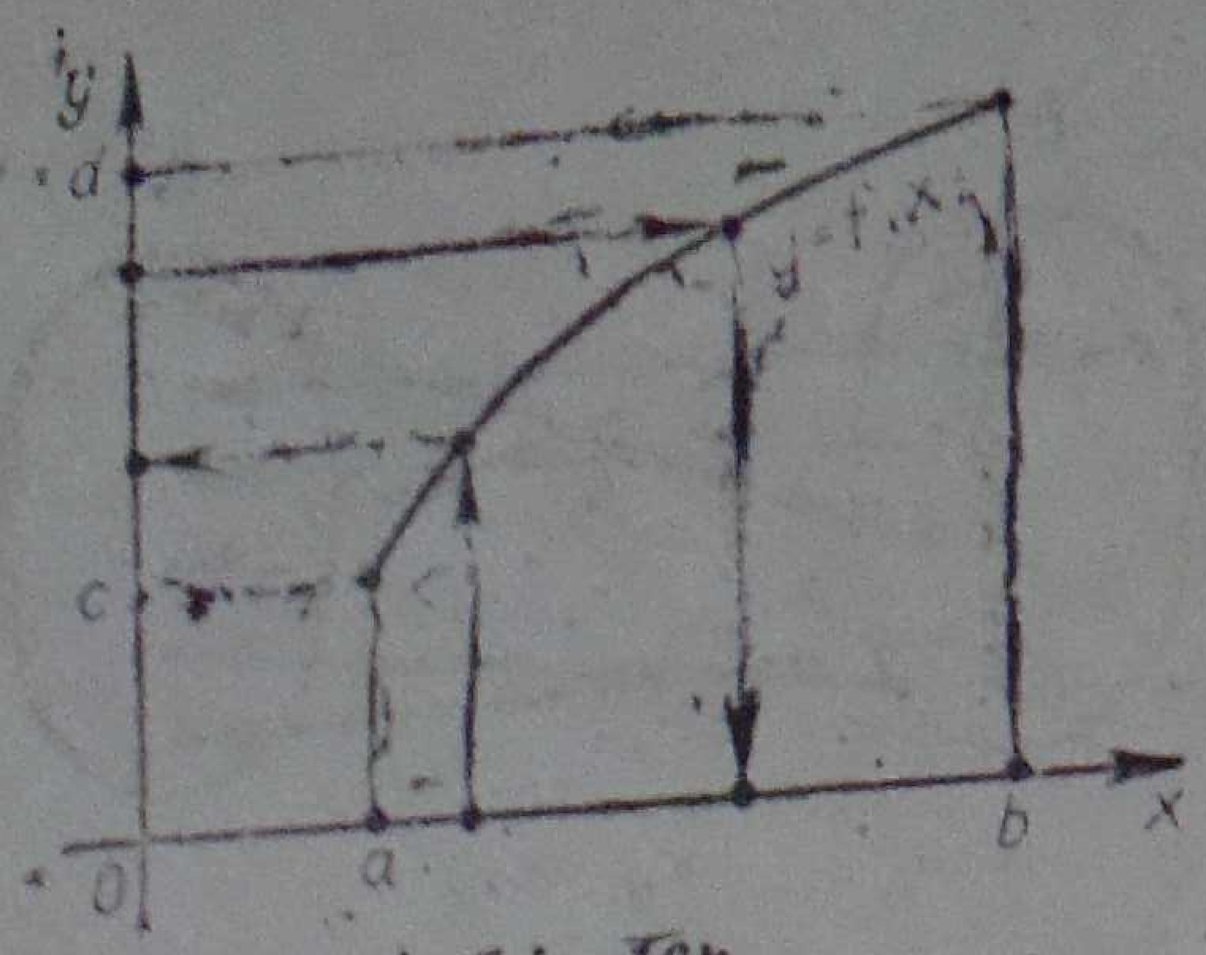
Նկ. 165



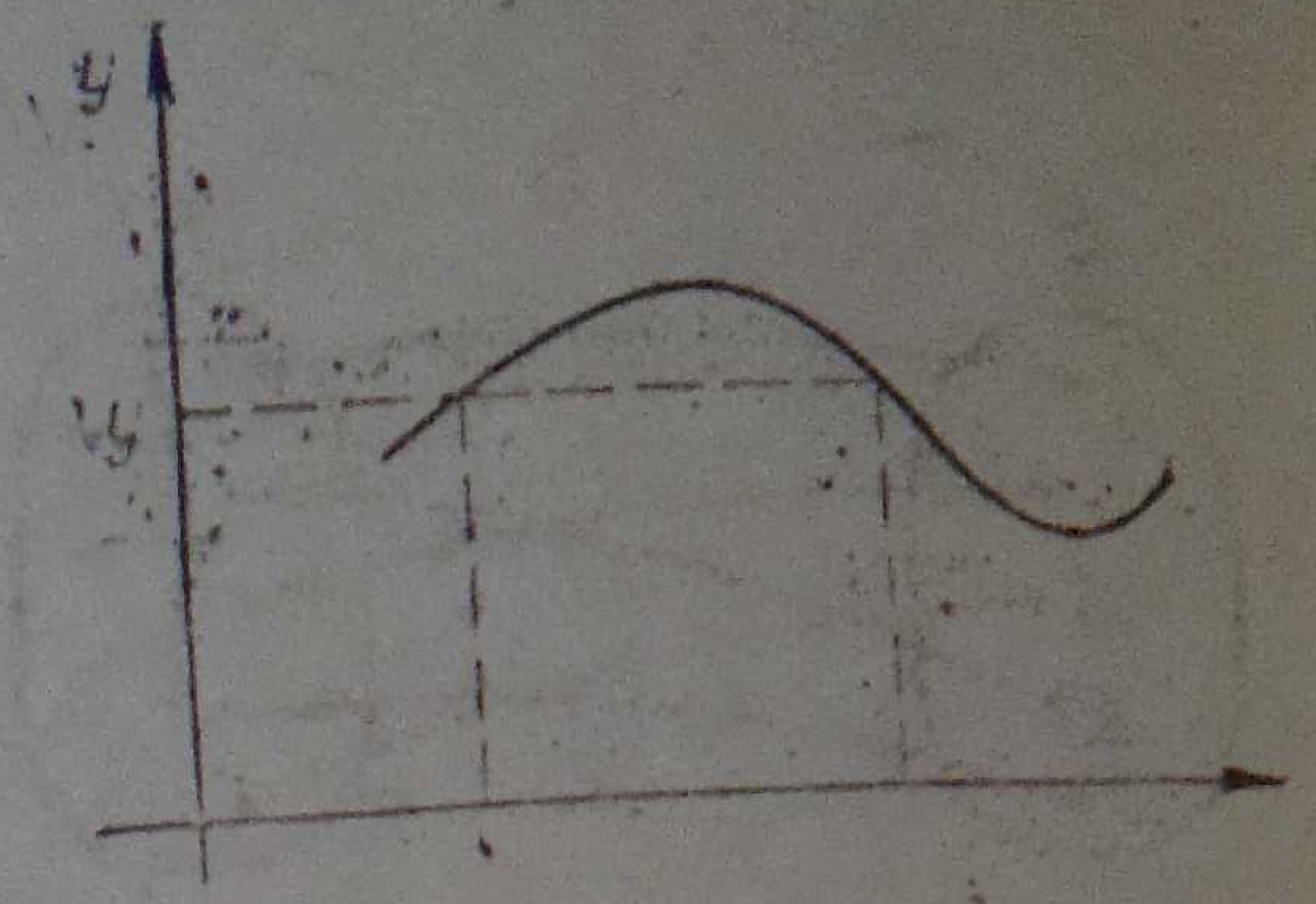
Նկ. 166



Նկ. 167



Նկ. 168



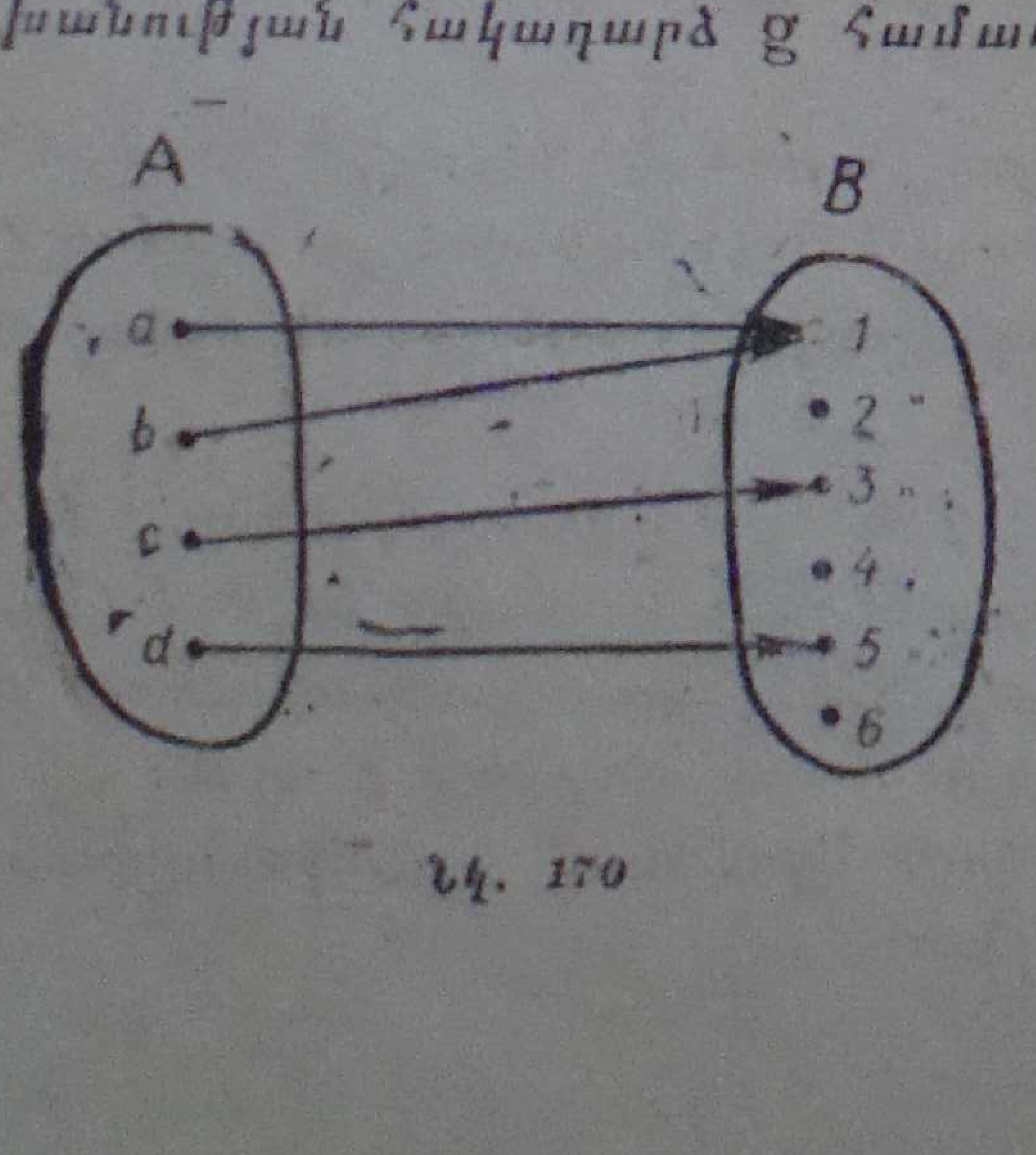
Նկ. 169

ինչ խոսք, ամեն համապատասխանություն չէ, որ ֆունկցիա է։ Բայց ամեն մի համապատասխանության համար կարելի է կառուցել նրան հակադարձ համապատասխանությունը։ Դրա համար բավական է փոխել բոլոր սլաքների ուղղությունը կամ էլ յուրաքանչյուր կարգավորյալ զույգի տարրերի տեղերը։ Հակադարձ համապատասխանությունը կարող է ֆունկցիա լինել, բայց, իհարկե, կարող է և ֆունկցիա չլինել։ 164—167-րդ նկարներում սլաքների միջոցով տրված են f, g, h և k համապատասխանությունները և դրանցից յուրաքանչյուրի հակադարձ համապատասխանությունը։

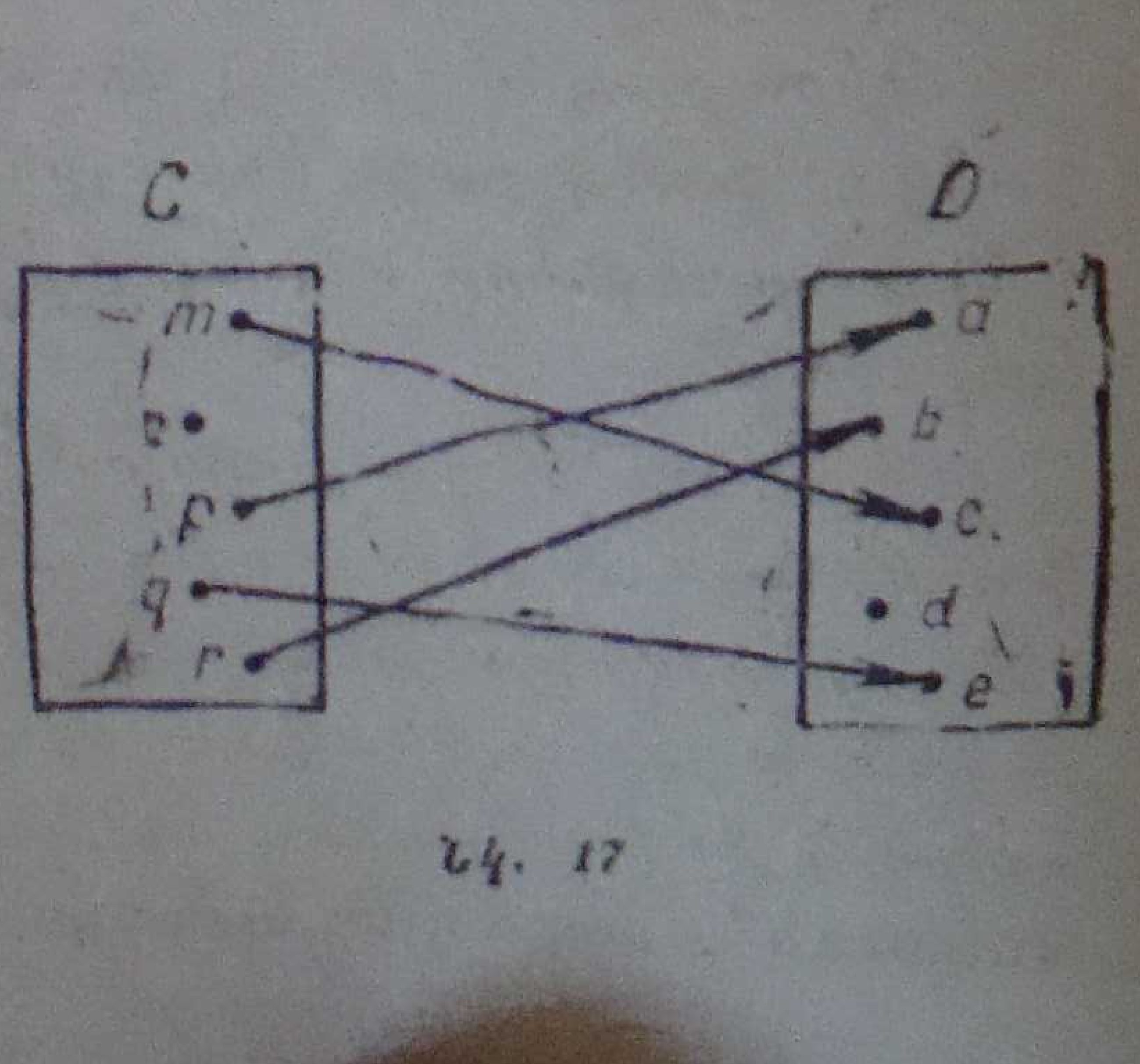
f համապատասխանությունը (նկ. 164, ա) և իր հակադարձ համապատասխանությունը (նկ. 164, բ) ֆունկցիաներ չեն։ g համապատասխանությունը (նկ. 165, ա) ֆունկցիա չէ, բայց իր հակադարձ համապատասխանությունը (նկ. 165, բ) ֆունկցիա է։ h համապատասխանությունը (նկ. 166, ա) ֆունկցիա է, բայց հակադարձ համապատասխանությունը (նկ. 166, բ) ֆունկցիա չէ։ k համապատասխանությունը (նկ. 167, ա) և հակադարձ համապատասխանությունը (նկ. 167, բ) ֆունկցիաներ են։

Սահմանում։ Ֆունկցիան կոչվում է հակադարձելի, եթե իր հակադարձ համապատասխանությունը ֆունկցիա է։

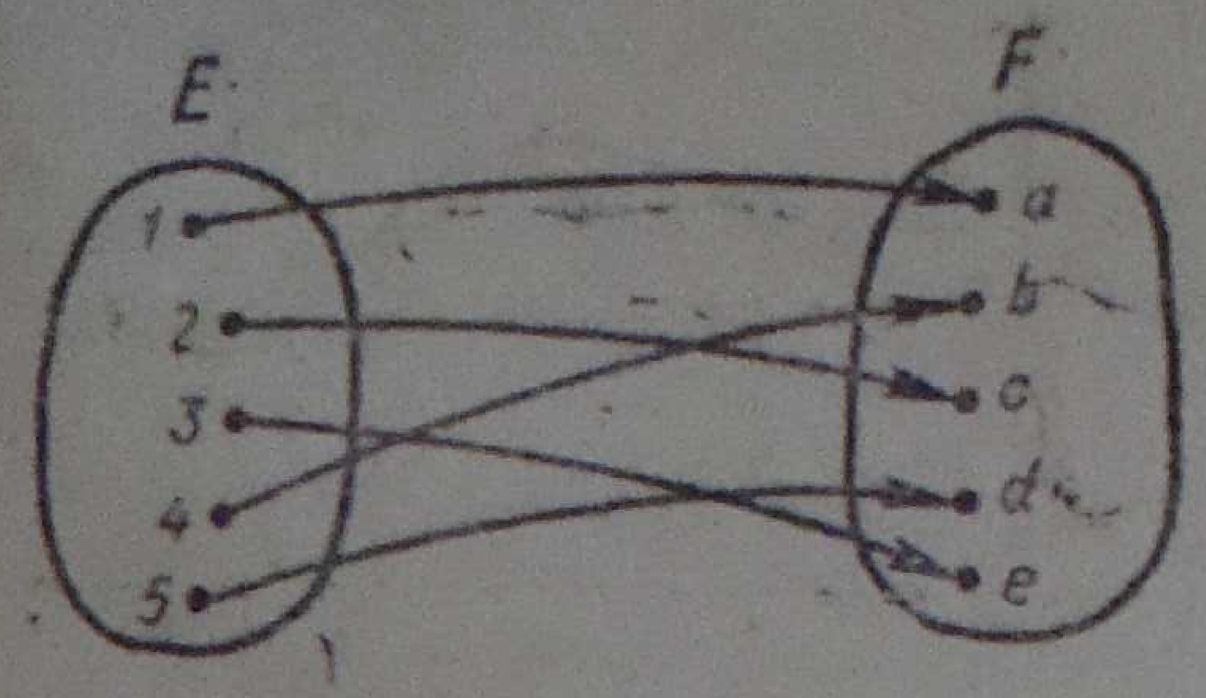
Դիցուք կառուցված է երկու բազմությունների միջև f համապատասխանության հակադարձ g համապատասխանությունը։ Եթե f համապա-



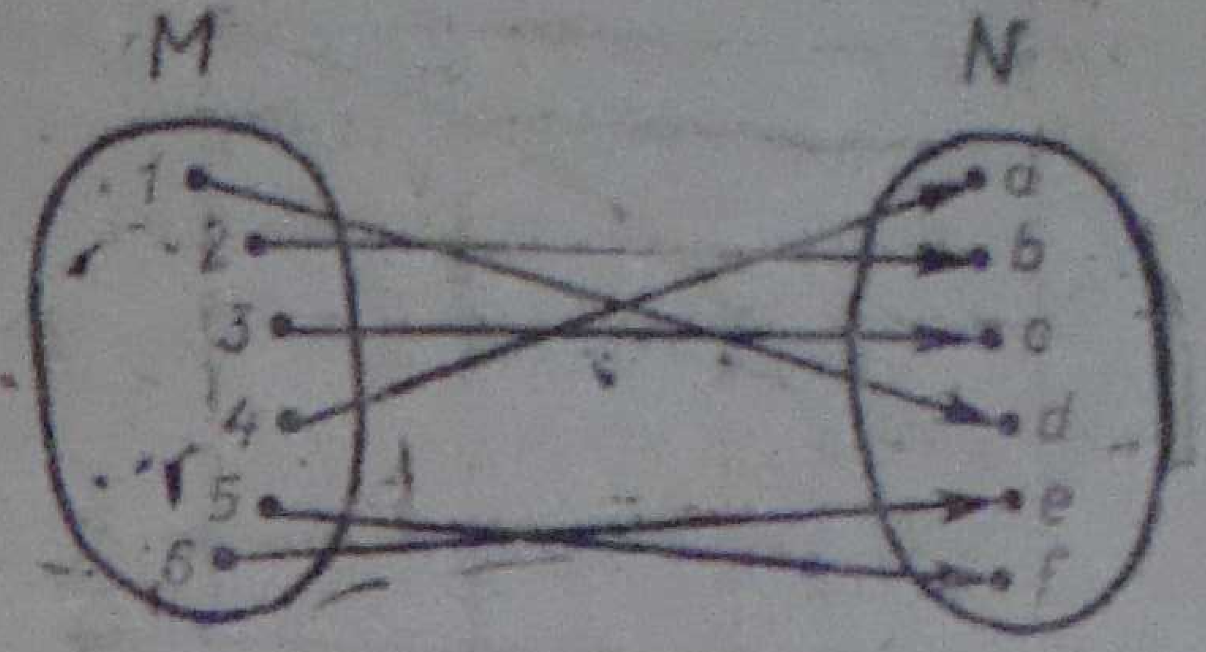
Նկ. 170



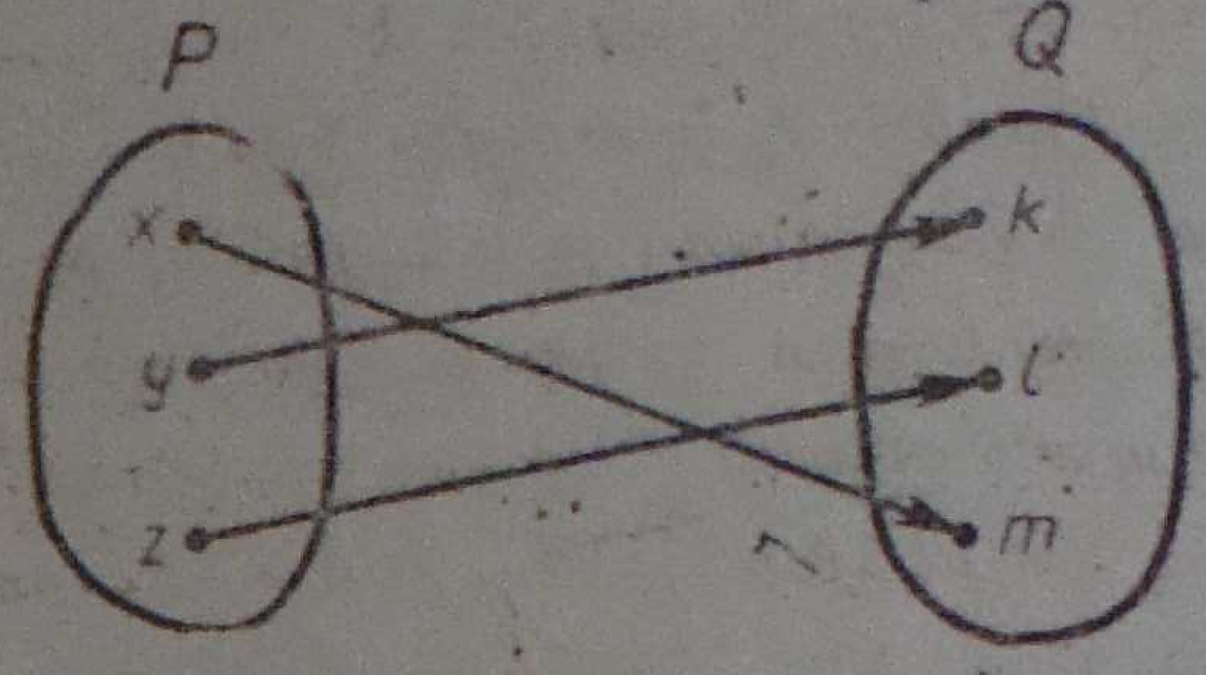
Նկ. 17



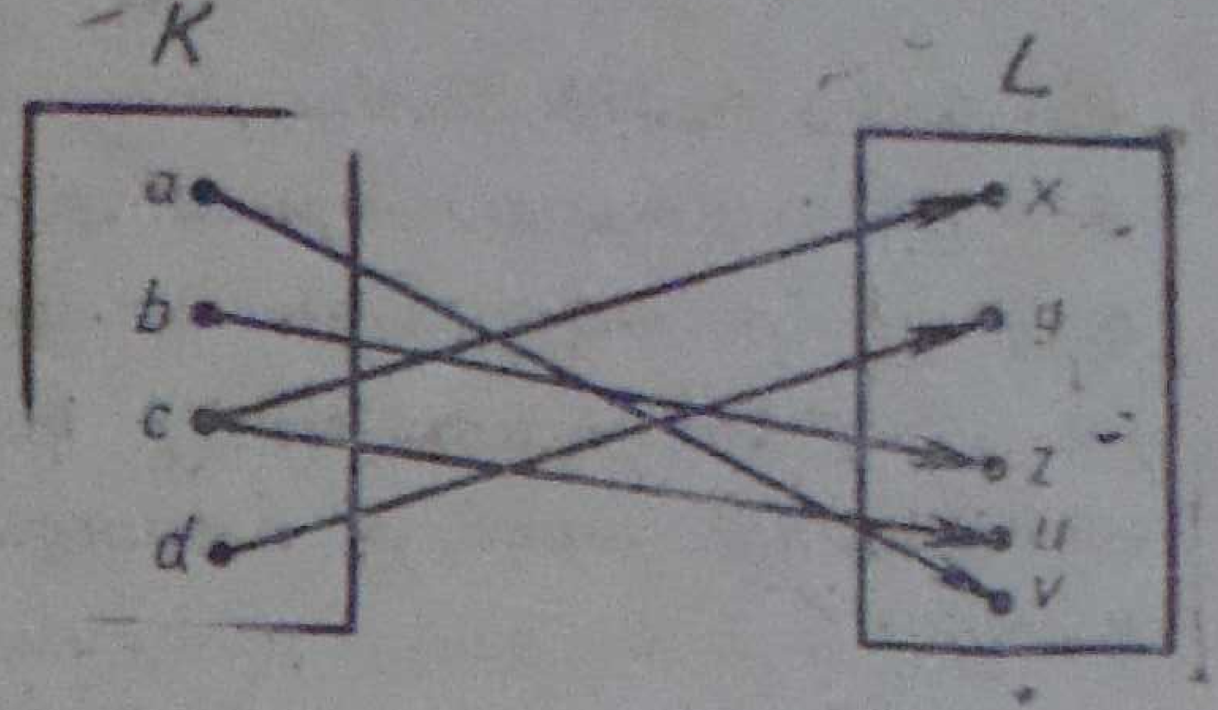
Նկ. 172



Նկ. 173



Նկ. 174



Նկ. 175

տասխանությունը հակադարձելի ֆունկցիա է, ապա g հակադարձ համապատասխանությունը կոչվում է f ֆունկցիային հակադարձ ֆունկցիա:

k համապատասխանությունը (նկ. 167, ա) հակադարձելի ֆունկցիա է։ Հակադարձ համապատասխանությունը (նկ. 167, բ) նրան հակադարձ ֆունկցիա է։ h ֆունկցիան (նկ. 166, ա) հակադարձ ֆունկցիա չունի։

Հակադարձելի ֆունկցիայի որոշման տիրույթը դառնում է իրեն հակադարձ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթ, իսկ հակադարձելի ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը՝ իրեն հակադարձ ֆունկցիայի որոշման տիրույթ։

Հակադարձելի ֆունկցիան և նրան հակադարձ ֆունկցիան, կոչվում են փոխհակադարձ ֆունկցիաներ:

Դիցուք այժմ $[a; b]$ միջակայքի վրա (այսինքն՝ $a \leq x \leq b$) տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիան։ Ենթադրենք, թե այդ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է, և նրա արժեքների տիրույթը $[c; d]$ միջակայքն է, այնպես որ $c \leq y \leq d$ (նկ. 168)։

x արգումենտի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է f ֆունկցիայի միակ y արժեք։ Հակադարձ պնդումը նույնպես ճիշտ է (նկ. 168). y փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է x փոփոխականի միակ արժեք։ f ֆունկցիան հակադարձելի է. նրան հակադարձ ֆունկցիան նշանակենք g տառով։ Այսպիսով, եթե ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա ունի հակադարձ ֆունկցիա:

$y=f(x)$ ֆունկցիային հակադարձ $x=g(y)$ ֆունկցիայի համար y փոփոխականը արգումենտ է, իսկ x փոփոխականի արժեքները՝ g ֆունկցիայի արժեքներ։ Սովորական նշանակումները պահպանելու համար x-ը փոխարինենք y-ով, իսկ y-ը՝ x-ով։ Կստանանք $y=g(x)$։ f և g ֆունկցիաները, այսինքն՝ $y=f(x)$-ը և $y=g(x)$-ը փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են։

169-րդ նկարում պատկերված է ոչ մոնոտոն ֆունկցիայի գրաֆիկ։ Ox առանցքին զուգահեռ ուղիղը այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է երկու կետում։ Դա նշանակում է, որ ֆունկցիայի միևնույն արժեքին համապատասխանում է արգումենտի երկու արժեք։ Այդպիսի ֆունկցիան հակադարձելի չէ։

Սակայն, եթե հնարավոր է ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տրոհել այնպիսի միջակայքերի, որ դրանցից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան կամ միայն աճում է կամ միայն նվազում, ապա այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում կարելի է կառուցել տրված ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան։

Ոչ մոնոտոն ֆունկցիան նույնպես կարող է լինել հակադարձելի։ Օրինակ, $f=\{(1;2),(2;4),(3;1)\}$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ, բայց ունի հակադարձ ֆունկցիա, քանի որ իր յուրաքանչյուր արժեքն ընդունում է միայն մեկ անգամ։

Վարժություններ

971. 170—175-րդ նկարներում սլաքների միջոցով տրված են զանազան համապատասխանություններ երկու բազմությունների միջև։ Կառուցեք այդ համապատասխանություններից յուրաքանչյուրի հակադարձ համապատասխանությունը և նշեցեք.

ա) Տրված համապատասխանություններից որո՞նք են ֆունկցիաներ (ինչո՞ւ)։

բ) Տրված ֆունկցիաներից որո՞նք են հակադարձելի (ինչո՞ւ)։

§ 133. ՓՈԽՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԸ

Դիցուք տրված է որոշ ֆունկցիա, օրինակ

$$f(x)=2x-3, \text{ կամ } y=2x-3 \qquad (1)$$

գծային ֆունկցիան։ Որպեսզի ըստ x արգումենտի տրված արժեքի գտնենք f ֆունկցիայի համապատասխան արժեքը, պետք է արգումենտի արժեքը բազմապատկել 2-ով և ստացված արտադրյալից հանել 3։

Հարց է ծագում. հնարավո՞ր է արդյոք հակադարձ անցումը, այսինքն՝ հնարավո՞ր է արդյոք y-ի նախօրոք տրված արժեքի համար գտնել x-ի՝

դրան համապատասխան և ընդ որում միակ արժեք։ Հարցին պատասխանելու համար (1) բանաձևից x-ն արտահայտենք y-ով։ Կստանանք հետևյալ բանաձևը.

$$x=\frac{y+3}{2}, \qquad (2)$$

Այժմ, որպեսզի ըստ y փոփոխականի տրված արժեքի գտնենք x փոփոխականի համապատասխան արժեքը, պետք է y փոփոխականի տրված արժեքին ավելացնել 3 և ստացված գումարը բաժանել 2-ի։ Այսպիսով, y փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքի համար մենք կգտնենք x փոփոխականի՝ դրան համապատասխան միակ արժեք։ Ուստի (2) բանաձևով տրվում է ֆունկցիա։

Քանի որ մենք ըստ y-ի տրված արժեքի որոնում ենք x-ի արժեքը, ուրեմն x-ի և y-ի դերերը փոխվել են. y փոփոխականը հիմա արգումենտ է, իսկ x-ը փոփոխական է, որի արժեքները ֆունկցիայի արժեքներ են։

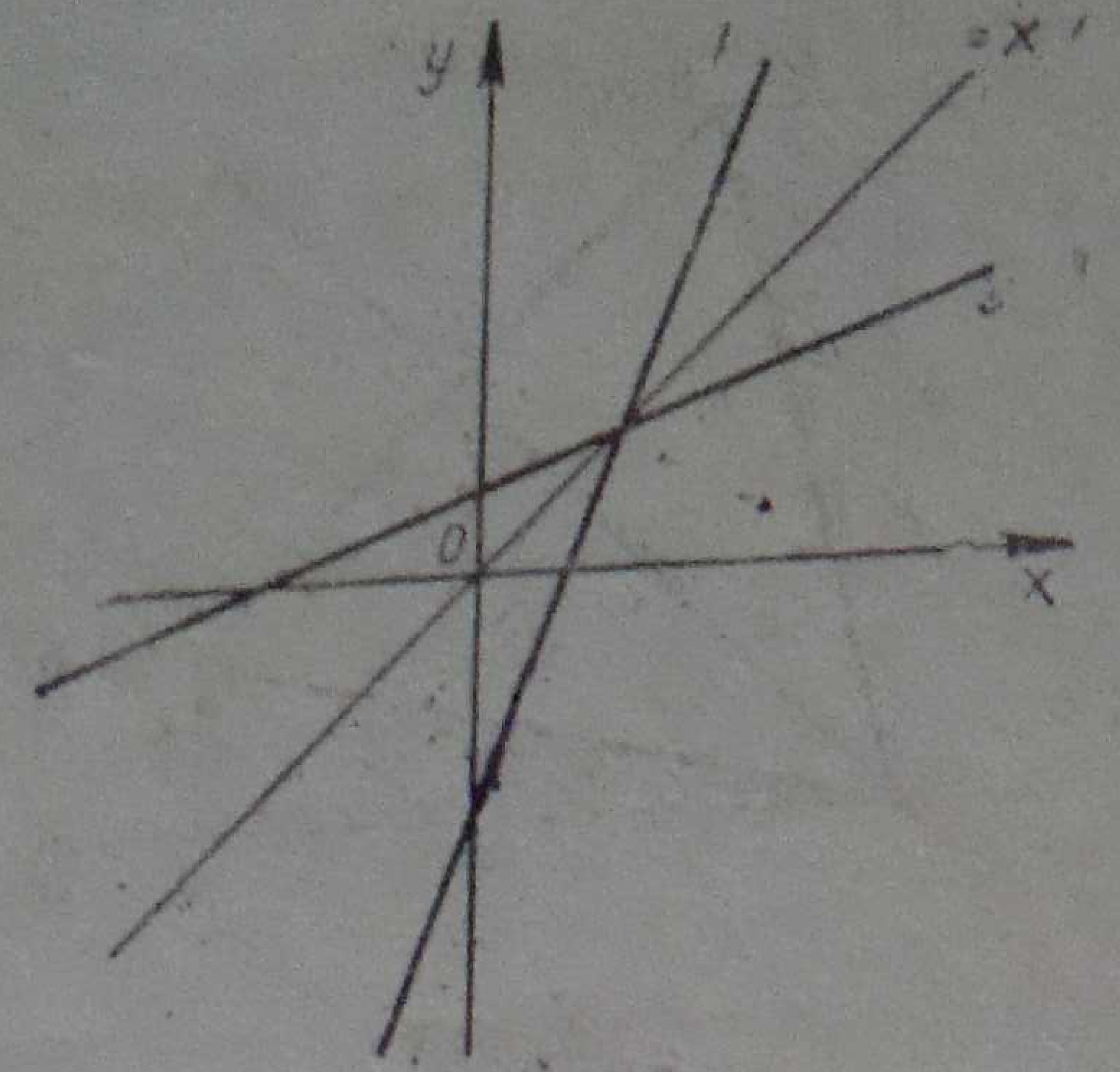
Նոր ֆունկցիան նշանակենք g տառով և (2) բանաձևը գրենք այսպես՝ $x=g(y)$։

Եթե x արգումենտի 5 արժեքին ըստ (1) բանաձևի համապատասխանում է ֆունկցիայի 7 արժեքը, այսինքն՝ $f(5)=7$, ապա և հակադարձը, արգումենտի 7 արժեքին ըստ (2) բանաձևի համապատասխանում է ֆունկցիայի 5 արժեքը, այսինքն՝ $g(7)=5$։ Ուրիշ խոսքով, եթե f ֆունկցիայի համար $5\longrightarrow 7$, ապա g ֆունկցիայի համար $7\longrightarrow 5$։ Այսպիսով, g ֆունկցիան f ֆունկցիայի հակադարձն է։

Եվ այսպես, մենք ստացանք մի նոր g ֆունկցիա, որը հակադարձ է տրված f ֆունկցիային։ f և g ֆունկցիաները, այսինքն՝ $y=f(x)$-ը և $x=g(y)$-ը փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են։

Այս երկու ֆունկցիաների համար գրաֆիկ է միևնույն ուղիղ գիծը, քանի որ x և y փոփոխականները միմյանց հետ կապված են միևնույն $2x-y-3=0$ կախվածությամբ (ստուգեցեք)։ Այդ ուղիղը կարելի է կառուցել ըստ երկու կետերի, օրինակ, ըստ $(0; -3)$ և $(\frac{3}{2}; 0)$ կետերի (նկ. 176, I ուղիղը)։

Համադրենք f և g, այսինքն՝ $y=f(x)$ և $x=g(y)$ փոխհակադարձ ֆունկցիաները։ Առաջինի նշանակումները սովորական են. արգումենտը նշանակված է x-ով, իսկ ֆունկցիայի արժեքները՝ y-ով։ Երկրորդի նշանակումները ընդհակառակն են. արգումենտը նշանակված է y-ով, իսկ ֆունկցիայի արժեքները՝ x-ով։ Ուստի, չնայած երկու ֆունկցիաներն էլ ունեն միևնույն գրաֆիկը (I ուղիղը, նկ. 176), այնուամենայնիվ, առաջինի արգումենտի արժեքները նշվում են, ինչպես սովորաբար, Ox առանցքի վրա, իսկ ֆունկցիայի արժեքները՝ Oy առանցքի վրա, իսկ երկրորդինը՝ ընդհակառակն. արգումենտի արժեքները նշվում են Oy առանցքի



Նկ. 176

վրա, իսկ ֆունկցիայի արժեքները՝ $0x$ առանցքի վրա։

Սակայն ավելի հարմար է արգումենտը միշտ նշանակել x-ով և արժեքներն էլ նշել $0x$ առանցքի վրա, իսկ ֆունկցիայի արժեքները նշանակել y-ով և արժեքներն էլ նշել $0y$ առանցքի վրա։ Եթե (2) բանաձևում փոխենք փոփոխականների նշանակումները՝ x-ը y-ով, իսկ y-ը՝ x-ով, ապա կստանանք հետևյալ բանաձևը.

$$y=\frac{x+3}{2}, \tag{3}$$

(3) բանաձևը կարելի է գրել $y=g(x)$ տեսքով, քանի որ (2) և (3) բանաձևերով տրվում է միևնույն ֆունկցիան։

Այսպիսով, փոխհակադարձ կլինեն (1) և (3) ֆունկցիաները, որոնք տրված են $y=2x-3$ և $y=\frac{x+3}{2}$ բանաձևերով, այսինքն՝ $y=f(x)$ և $y=g(x)$ ֆունկցիաները։

$y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցված է. այն 176-րդ նկարի I ուղիղն է։ Նույն նկարի վրա կառուցենք $y=g(x)$, այսինքն՝ $y=\frac{x+3}{2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Դրա համար կառուցենք երկու կետ, օրինակ $(0; \frac{3}{2})$ և $(-3; 0)$ կետերը և դրանցով տանենք ուղիղ։ Դա II ուղիղն է։

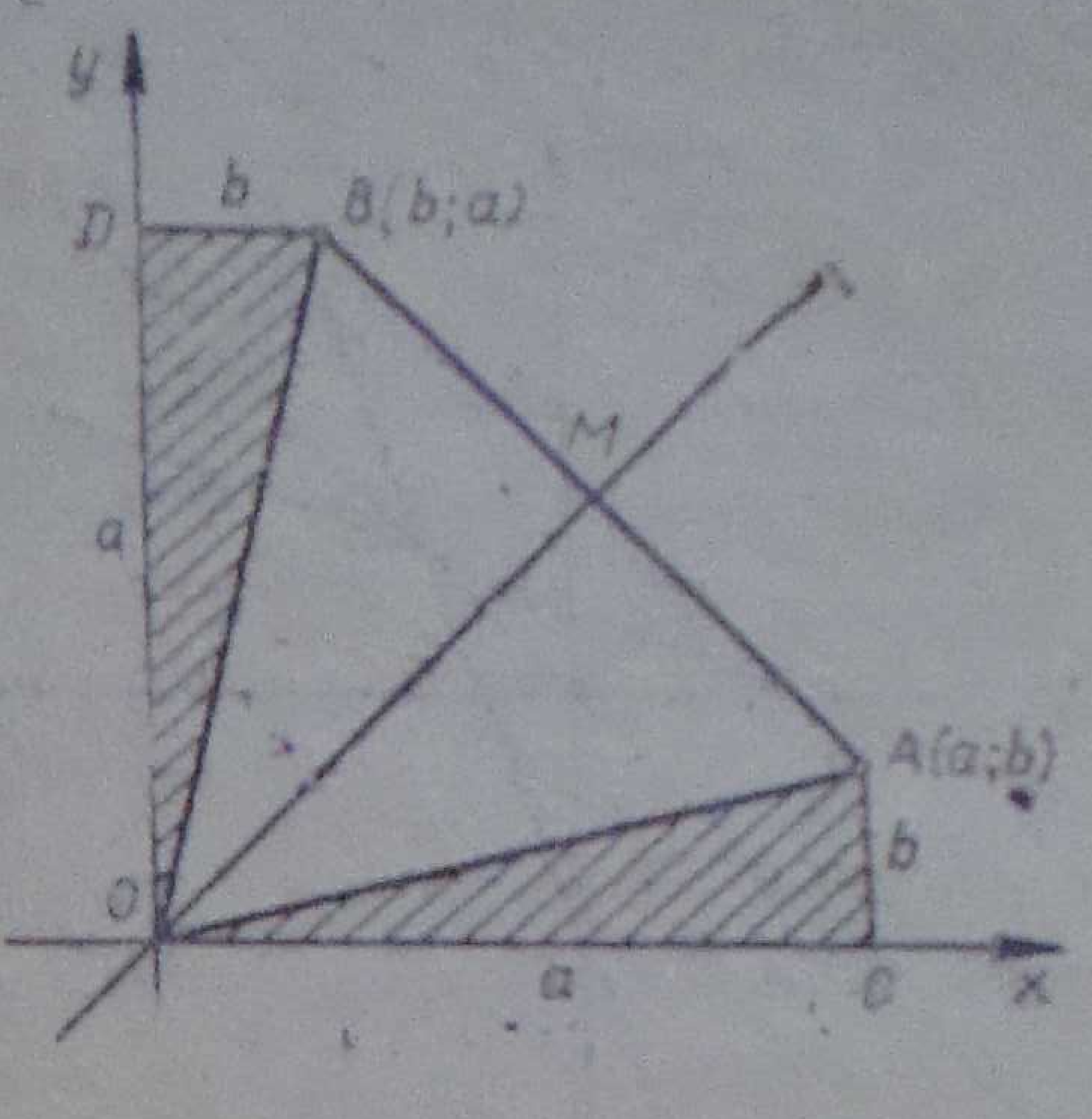
(1) և (3) փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները տարբեր են, քանի որ այդ ֆունկցիաները տարբեր են. արգումենտի արժեքները նըշվում են միևնույն $0x$ առանցքի վրա, իսկ ֆունկցիայի արժեքները՝ միևնույն $0y$ առանցքի վրա։

I ուղղին պատկանում է $(0; -3)$ կետը, իսկ II ուղղին՝ $(-3; 0)$ կետը։ Հանգունորեն, քանի որ I ուղղին պատկանում է $(\frac{3}{2}; 0)$ կետը, ուստի II ուղղին պատկանում է $(0; \frac{3}{2})$ կետը։ Ընդհանրապես, եթե I ուղղին պատկանում է $(a; b)$ կետը, ապա II ուղղին պատկանում է $(b; a)$ կետը։

Մենք կապացուցենք, որ այդպիսի երկու կետերը սիմետրիկ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ։ Այստեղից կհետևի, որ I և II ուղիղները ևս սիմետրիկ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ։ Եթե 176-րդ նկարը ծալենք առաջին և երրորդ կոորդինատային անկյունների կիսորդով, ապա I և II ուղիղները կըհամընկնեն։

Թեորեմ. $A(a; b)$ և $B(b; a)$ կետերը սիմետրիկ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ (նկ. 177)։

Ապացուցում. Կոորդինատների Oxy համակարգում տրված են $A(a; b)$ և $B(b; a)$ երկու կետերը։ Պարզության համար ենթադրենք $a>0$, $b>0$։ Տանենք OA, OB, AB, AC, BD հատվածները, ընդ որում $[AC]\perp Ox$, $[BD]\perp Oy$։ OAC և OBD ուղղանկյուն եռանկյունները համընկնելի են (ըստ երկու էջերի), ուստի $|OA|=|OB|$։



Նկ. 177

Տանենք OAB եռանկյան $[OM]$ կիսորդը։ Քանի որ այդ եռանկյունը հավասարասրուն է, ուստի $|BM|=|AM|$ և $[AB]\perp[OM]$, այսինքն՝ A և B կետերը սիմետրիկ են OM ուղղի նկատմամբ։ Մնում է ապացուցել, որ OAB եռանկյան $[OM]$ կիսորդը միաժամանակ նաև կոորդինատային անկյան կիսորդն է։ Իրոք, $\widehat{MOA}=\widehat{MOB}$ և $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$։ Ուստի $\widehat{MOC}=\widehat{MOD}$, այսինքն՝ $[OM]$-ը նաև ուղիղ անկյան կիսորդն է։ Այսպիսով, A և B կետերը սիմետրիկ են կոորդինատային անկյան կիսորդի նկատմամբ։ Թեորեմն ապացուցված է։

Ձևակերպենք երկու եզրակացություն։

1) Երբ $y=f(x)$ բանաձևով տրված ֆունկցիան հակադարձելի է, ապա նրա հակադարձ ֆունկցիայի բանաձևը գտնելու համար պետք է այդ բանաձևից x-ը արտահայտել y-ով և այնուհետև փոխել փոփոխականների նշանակումները՝ x-ը y-ով, իսկ y-ը՝ x-ով։

2) Երկու փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները սիմետրիկ են առաջին և երրորդ կոորդինատային անկյունների կիսորդի նկատմամբ։

Վարժություններ

Կազմեցեք տրվածին հակադարձ ֆունկցիայի բանաձևը և կառուցեք այդ երկու ֆունկցիաների գրաֆիկները.

972. ա) $y=3x-2$, գ) $y=x^2$, $x\geq 0$,
բ) $y=4-x$, դ) $y=x^{-2}$, $x<0$։

973. ա) $y=5+2x$, գ) $y=x^2$, $x\leq 0$,
բ) $y=3-x$, դ) $y=x^{-2}$, $x>0$։

§ 134. ԹՎԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Տրված է $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) ցուցչային ֆունկցիան։ Այդ ֆունկցիան մոնոտոն է, ուստի ոչ միայն x արգումենտի յուրաքանչյուր արժեքին է համապատասխանում ֆունկցիայի միակ արժեք, այլև ընդհակառակը, ֆունկցիայի յուրաքանչյուր նախօրոք տրված արժեքին է համապատասխանում x արգումենտի միակ արժեք։

Դիտարկենք $a^x=b$ հավասարումը։ Ամենից առաջ պարզ է, որ $b\leq 0$ դեպքում հավասարումը արմատ չունի, որովհետև ցուցչային ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական արժեքներ։ Իսկ եթե $b>0$, ապա հավասարումն ունի միմիայն մեկ արմատ, որը գրաֆիկորեն կարելի է ստանալ հետևյալ ճանապարհով։ Գծենք $y=a^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, տանենք $y=b$, $b>0$ ուղիղը՝ մինչև գրաֆիկի հետ հատվելը։ Հատման կետի աբսցիսն էլ հենց կլինի հավասարման արմատը։ Արմատը նշանակենք α տառով (կարդացվում է ալֆա) (Նկ. 178)։

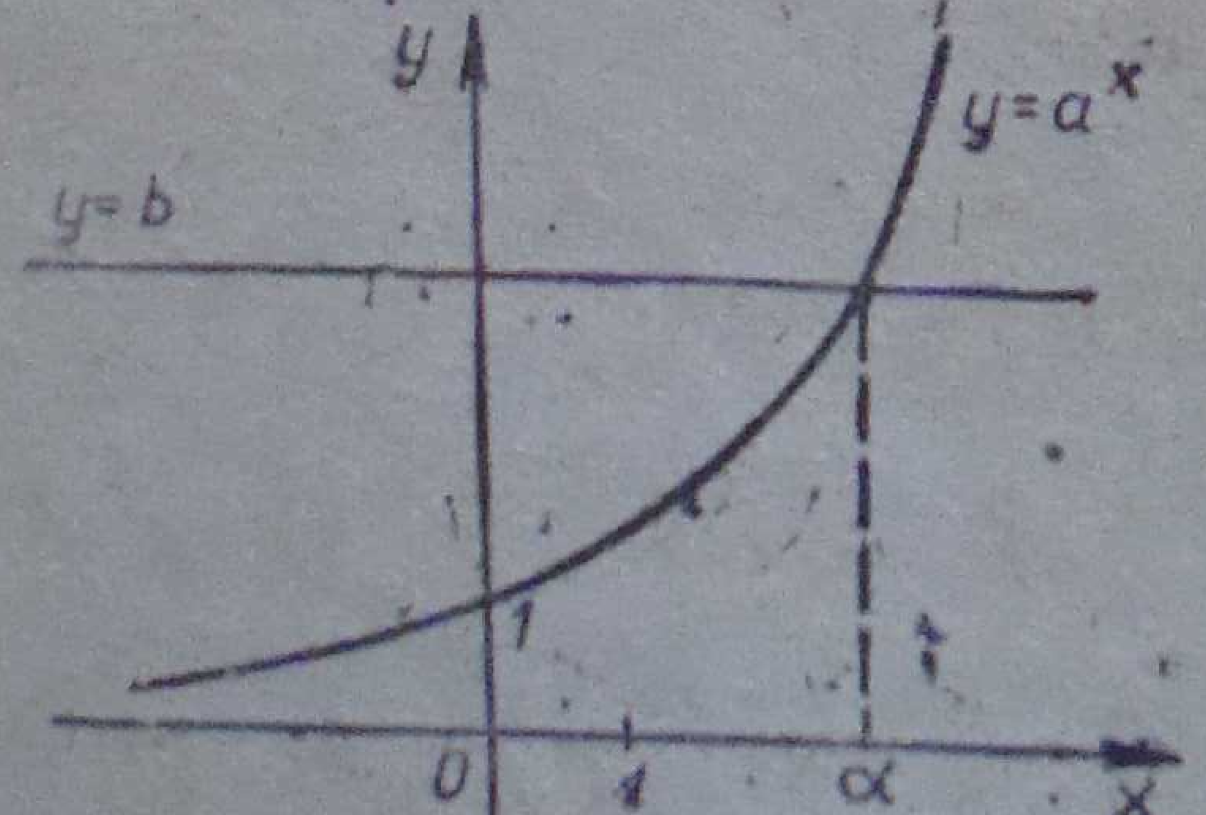
Եթե α-ն $a^x=b$ հավասարման արմատն է, ապա a-ի և b-ի ($a\neq 1$, $a>0$, $b>0$) տրված արժեքների դեպքում հանգում ենք $a^\alpha=b$ ճիշտ հավասարությանը։

$a^x=b$ հավասարման արմատը կոչվում է b թվի լոգարիթմ ըստ a հիմքի։

Սահմանում։ α թիվը կոչվում է b դրական թվի լոգարիթմ ըստ դրական և 1-ից տարբեր a հիմքի, եթե a թիվն α աստիճան բարձրացնելիս ստացվում է b թիվը։

Նշանակումն է՝ $\alpha=\log_a b$։ Կարդացվում է այսպես՝ α-ն b թվի լոգարիթմն է ըստ a հիմքի, կամ α-ն b թվի a հիմքով լոգարիթմն է։

log նշանը «logarithmus» բառի հակիրճ գրառումն է։ b թվի $a=10$ հիմքով լոգարիթմի համար կիրառվում է lgb հակիրճ գրառումը, այսինքն՝ բաց է թողնվում log նշանի o տառը և 10 հիմքը։



Նկ. 178

Դիցուք $a\neq 1$, $a>0$, $b>0$։

$$a^\alpha=b \quad (1)$$

հավասարությունից ըստ սահմանման հետևում է, որ

$$\alpha=\log_a b \quad (2)$$

(1) հավասարության մեջ α-ի փոխարեն տեղադրենք նրա արժեքը (2) հավասարությունից, կստանանք՝

$$a^{\log_a b}=b \ (a>0,\ a\neq 1,\ b>0)։ \quad (3)$$

Այս հավասարությունը կոչվում է հիմնական լոգարիթմական նույնություն:

Օգտվելով այդ նույնությունից գտնում ենք, որ օրինակ՝

$$2^{\log_2 3}=3, \quad 10^{\lg 7}=7:$$

Ցանկացած a հիմքի դեպքում 1-ի լոգարիթմը հավասար է զրոյի. $\log_a 1=0$, *քանի որ* $a^0=1$ *a-ի ցանկացած* $(a\neq 0)$ *արժեքի դեպքում:*

Հիմքի լոգարիթմը հավասար է 1-ի. $\log_a a=1$, *քանի որ* $a^1=a$ *a-ի ցանկացած արժեքի դեպքում:*

Օրինակ 1: *Գտնել* $\log_4 8$*-ը:*

Եթե $\log_4 8=\alpha$, *ապա* $4^\alpha=8$, $2^{2\alpha}=2^3$, $\alpha=\frac{3}{2}$:

Օրինակ 2: *Գտնել* $\log_8 \frac{1}{4}$*-ը:*

Եթե $\log_8 \frac{1}{4}=\alpha$, *ապա* $8^\alpha=\frac{1}{4}$, $2^{3\alpha}=2^{-2}$, $\alpha=-\frac{2}{3}$:

Օրինակ 3: *Լուծել* $\log_{27} x=\frac{2}{3}$ *հավասարումը:*

$$x=27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9:$$

Օրինակ 4: *Լուծել* $\log_x 125=\frac{3}{2}$ *հավասարումը:*

$$x^{\frac{3}{2}}=125, \; x^{\frac{3}{2}}=5^3, \; x^{\frac{1}{2}}=5, \; x=25:$$

Վարժություններ

Ըստ տրված թվի և հիմքի գտեք թվի լոգարիթմը.

974. ա) $\log_3 27$, բ) $\log_4 16$, գ) $\log_6 36$, դ) $\lg 0,1$:

975. ա) $\log_2 8$, բ) $\log_5 125$, գ) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$, դ) $\lg 1000$:

976. ա) $\log_3 81$, բ) $\log_2 64$, գ) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$, դ) $\lg 0,001$:

Ըստ տրված հիմքի և լոգարիթմի գտեք $x \mid x>0$ փոփոխականի արժեքը.

977. ա) $\log_3 x=4$, գ) $\lg x=-\frac{2}{3}$,

բ) $\log_2 x=-5$, դ) $\log_5 x=\frac{3}{4}$;

978. ա) $\log_3 x=2$, գ) $\lg x=\frac{2}{3}$,

բ) $\log_5 x=-3$, դ) $\log_3 x=-\frac{3}{4}$:

Ըստ տրված թվի և լոգարիթմի գտեք x $(x>0)$ հիմքը.

979. ա) $\log_x 25=2$, գ) $\log_x(5\sqrt{5})=\frac{3}{2}$,

բ) $\log_x 64=-2$ դ) $\log_x 5\sqrt[3]{5}=-\frac{4}{3}$;

980. ա) $\log_x 64=6$, գ) $\log_x(7\sqrt{7})=-\frac{3}{2}$,

բ) $\log_x 36=-2$, դ) $\log_x 7\sqrt[3]{7}=\frac{8}{3}$:

Լուծեցեք հավասարումը.

981. ա) $\log_5 x=\frac{2}{3}$, գ) $\log_2 x=0,6$,

բ) $\log_x\left(\frac{1}{25}\right)=0,5$, դ) $\log_x\left(\frac{1}{9}\right)=-0,5$;

982. ա) $\log_{0,5} x=4$, գ) $\log_x 25=0,5$,

բ) $\log_x 9=-0,5$, դ) $\log_3 x=-3$;

§ 135. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ, ՆՐԱ ԳՐԱՖԻԿԸ ԵՎ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ավելի վաղ մենք տեսանք, որ $y=a^x$ ցուցչային ֆունկցիան մոնոտոն է (տես § 129, 130)։ Ուստի այն ունի հակադարձ ֆունկցիա։ Որպեսզի

գտնենք այդ հակադարձ ֆունկցիայի բանաձևը, $y=a^x$ բանաձևից x-ն արտահայտենք y-ով.

$$x=\log_a y։$$

Այս բանաձևում x-ը փոխարինենք y-ով, իսկ y-ը՝ x-ով.

$$y=\log_a x։$$

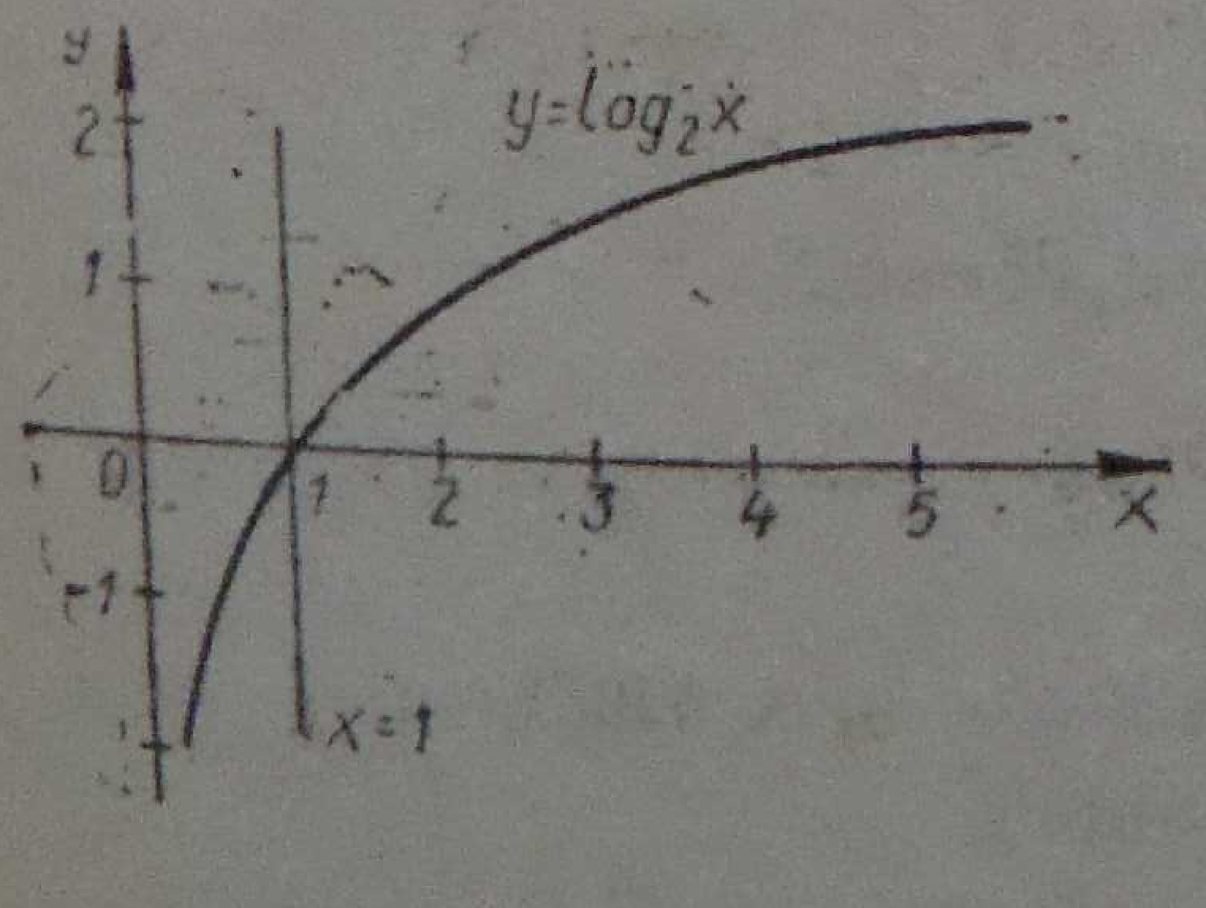
Սա էլ հենց այն բանաձևն է, որով տրվում է $y=a^x$ ցուցչային ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան։

Սահմանում: Լոգարիթմական ֆունկցիա կոչվում է ցուցչային հակադարձ ֆունկցիան:

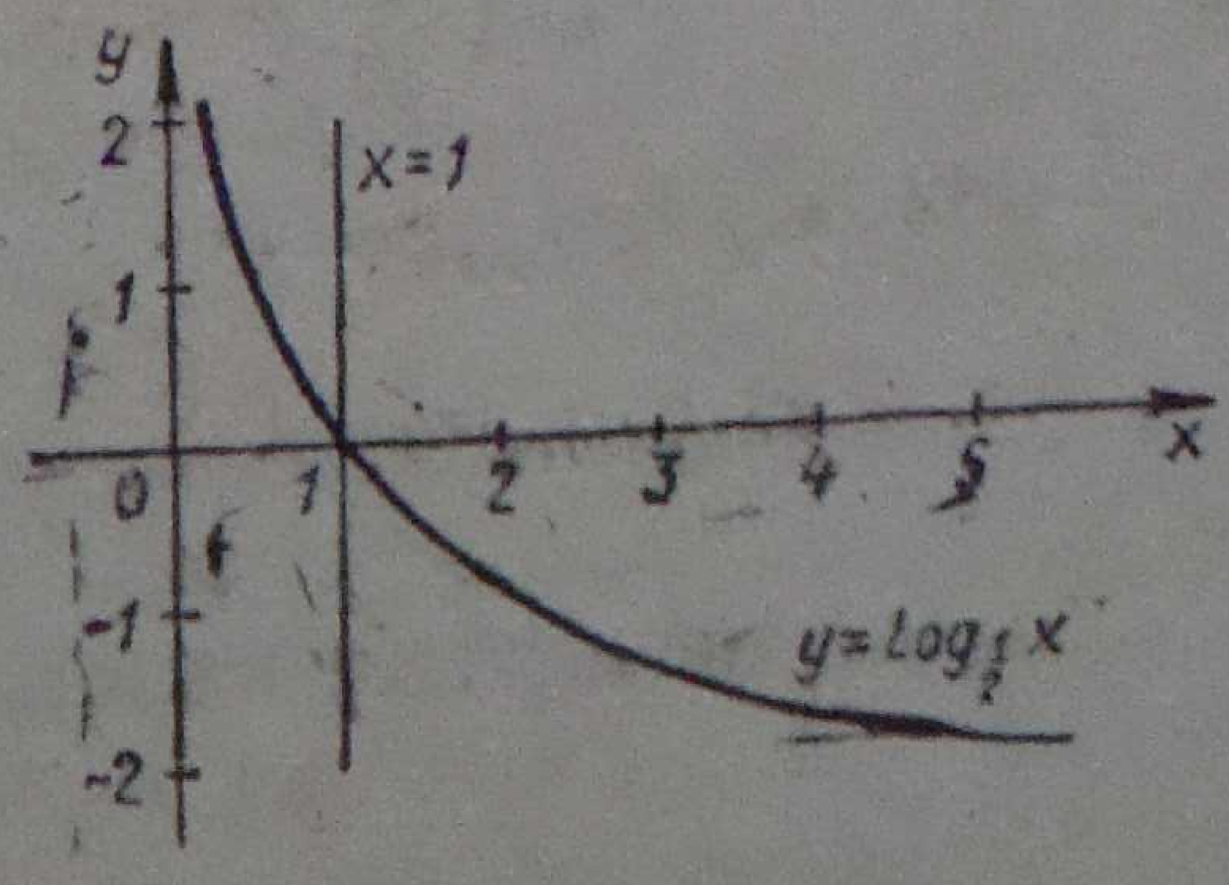
Միևնույն հիմքերով ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են։

Փոխհակադարձ ֆունկցիաներից մեկի որոշման տիրույթը մյուսի համար արժեքների տիրույթ է, և ընդհակառակը։ Քանի որ ցուցչային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը իրական թվերի բազմությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ բոլոր դրական թվերի բազմությունը, ապա լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կլինի բոլոր դրական թվերի բազմությունը, իսկ արժեքների տիրույթը՝ իրական թվերի բազմությունը։

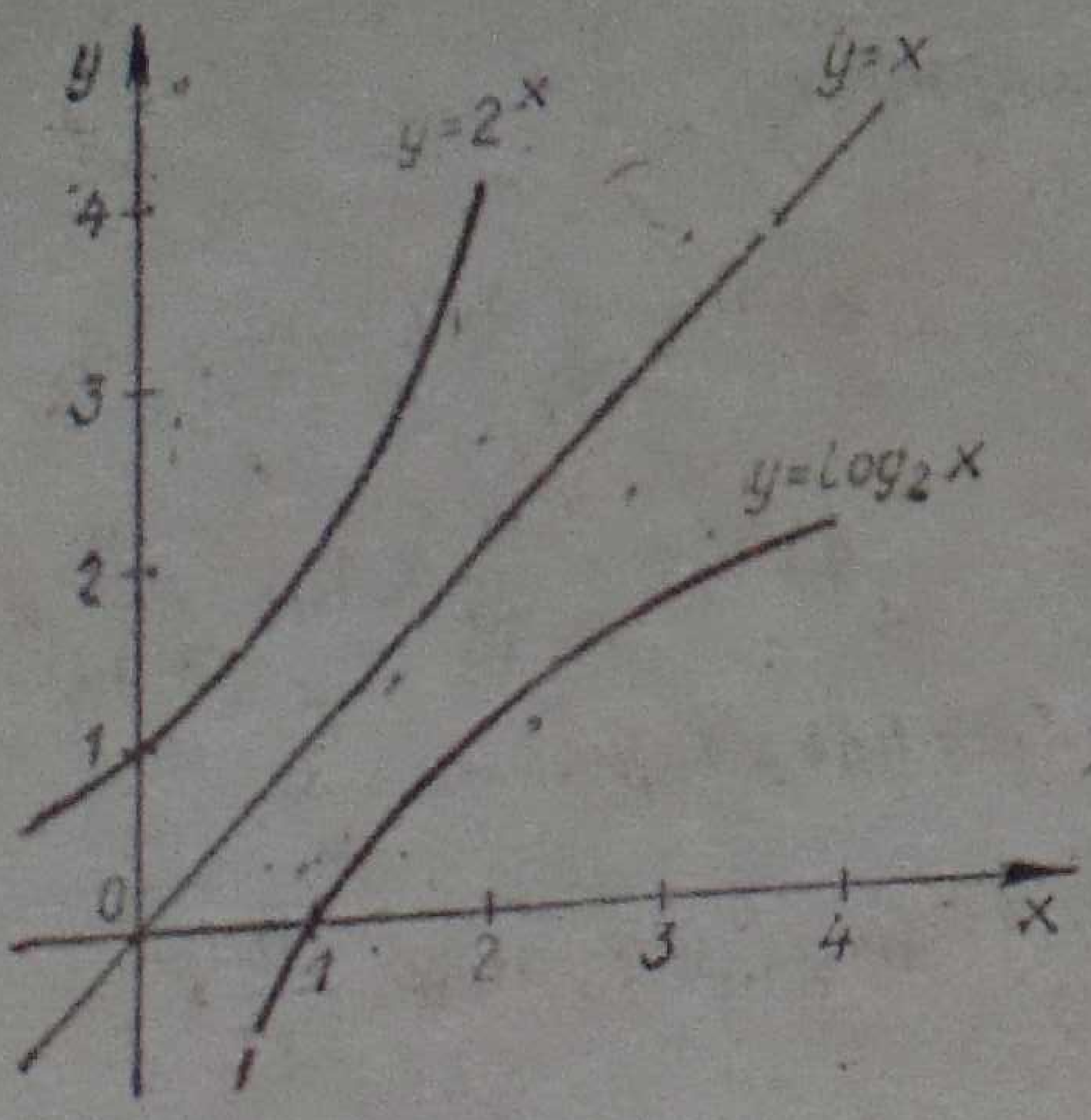
Եթե ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա նրա հակադարձ ֆունկցիան ևս մոնոտոն է։ Քանի որ $y=a^x$ ցուցչային ֆունկցիան $a>1$ դեպքում մոնոտոն աճող է, ապա և $y=\log_a^x$ լոգարիթմական ֆունկցիան $a>1$ դեպքում մոնոտոն աճող է։ Քանի որ $y=a^x$ ֆունկցիան $0<a<1$ դեպքում մոնոտոն նվազող է, ապա և $y=\log_a^x$ ֆունկցիան $0<a<1$ դեպքում մոնոտոն նվազող է։



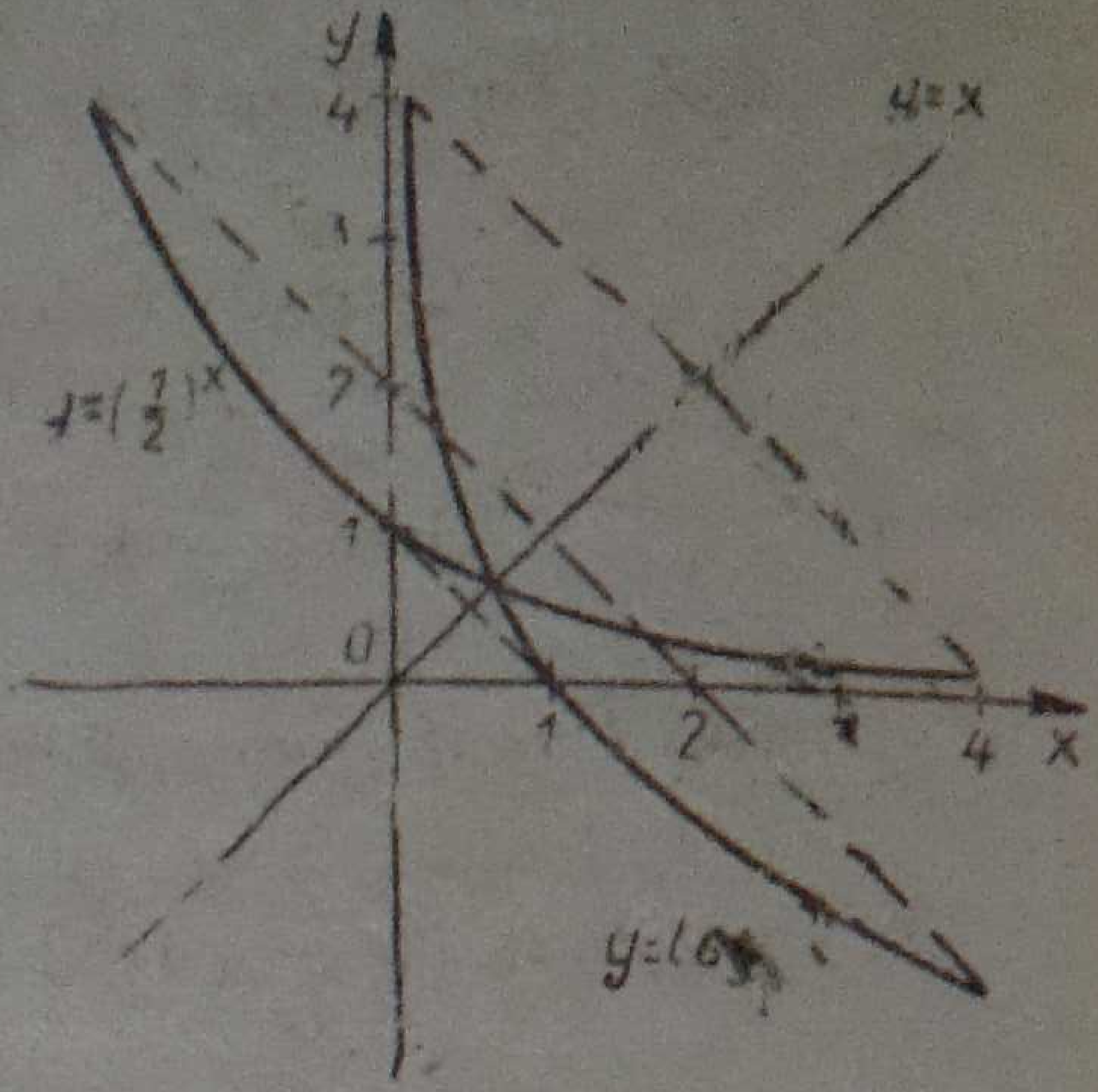
Նկ. 179



Նկ. 180



Նկ. 181



Նկ. 182

Փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները սիմետրիկ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ (տես § 133)։ 158-րդ նկարում տրված է $y=2^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Նկարը ծալելով առաջին և երրորդ կոորդինատային անկյունների կիսորդով, կստանանք $y=2^x$ ֆունկցիային հակադարձ $y=\log_2 x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 179)։ Հանգունորեն, կարելի է $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 180) ստանալ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից (նկ. 160)։

181-րդ նկարում տրված են $y=2^x$ և $y=\log_2 x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները, իսկ 182-րդ նկարում՝ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ և $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։ Այդ երկու նկարներից յուրաքանչյուրում գրաֆիկները սիմետրիկ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ։

Օգտվելով 179-րդ նկարից, կարելի է ցույց տալ, որ 1-ից մեծ հիմք ունեցող $y=\log_a x$ լոգարիթմական ֆունկցիան ունի հետևյալ հատկությունը.

$$(0<x<1)\Leftrightarrow(\log_a x<0),$$
$$(x=1)\Leftrightarrow(\log_a x=0),$$
$$(x>1)\Leftrightarrow(\log_a x>0)։$$

Դա նշանակում է, մասնավորապես, որ 1-ից փոքր դրական թվերի տասնորդական լոգարիթմները բացասական են, իսկ 1-ից մեծ թվերի տասնորդական լոգարիթմները՝ դրական։ 1-ի լոգարիթմը հավասար է զրոյի։

Այս հատկությունը հաճախ օգտագործվում է խնդիրներ լուծելիս։

Համանման հատկությունը $0<a<1$ դեպքում հետևում է 180-րդ նկարից։

983. *Համեմատեցեք թվերի լոգարիթմները.*

ա) $\log_3 5$ և $\log_3 7$, գ) $\log_{\frac{2}{3}} 12$ և $\log_{\frac{2}{3}} 15$,

բ) $\log_8 \frac{5}{7}$ և $\log_8 \frac{3}{7}$, դ) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{6}{11}$ և $\log_{\frac{3}{5}} \frac{8}{11}$.

984. *Թվերի լոգարիթմները համեմատեցեք 1-ի հետ.*

$\log_6 8{,}2$; $\lg \frac{3}{8}$; $\lg 3{,}8$; $\log_{\frac{3}{4}} 7{,}1$; $\log_{0{,}2} 0{,}7$; $\log_{0{,}3} \frac{5}{11}$.

§ 136. ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ՆՈՒՅՆԱԿԱՆ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Թեորեմ 1. Երկու դրական թվերի արտադրյալի լոգարիթմը հավասար է արտադրիչների լոգարիթմների գումարին:

Տրված են x *և* y *երկու դրական թվերը և ընտրված է որոշ* a *հիմք։ Դիցուք, օրինակ,* $a=10$*։ Պետք է ապացուցել, որ*

$$\lg(xy)=\lg x+\lg y.$$

Ապացուցում։ Նշանակենք $\lg x=\alpha$, $\lg y=\beta$*։ Ըստ լոգարիթմի սահմանման՝* $10^{\alpha}=x$, $10^{\beta}=y$*։ Անդամ առ անդամ բազմապատկենք այս երկու հավասարությունները, կստանանք՝* $xy=10^{\alpha+\beta}$*։ Ըստ լոգարիթմի սահմանման՝* $\alpha+\beta=\lg(xy)$*, այսինքն՝* $\lg(xy)=\lg x+\lg y$*։*

1-ին թեորեմը ճիշտ է ոչ միայն երկու, այլև ցանկացած քանակով դրական թվերի համար։ Այսպես, երեք թվերի համար այդ բանաձևն այսպիսին է.

$$\lg(xyz)=\lg x+\lg y+\lg z.$$

Օրինակներ։ $\lg 15=\lg 3+\lg 5$, $\lg 1001=\lg 7+\lg 11+\lg 13$.

Թեորեմ 2. Երկու դրական թվերի քանորդի լոգարիթմը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի լոգարիթմների տարբերությանը։ *(Այլ ձևակերպում. դրական թվերով կոտորակի լոգարիթմը հավասար է համարիչի և հայտարարի լոգարիթմների տարբերությանը։)*

Ապացուցում։ Նշանակենք $\lg x=\alpha$, $\lg y=\beta$*։ Ունենք՝* $10^{\alpha}=x$, $10^{\beta}=y$*։ Առաջին հավասարությունը անդամ առ անդամ բաժանենք երկրորդի վրա, կստանանք՝* $10^{\alpha+\beta}=\frac{x}{y}$*։ Ըստ լոգարիթմի սահմանման՝*

$\alpha-\beta=\lg\left(\frac{x}{y}\right)$*։ Այսպիսով,* $\lg\left(\frac{x}{y}\right)=\lg x-\lg y\ (x>0,\ y>0)$*։*

Օրինակներ: $\lg\frac{7}{3}=\lg 7-\lg 3$, $\lg 5=\lg 10-\lg 2=1-\lg 2$,

Թեորեմ 3. Դրական x թվի k աստիճանի լոգարիթմը հավասար է աստիճանի x հիմքի լոգարիթմի և k աստիճանացույցի արտադրյալին:

Ապացուցում: Դիցուք, $\lg x=\alpha$: Հետևաբար, $10^{\alpha}=x$: Այս հավասարության երկու մասերը բարձրացնելով k աստիճան, կստանանք՝ $10^{\alpha k}=x^{k}$: Այստեղից կստանանք՝ $\alpha k=\lg(x^{k})$, կամ $\lg(x^{k})=k\times\lg x\ (x>0)$:

Օրինակներ: $\lg 81=4\lg 3$, $\lg 360=\lg(8\cdot 9\cdot 5)=3\lg 2+2\lg 3+\lg 5$:

Թեորեմ 4. Դրական x թվի k-րդ ($k\in N$) աստիճանի արմատի լոգարիթմը հավասար է ենթարմատային x թվի լոգարիթմին՝ բաժանած արմատի k ցուցիչի վրա:

Ապացուցում: $\lg\sqrt[k]{x}=\lg\left(x^{\frac{1}{k}}\right)=\frac{1}{k}\cdot\lg x\ (x>0)$:

Օրինակ: $\lg\sqrt[5]{49}=\frac{2}{5}\lg 7$:

Հակիրճ կանգ առնենք հաշվեքանոնով (լոգարիթմական քանոնով) բազմապատկելու և բաժանելու գործողությունների հիմնավորման վրա:

Հաշվեքանոնի հիմնական սանդղակի վրա որոշակի մասշտաբով տեղադրված են ոչ թե թվերը, այլ դրանց լոգարիթմները: Մենք ապացուցեցինք, որ արտադրյալի լոգարիթմը հավասար է արտադրիչների լոգարիթմների գումարին, իսկ քանորդի լոգարիթմը՝ բաժանելիի և բաժանարարի լոգարիթմների տարբերությանը: Ուստի երկու թվերի բազմապատկումը (բաժանումը) հանգում է դրանց լոգարիթմները գրաֆիկորեն գումարելուն (հանելուն):

Ասածը պարզաբանենք օրինակներով:

Օրինակ 1: *Դիցուք* $a\cdot b=c$: *Լոգարիթմելով, կստանանք.*

$$\lg a+\lg b=\lg c:$$

Եթե վերցնենք լոգարիթմական սանդղակներով երկու քանոն և գրաֆիկորեն a թվի լոգարիթմին ավելացնենք b թվի լոգարիթմը, ապա արդյունքում կստանանք c թվի լոգարիթմը, այսինքն, a և b թվերի արտադրյալի լոգարիթմը:

70-րդ նկարում (տես § 51) ցույց է տրված հաշվեքանոնի սանդղակների դիրքը $a=15{,}1$ և $b=3{,}76$ թվերը բազմապատկելիս: Արտադրյալը հավասար է $c=56{,}7$:

Օրինակ 2: Դիցուք $\frac{a}{b}=d$, լոգարիթմելով, կստանանք.

$$\lg a-\lg b=\lg d:$$

Հետևաբար, a և b թվերի բաժանման քանորդի լոգարիթմը գտնելու համար, պետք է լոգարիթմական սանդղակներով երկու քանոնների միջոցով a թվի լոգարիթմից գրաֆիկորեն հանել b թվի լոգարիթմը։

Եթե $a=74,1$, $b=5,48$, *ապա հաշվեքանոնի սանդղակները կգրավեն 72-րդ նկարում պատկերված դիրքը (տես § 52)։ Գտնենք քանորդը.* $d=13,5$։

Վարժություններ

985. *Գիտենալով, որ* $\lg 2=0,3010$, $\lg 3=0,4771$, *գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները.*

ա) 6, բ) 0,4, գ) 45, դ) 180, ե) 7,5, զ) 480։

986.* *Գիտենալով, որ* $\lg 2=0,3010$, $\lg 3=0,4771$, $\lg 7=0,8451$, *գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները.*

ա) 14, բ) 126, գ) 420, դ) 980, ե) 6,3, զ) 0,21։

§ 137. ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄՈՒՄԸ ԵՎ ՊՈՏԵՆՑՈՒՄԸ

Նախորդ պարագրաֆում ստացված թեորեմները կարևոր նշանակություն ունեն հաշվումներ կատարելու համար։ Օրինակ, 1-ին թեորեմը հնարավորություն է տալիս թվերի բազմապատկումը փոխարինել այդ թվերի լոգարիթմների գումարումով, իսկ այնուհետև արդեն հաշված լոգարիթմից ելնելով, գտնել այդ թվերի արտադրյալը։ Հանգունորեն. 3-րդ թեորեմը հնարավորություն է տալիս աստիճան բարձրացնելը փոխարինել տրված թվի լոգարիթմի և աստիճանացույցի բազմապատկումով, իսկ այնուհետև արդեն հաշված լոգարիթմից ելնելով, գտնել այդ աստիճանը։

Այդ թեորեմների հիման վրա կատարվում են հետևյալ երկու փոխհակադարձ ձևափոխությունները։

Լոգարիթմումը *դա մի ձևափոխություն է, որի դեպքում փոփոխականներ պարունակող արտահայտության լոգարիթմը հանգեցվում է այդ փոփոխականների լոգարիթմների գումարին կամ տարբերությանը։*

Պետք է հատուկ տարբերել լոգարիթմների $\lg a+\lg b$ *գումարը և գումարի* $\lg(a+b)$ *լոգարիթմը։ Լոգարիթմների գումարը հավասար է արտադրյալի լոգարիթմին, իսկ գումարի լոգարիթմի համար պարզ բանաձև չկա։*

Օրինակ 1: $x=\frac{3a^2\sqrt[5]{b^3}}{c^4}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$: Գտնել $\lg x$-ը:

Լուծում: Լոգարիթմելով, կստանանք.

$$\lg x=\lg 3+\lg(a^2)+\lg\sqrt[5]{b^3}-\lg(c^4)=\lg 3+2\lg a+\frac{3}{5}\lg b-4\lg c:$$

Օրինակ 2: $x=\frac{5a^3b^2\sqrt[7]{(2a+b)^3}}{7c^2(3a-5b)^3}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $3a>5b$: Գտնել $\lg x$-ը:

Լուծում: Լոգարիթմելով, կստանանք.

$$\lg x=\lg 5-\lg 7+3\lg a+2\lg b-2\lg c+\frac{3}{7}\lg(2a+b)-3\lg(3a-5b):$$

Պոտենցումը դա մի ձևափոխություն է, որի դեպքում փոփոխականների լոգարիթմների գումարը կամ տարբերությունը հանգեցվում է փոփոխականներով արտահայտության լոգարիթմին:

Պոտենցումը լոգարիթմելուն հակադարձ ձևափոխությունն է:

Օրինակ 3: $\lg x=2\lg a-5\lg b+\frac{3}{7}\lg c$, $a>0$, $b>0$, $c>0$: Գտնել x-ի համար արտահայտություն:

Լուծում: Պոտենցելով, կստանանք.

$$\lg x=\lg a^2-\lg b^5+\lg c^{\frac{3}{7}}=\lg\frac{a^2\cdot\sqrt[7]{c^3}}{b^5},\quad x=\frac{a^2\sqrt[7]{c^3}}{b^5}:$$

Օրինակ 4: $\lg x=4\lg a-\frac{3}{4}\lg c+3\lg(5a-2c)-\frac{5}{3}\lg(2a-7b)$, $a>0$, $c>0$, $5a>2c$, $2a>7b$: Գտնել x-ի համար արտահայտություն:

Լուծում: Պոտենցելով, կստանանք.

$$\lg x=\lg a^4-\lg c^{\frac{3}{4}}+\lg(5a-2c)^3-\lg(2a-7b)^{\frac{5}{3}}=$$

$$=\lg\frac{a^4(5a-2c)^3}{\sqrt[4]{c^3}\cdot\sqrt[3]{(2a-7b)^5}},\quad x=\frac{a^4(5a-2c)^3}{\sqrt[4]{c^3}\cdot\sqrt[3]{(2a-7b)^5}}:$$

Վարժություններ

Լոգարիթմեցեք հետևյալ արտահայտությունները (բոլոր փոփոխականները, ինչպես նաև դրանց գումարները և տարբերությունները ընդունում են դրական արժեքներ).

987. ա) $x=abc$, բ) $x=2a$, գ) $x=3(a+b)$, դ) $x=2a(a-b)$:

988. ա) $x=mnp$, բ) $x=3ab$, գ) $x=4(a-b)$, դ) $x=5b(a+b)$:

989 ա) $x=7a^4b^3$, բ) $x=\frac{2b^4c^3}{3a^2}$, գ) $x=\frac{m^4\sqrt{n}}{2a^2}$, դ) $x=a^2b\sqrt[3]{c}$,

990. ա) $x=6a^2b^5c$, բ) $x=2a^3\sqrt[4]{bc}$, գ) $x=\frac{5a^7c^4}{2b^5}$, դ) $x=\frac{3m^2n^5}{a^4\sqrt{b}}$,

991. ա) $x=\sqrt{a\sqrt[4]{b^3}}$, բ) $x=5a^{-3}b^{-4}c^6$, գ) $x=\frac{2}{3}p^4(a-b)\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$,

992. ա) $x=3\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{b^4}}$, բ) $x=8m^{-7}n^5p^{-1}$,

գ) $x=\frac{1}{7}a(p+b)\sqrt[4]{\frac{b}{p}}$։

Գտնենցեք և x-ի համար գտեք արտահայտություն.

993. ա) $\lg x=\lg 2+\lg a+\lg c$, գ) $\lg x=\lg(a+b)$,

բ) $\lg x=\lg 5-\lg a$, դ) $\lg x=2\lg a+3\lg b$։

994. ա) $\lg x=\lg 3+\lg a+\lg b$, գ) $\lg x=\lg(a-b)$,

բ) $\lg x=\lg b-\lg 2$, դ) $\lg x=5\lg a-2\lg b$։

995. ա) $\lg x=2\lg 3+4\lg a-\frac{1}{3}\lg b$,

բ) $\lg x=7\lg a+\frac{1}{2}\lg b-\frac{2}{3}\lg c$,

գ) $\lg x=\lg(a+b)-\lg(a-b)$,

դ) $\lg x=\frac{2}{3}\lg(a-b)-3\lg a-2\lg b$։

996. ա) $\lg x=3\lg 2+\frac{1}{2}\lg a-4\lg b$,

բ) $\lg x=4\lg b-\frac{1}{3}\lg a+\frac{2}{3}\lg c$,

գ) $\lg x=\lg(a-b)-\lg(a+b)$,

դ) $\lg x=\frac{3}{4}\lg(a+b)-5\lg b+\lg c$։

997. ա) $\lg x=\lg a+\frac{2}{3}(\lg a-\lg b)$,

բ) $\lg x = \frac{1}{2}(\lg(a-b) - \lg(a+b))$,

գ) $\lg x = 2\lg(a+b) - \frac{1}{5}(2\lg a + 3\lg b)$,

դ) $\lg x = \frac{3}{5}\lg a + \frac{2}{3}\left(4\lg a + \frac{5}{7}\lg b\right)$։

998 ա) $\lg x = 2\lg b + \frac{1}{4}(\lg a - \lg b)$,

բ) $\lg x = \frac{3}{5}(\lg(a+b) - \lg(a-b))$,

գ) $\lg x = 3\lg(a-b) + \frac{1}{4}(3\lg a - \lg b)$,

դ) $\lg x = \frac{2}{3}\lg b - \frac{1}{4}\left(3\lg a - \frac{3}{5}\lg b\right)$։

§ 138. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Լոգարիթմական հավասարում (անհավասարություն) կոչվում է լոգարիթմի նշանի տակ փոփոխական պարունակող հավասարումը (անհավասարությունը)։ *Պարզագույն օրինակներ*՝ $\lg x = a$, $\lg x > a$, $\lg x < a$։

Լոգարիթմական հավասարումներ լուծելիս հաճախ հարկ է լինում լոգարիթմների նկատմամբ կատարել զանազան նույնական ձևափոխություններ, նպատակ ունենալով բարդ հավասարումներից անցնել ավելի պարզ հավասարումների։ Այդ անելիս հնարավոր է, որ լայնանա փոփոխականներ պարունակող արտահայտության որոշման տիրույթը, և առաջանան միջանկյալ հավասարումների այնպիսի արմատներ, որոնք արմատներ չեն սկզբնական հավասարման համար։ Ուստի լոգարիթմական հավասարումներ լուծելիս անհրաժեշտ է արմատների անպայման ստուգել։

Դիցուք, օրինակ, տրված է

$$\lg(x+1) + \lg(x-3) = a \tag{1}$$

հավասարումը։ Պոտենցելով, կստանանք նոր հավասարում՝

$$\lg(x+1)(x-3) = a, \tag{2}$$

(1) հավասարման ձախ մասի որոշման տիրույթն այսպիսին է.

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x-3>0, \end{cases} \quad \text{կամ} \quad x>$$

(2) հավասարման ձախ մասի որոշման տիրույթն է՝ $(x+1)(x-3)>0$։ Պատկերացնենք մի պարաբոլ, որը Ox առանցքը հատում է -1 և 3 կետերում և ճյուղերն էլ ուղղված են դեպի վեր։ Պարաբոլի օրդինատները ընդունում են դրական արժեքներ ինչպես $x=-1$-ից ձախ, այնպես էլ $x=3$-ից աջ գտնվող աբսցիսների դեպքում։ Այսպիսով, (2) հավասարման ձախ մասի որոշման տիրույթն ավելի լայն է, քան (1) հավասարման ձախ մասի տիրույթը։ Ուստի (2) հավասարումը կարող է ունենալ արմատներ, որոնք չեն մտնում (1) հավասարման ձախ մասի որոշման տիրույթի մեջ. (2) հավասարման այսպիսի արմատները (1) հավասարման արմատներ չեն։

Օրինակ 1: *Լուծել* $\lg 5+\lg(x+3)=3$ *հավասարումը։*

Լուծում։ $\lg 5+\lg(x+3)=\lg 1000$, $5(x+3)=1000$, $x+3=200$, $x=197$։

Ստուգում։ $\lg 5+\lg 200=\lg(5\cdot 200)=\lg 1000=3$ *(ճիշտ է)։*

Պատասխան. $\{197\}$։

Օրինակ 2: *Լուծել* $\lg(x^2-125)=2$ *հավասարումը։*

$$x^2-125=100,\ x=\pm 15։$$

Ստուգում։ $\lg(225-125)=\lg 100=2$ *(ճիշտ է)։*

Պատասխան. $\{-15;\ 15\}$։

Օրինակ 3: *Լուծել* $\lg(125-x^2)=2$ *հավասարումը։*

$$125-x^2=100,\ x^2=25,\ x=\pm 5։$$

Ստուգում։ $\lg(125-25)=\lg\ 100=2$ *(ճիշտ է)։*

Պատասխան. $\{-5;\ 5\}$

Օրինակ 4: *Լուծել* $\lg(3x-11)+\lg(x-27)=3$ *հավասարումը։*

$$\lg(3x-11)(x-27)=\lg 1000,\ (3x-11)(x-27)=1000$$

$$3x^2-92x-703=0,\ x=\frac{46\pm\sqrt{4225}}{3}=\frac{46\pm 65}{3},\ x_1=-\frac{19}{3},\ x_2=37։$$

Ստուգում։ $x_1=-\frac{19}{3}$ *դեպքում* $3x-11$ *արտահայտությունն ընդունում է բացասական արժեք, ուստի* $\lg(3x-11)$ *արտահայտությունն իմաստ չունի, հետևաբար քառակուսի հավասարման* $-\frac{19}{3}$ *արմատը լոգարիթմական հավասարման համար արմատ չէ։*

$x_2=37$ դեպքում կստանանք՝ $\lg 100+\lg 10=2+1=3$ (ճիշտ է)։

Պատասխան. $\{37\}$։

Օրինակ 5։ Լուծել $\lg 2x=2\lg(4x-15)$ հավասարումը։

$$2x=(4x-15)^2,\ 16x^2-122x+225=0,\ x=\frac{61\pm 11}{16},\ x_1=\frac{25}{8},\ x_2=\frac{9}{2}\text{։}$$

Քառակուսի հավասարման $\frac{25}{8}$ արմատը սկզբնական հավասարման համար արմատ չէ։ Տրված օրինակում լոգարիթմական և քառակուսի հավասարումները համարժեք չեն (§ 84)։

Պատասխան. $\{4, 5\}$։

Ոչ համարժեք հավասարումներ կարող են առաջանալ ոչ միայն լոգարիթմական հավասարումներ լուծելիս։ Դիտարկենք, օրինակ, $x-4=4\sqrt{x}+1$ հավասարումը։ Վերջինիս երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի և պարզեցնելով, կստանանք $x^2-24x=0$ քառակուսի հավասարումը, որն ունի երկու արմատ՝ 0 և 24, բայց սկզբնական հավասարմանը բավարարում է միայն 24-ը։

Այժմ դիտարկենք լոգարիթմական անհավասարությունների լուծումը։ Այդպիսի անհավասարություններ լուծելիս օգտագործվում է լոգարիթմական ֆունկցիայի մոնոտոնության հատկությունը.

$a>1$ դեպքում ունենք. եթե $0<x<1$, ապա $\log_a x<\log_a 1$, այսինքն՝ $\log_a x<0$, իսկ եթե $x>1$, ապա $\log_a x>\log_a 1$, այսինքն՝ $\log_a x>0$։

$0<a<1$ դեպքում ունենք. եթե $0<x<1$, ապա $\log_a x>0$, իսկ եթե $x>1$, ապա $\log_a x<0$։

Օրինակ 6։ Լուծել $\lg(4x-3)>1$ անհավասարությունը։

Լուծում. $\lg(4x-3)>\lg 10$։ 1-ից մեծ հիմքի դեպքում լոգարիթմական ֆունկցիայի մեծ արժեքին համապատասխանում է արգումենտի մեծ արժեք։ Ուստի կստանանք՝ $4x-3>10$, $x>\frac{13}{4}$ ։ Գտնենք տրված անհավասարության ձախ մասի որոշման տիրույթը. $4x-3>0$, $x>\frac{3}{4}$ ։ Լուծենք գծային անհավասարությունների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} x>\frac{13}{4}, \\ x>\frac{3}{4}, \end{cases}$$

կստանանք՝ $x>\frac{13}{4}$։

Պատասխան. $\left]\frac{13}{4};\infty\right[$ ։

Օրինակ 7: *Լուծել* $\lg(4x-3)<1$ *անհավասարությունը:*

Լուծում. $\lg(4x-3)<\lg 10,\ 4x-3<10,\ x<\frac{3}{4}$ *: Գտնենք տրված անհավասարության ձախ մասի որոշման տիրույթը՝* $x>\frac{3}{4}$ *: Լուծենք գծային անհավասարությունների հետևյալ համակարգը.*

$$\begin{cases} x<\frac{13}{4}, \\ x>\frac{3}{4}, \end{cases}$$

կստանանք՝ $\frac{3}{4}<x<\frac{13}{4}$ *:*

Պատասխան. $\left]\frac{3}{4};\ \frac{13}{4}\right[$ *:*

Վարժություններ

Լուծեցեք հետևյալ լոգարիթմական հավասարումները.

999. ա) $\frac{2\lg x+7}{3}-\frac{\lg x-1}{5}=3$, գ) $\lg^2 x-5\lg x=2-4\lg x$,

բ) $\frac{\lg x+4}{2}+\frac{6-3\lg x}{4}=4$, դ) $\lg(3x+5)=\lg(5+1)$:

1000. ա) $\frac{\lg x-5}{2}+\frac{13-\lg x}{3}=2$, գ) $\lg^2 x+2\lg x-3=3\lg x-1$,

բ) $\frac{5-2\lg x}{3}-\frac{2+\lg x}{7}=3$, դ) $\lg(2x-1)=\lg(x+1)$:

1001. ա) $\lg(5x-6)=2\lg x$,

բ) $\lg(3x-2)+\lg(5x+2)=\lg(10x-3)$,

գ) $2\lg x=\lg(2x+15)$,

դ) $\lg(2x+3)-\lg(2x-3)=\lg(5x-12)$:

1002. ա) $2\lg x=\lg(7x-12)$,

բ) $\lg(6x-1)-\lg(4x-3)=\lg(2x+3)$,

գ) $\lg(16-6x)=2\lg x$,

դ) $\lg(3x+1)+\lg(2x-1)=\lg(17x-1)$:

Լուծեցեք հետևյալ լոգարիթմական անհավասարությունները.

1003. ա) $\lg(2x-3)>\lg(5x+7)$, գ) $\lg(x^2-5x)<\lg(5x-24)$,

բ) $\lg(x-5)<\lg(3x+7)$, դ) $\lg(x^2-5x)\geqslant\lg(2x-12)$,

1004. ա) $\lg(7x-2)<\lg(2x+13)$,

բ) $\lg(4x+9)>\lg(3x-5)$,

գ) $\lg(11x-12)<\lg(x^2+4x)$,

դ) $\lg(8-x)\geqslant\lg(x^2+2)$։

§ 139. ԹՎԻ ԱՄԲՈՂՋ ԵՎ ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ՄԱՍԵՐԸ: ԹՎԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄԻ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ ԵՎ ՀԱՎԵԼՈՒՅԹԸ

Յանկացած թիվ կարելի է ներկայացնել ամբողջ թվի և 1-ից փոքր ոչ բացասական թվի գումարի տեսքով:

Սահմանում: **a թվի ամբողջ մաս կոչվում է a-ն չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը:**

a թվի ամբողջ մասը նշանակվում է այսպես՝ $[a]$։

Օրինակներ: $[5]=5$, $[6,3]=6$, $[-4]=-4$, $[-8,3]=-9$, $[-3,14]=-4$։

Այսպիսով, եթե a-ն ամբողջ թիվ է, ապա $[a]=a$, *իսկ եթե կոտորակային է, ապա* $[a]$*-ն ձախից ամենամոտ ամբողջ թիվն է:*

Սահմանում: **a թվի կոտորակային մաս կոչվում է a-ի և նրա [a] ամբողջ մասի տարբերությունը:**

a թվի կոտորակային մասը նշանակվում է այսպես՝ $\{a\}$։

Ըստ սահմանման $\{a\}=a-[a]$, *հետևաբար,*

$$a=[a]+\{a\}։$$

Քանի որ $[a]\leqslant a$, *ապա* $\{a\}\geqslant 0$, *բացի այդ* $\{a\}<1$, *ուստի* $0\leqslant\{a\}<1$։

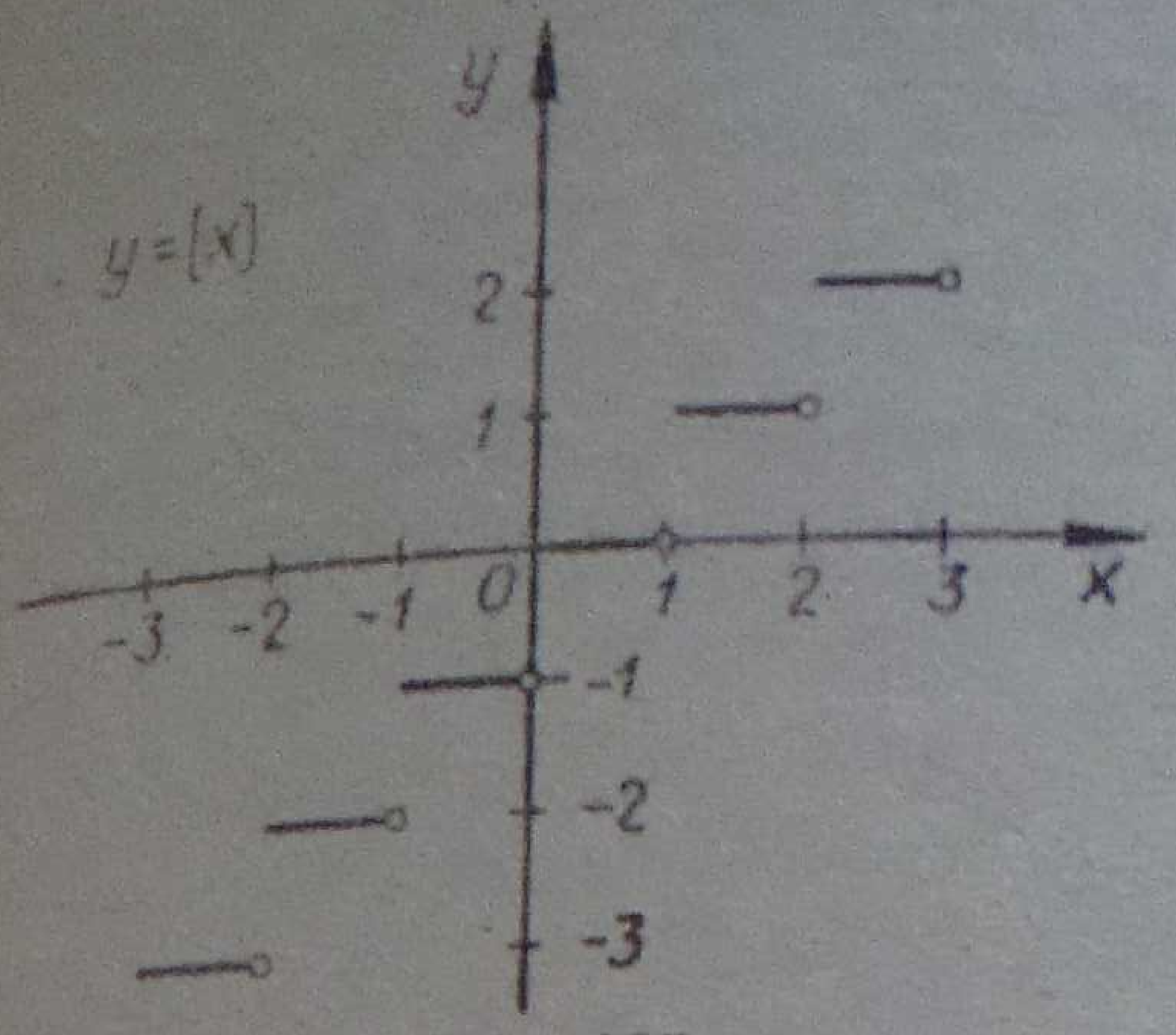
Օրինակներ: $\{6\}=6-6=0$, $\{0,4\}=0,4-0=0,4$,

$\{3,24\}=3,24-3=0,24$,

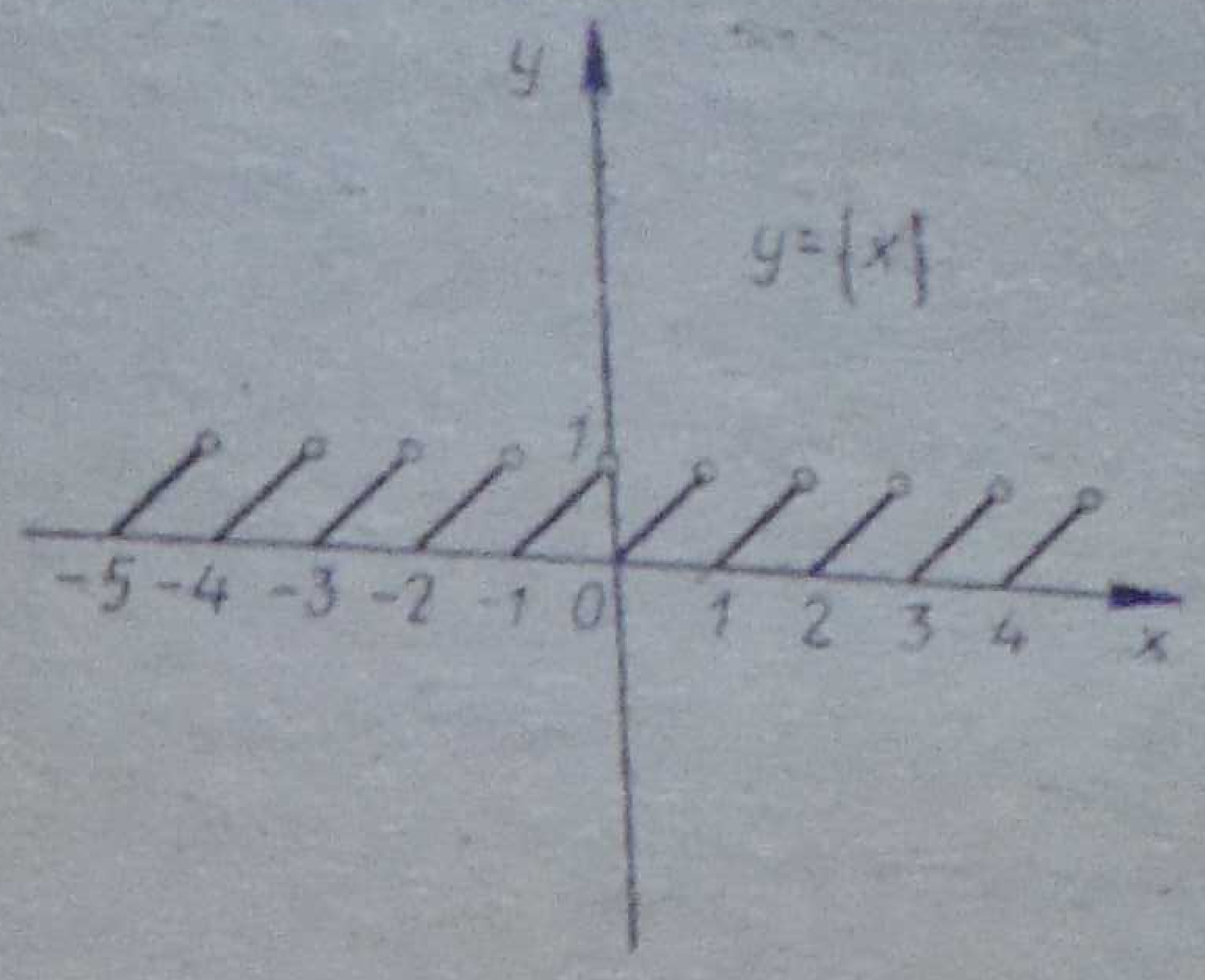
$\{-8,3\}=-8,3-(-9)=-8,3+9=0,7$,

$\{-3,24\}=-3,24-(-4)=-3,24+4=0,76$։

Կառուցենք $y=[x]$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը: Դրա համար ֆունկցիան դիտարկենք հետևյալ առանձին միջակայքերի վրա՝* $[-2; -1[$, $[-1; 0[$, $[0; 1[$, $[1; 2[$ *և այլն:* $[-2; -1[$ *միջակայքի վրա ֆունկցիան ընդունում է* -2 *արժեքը, հետևաբար այդ միջակայքին պատկանող x-երի համար*



Նկ. 183



Նկ. 184

$y=[x]$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կլինի $0x$ առանցքին զուգահեռ $y=-2$ ուղղի այն հատվածը, որից հեռացված է աջ ծայրը։ $[-1;0[$ միջակայքի վրա ֆունկցիան ընդունում է միևնույն -1 արժեքը, ուստի այդ միջակայքի վրա $y=[x]$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կլինի $0x$ առանցքին զուգահեռ $y=-1$ ուղղի այն հատվածը, որից հեռացված է աջ ծայրը և այլն (նկ. 183)։

Այժմ կառուցենք $y=\{x\}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Առաջվա պես ֆունկցիան դիտարկենք հետևյալ առանձին միջակայքերի վրա՝ $[-2;-1[$, $[-1;0[$, $[0;1[$ և այլն։

Ըստ սահմանման՝ $\{x\}=x-[x]$։

$[-2;-1[$ միջակայքի վրա $[x]=-2$, հետևաբար, $\{x\}=x+2$։ $[-2;-1[$ միջակայքի վրա $\{x\}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդին զուգահեռ $y=x+2$ ուղղի այն հատվածն է, որից հեռացված է աջ ծայրը։

$[-1;0[$ միջակայքի վրա $[x]=-1$, ուստի այդ միջակայքին պատկանող x-երի համար $y=\{x\}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդին զուգահեռ $y=x+1$ ուղղի այն հատվածն է, որից հեռացված է աջ ծայրը և այլն (նկ. 184)։

Դիտարկենք x դրական թվի լոգարիթմի ամբողջ և կոտորակային մասերը գտնելու հարցը։

Հիշեցնենք, որ ցանկացած դրական x թիվ կարելի է ներկայացնել ստանդարտ տեսքով (տես § 74). $x=a\cdot 10^n$, որտեղ $1\leq a<10$, իսկ n-ը ամբողջ թիվ է ($n\in Z$), որը կոչվում է x թվի կարգ։

Այժմ որոշենք ստանդարտ տեսքով գրված x թվի լոգարիթմը՝

$$\lg x=\lg a+\lg(10^n)=\lg a+n\lg 10=n+\lg a.$$

Ըստ պայմանի $1\leq a<10$, և քանի որ $\lg x$-ը աճող ֆունկցիա է, ուստի $\lg 1\leq \lg a<\lg 10$, այսինքն՝ $0\leq \lg a<1$։ Այսպիսով,

$$\lg x=n+\lg a$$

հավասարությունից հետևում է, որ $\lg x$-ը n ($n \in Z$) ամբողջ թվի և 1-ից փոքր ու բացասական $\lg a$ թվի գումարն է։ Ուստի n-ը $\lg x$-ի ամբողջ մասն է, իսկ $\lg a$-ն կոտորակային.

$$n=[\lg x], \quad \lg a=\{\lg x\}.$$

Սահմանում։ Դրական թվի լոգարիթմի ամբողջ մասը կոչվում է լոգարիթմի բնութագրիչ, իսկ կոտորակային մասը՝ լոգարիթմի հավելույթ։

Լոգարիթմի հավելույթը, ինչպես և ցանկացած թվի կոտորակային մասը կամ հավասար է զրոյի կամ 1-ից փոքր դրական թիվ է։ Լոգարիթմի հավելույթը չի կարող բացասական լինել։

Այսպիսով, եթե x *դրական թիվը ներկայացված է* $x=a\cdot 10^n$ *ստանդարտ տեսքով, ապա* x *թվի լոգարիթմի բնութագրիչը հավասար է այդ թվի* n *կարգին, իսկ հավելույթը՝* a *թվի լոգարիթմին* ($0 \leqslant \lg a < 1$)։

Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ եթե երկու դրական թիվ տարբերվում են միայն կարգով, ապա դրանց լոգարիթմներն ունեն միևնույն հավելույթը։ Իրոք, եթե $x=a\cdot 10^n$, $y=a\cdot 10^m$, *ապա* $\{\lg x\}=\lg a$ *և* $\{\lg y\}=\lg a$, *այսինքն՝* $\{\lg x\}=\{\lg y\}$։

Օրինակ, 2308, 230,8, 0,002308, 2,308 և 0,2308 թվերն ունեն միևնույն հավելույթը, բայց տարբեր բնութագրիչներ։

Իրոք, $2308=2,308\cdot 10^3$; $230,8=2,308\cdot 10^2$; $0,002308=2,308\cdot 10^{-3}$; $2,308=2,308\cdot 10^0$; $0,2308=2,308\cdot 10^{-1}$։ *Այդ թվերի լոգարիթմների բնութագրիչներն են համապատասխանաբար՝ 3, 2, —3, 0 և —1, իսկ հավելույթները նույնն են՝* $\lg 2,308$։

Լոգարիթմների հավելույթները գտնելու համար կազմված են հատուկ աղյուսակներ։

Վարժություններ

Գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմների բնութագրիչները.

1005. 562; 56,2; 489,5; 268,1; 21; 62 238; 0,032; 4,51; 0,638; 0,000521։

1006. 3,27; 327; 71,46; 5; 59 780; 0,000521; 0,6385; 421,72; 0,451; 2623,2։

§140. ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿԸ ԵՎ $y=10^x$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿԸ

Ցանկացած դրական թվի լոգարիթմ կարելի է ներկայացնել բնութագրիչի և հավելույթի գումարի տեսքով։ Թվի լոգարիթմի բնութագրիչը որոշվում է ըստ թվի տեսքի. այն հավասար է թվի (ստանդարտ տեսքով ներկայացված) կարգին։ Լոգարիթմի հավելույթը որոշվում է հատուկ աղյուսակներով, որոնք կոչվում են լոգարիթմների աղյուսակներ։ Իսկ եթե պահանջվում է ըստ թվի լոգարիթմի գտնել բուն թիվը, ապա օգտագործ-

վում են 10 թվի աստիճանների, այսինքն՝ $y=10^x$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակները։ Դրանք կոչվում են թվերի հակալոգարիթմների աղյուսակներ։ Իրոք, եթե տրված է, որ $\lg x=m$, ապա $x=10^m$։

Նախքան աղյուսակների նկարագրությանն անցնելը, դիտարկենք հաշվային պրակտիկայում հաճախ կիրառվող՝ բացասական թվերի գրառման արհեստական ձևը.

$$-3,41=-3-0,41=(-3-1)+(1-0,41)=-4+0,59=\bar{4},59.$$

կարդացվում է 4 մինուսով և 59 հարյուրերորդական։ Այս գրառումը ակներև կերպով ցույց է տալիս թվի ամբողջ և կոտորակային մասերը. $[-3,41],=-4$, $\{-3,41\}=0,59$։

Այսպիսով, ցանկացած բացասական թիվ, օրինակ, $-3,41$, կարելի է գրել ոչ միայն սովորական (բնական) ձևով՝ $-3,41$, այլև արհեստական ձևով՝ $\bar{4},59$, այնպես որ $-3,41$-ը և $\bar{4},59$-ը միևնույն թվի երկու տարբեր գրառումներն են։

Բերենք այլ օրինակներ։

$$-0,032=(-0,032+1)-1=-1+0,968=\bar{1},968,$$

$$-1,6=-1-0,6=(-1-1)+(1-0,6)=-2+0,4=\bar{2},4,$$

$$-2,345=-2-0,345=(-2-1)+(1-0,345)=-3+0,655=$$
$$=\bar{3},655։$$

1-ից փոքր դրական թվերի 1-ից մեծ հիմքով լոգարիթմները բացասական թվեր են։ Իրոք, եթե $0<x<1$, ապա և $\lg x<\lg 1$, որովհետև $y=\lg x$ ֆունկցիան աճող է, բայց $\lg 1=0$, հետևաբար՝ $\lg x<0$։ Ուստի, եթե լոգարիթմը բացասական թիվ է, ապա այն ևս կարելի է գրել սովորական կամ արհեստական տեսքով։ Եթե թվի լոգարիթմը տված է արհեստական ձևով, ապա դա նշանակում է, որ նրա առջև մինուս նշան չի դրվում. մինուս նշան դրվում է բնութագրիչի վերևում, հավելույթը գրվում է ստորակետից հետո։ Այս գրառումը ընդգծում է այն փաստը, որ միայն բնութագրիչն է բացասական թիվ, իսկ հավելույթը, ըստ բուն սահմանման, դրական թիվ է։

Թվերի լոգարիթմների աղյուսակը։ Օրինակների միջոցով դիտարկենք լոգարիթմների աղյուսակների կիրառությունը թվի լոգարիթմի հավելույթը գտնելու համար (Վ. Մ. Բրադիս «Քառանիշ մաթեմատիկական աղյուսակներ»)։

XIII աղյուսակի առաջին սյունակում, որ նշանակված է N տառով և կոչվում է «տասնորդական լոգարիթմների հավելույթներ» գրված են 10-ից մինչև 99 եղած երկնիշ թվերը։ Հաջորդ տասը լայն սյունակները նշանակված են 0-ից 9 թվանշաններով։

Օրինակ 1: Գտնել lg 458-ը։

Առաջին սյունակում գտնենք 45 թիվը (տրված 458 թվի ձախից առաջին երկու նիշերը), իսկ այդ տողի և 8 թվանշանով (458 թվի երրորդ նիշը) նշված սյան համապատասխան տեղում՝ 0,6609 հավելույթը։ Քանի որ 458 թվի ամբողջ մասն ունի երեք թվանշան, ուստի նրա լոգարիթմի բնութագրիչը հավասար է 2-ի։ Հետևաբար,

$$\lg 458 = 2,6609.$$

Օրինակ 2: Գտնել lg 7,04-ը։

Ուշադրություն չդարձնելով թվի ստորակետի վրա, աղյուսակում գտնենք ձախից 70 թվով նշված տողը։ Այդ տողի և 4 թվանշանով նշված լայն սյունակի համապատասխան տեղում գտնվում է հավելույթը՝ 0,8476։ Տրված թվի լոգարիթմի բնութագրիչը հավասար է 0-ի, հետևաբար, $\lg 7,04 = 0,8476$։

Օրինակ 3: Գտնել lg 0,0145-ը։

Աղյուսակում կան երեք սանդղաձև դասավորված տողեր, որոնք ձախից նշանակված են 14 թվով։ Հավելույթը գտնվում է այդ տողի և 5 թվանշանով նշված սյան համապատասխան տեղում։

Այսպիսով, $\lg 0,0145 = -2 + 0,1614 = \bar{2},1614$։

Մեկ անգամ ևս ընդգծենք, որ հավելույթը գտնելիս մենք ուշադրություն չենք դարձնում, թե տվյալ թվի մեջ ստորակետը որտեղ է դրված։ Այդ պատճառով 574; 5,74; 0,00574 թվերի լոգարիթմների հավելույթը նույնն է՝ 0,7589։ Բայց այդ թվերի լոգարիթմները տարբեր են, որովհետև տարբեր են դրանց բնութագրիչները․

$$\lg 574 = 2,7589, \quad \lg 5,74 = 0,7589, \quad \lg 0,00574 = -3 + 0,7589 = \bar{3},7589.$$

Եթե թիվը պարունակում է մեկ կամ երկու նիշ, ապա պետք է մտովի նրան աջից կցագրել երկու կամ մեկ զրո, իսկ այնուհետև գտնել այդ թվի, որպես եռանիշ թվի, լոգարիթմի հավելույթը։

Օրինակ 4: Գտնել lg 8-ը։

Այդ թվին աջից մտովի կցագրենք երկու զրո, կստանանք 800։ 80 տողի և 0 սյան համապատասխան տեղում գտնվում է հավելույթը՝ 0,9031։ Այսպիսով, $\lg 8 = 0,9031$։

Հավելույթների աղյուսակի աջ կողմում գտնվում են ինը նեղ սյունակներ, որոնք վերևից և ներքևից նշանակված են 1-ից 9 թվանշաններով։ Այդ սյունակները պարունակում են քառանիշ թվերի հավելույթներում կատարվելիք ուղղումները։

Օրինակ 5: Գտնել lg 36,08-ը։

Ուշադրություն չդարձնելով տրված թվի ստորակետի դիրքի վրա, գտնենք 36 թվով (տրված թվի ձախից առաջին երկու նիշերը) նշված

տողը և 0 թվանշանով (տրված թվի երրորդ նիշը) նշված սյունը։ Այդ տողի և սյան հատման տեղում գտնվում է 0,5563 հավելույթը։ Այժմ պետք է կատարել չորրորդ՝ 8 նիշի համար նախատեսված ուղղումը։ 8-ով նշված նեղ սյան և 36-ով նշված տողի հատման տեղում գտնվում է 10 թիվը։ Դա էլ հենց լոգարիթմի հավելույթում տրված թվի չորրորդ նիշի համար նախատեսված ուղղումն է։ Այդ ուղղումը պետք է գումարել հավելույթին, որովհետև lgx-ը աճող ֆունկցիա է։ Ուստի տրված քառանիշ թվի հավելույթը հավասար է 0,5573-ի։ Այսպիսով, $\lg 36{,}08 = 1{,}5573$։

Չորրորդ նիշի համար նախատեսված ուղղումը միշտ գտնվում է այն տողում, որ տողում որ գտնվում է տրված թվի առաջին երեք նիշերի լոգարիթմի հավելույթը։

Այսպիսով, $\lg 1{,}415 = 0{,}1508$ (ուղղումը հավասար է 16-ի), $\lg 1{,}445 = 0{,}1599$ (ուղղումը հավասար է 15-ի), $\lg 1{,}485 = 0{,}1717$ (ուղղումը հավասար է 14-ի)։

Եթե թիվը պարունակում է չորսից ավելի նիշ, ապա այն նախապես պետք է կլորացնել մինչև չորս իմաստալից թվանշանները և այնուհետև արդեն գտնել լոգարիթմը։ Այսպես, $\lg 20021 = 4{,}3014$, $\lg 378{,}421 = 2{,}5780$։

Հակալոգարիթմների աղյուսակը։ Անցնենք $y = 10^x$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակի նկարագրությանը։

Թիվն ըստ իր լոգարիթմի գտնելու համար օգտվում են տասնորդական հակալոգարիթմների աղյուսակներից։ Այդ աղյուսակների կառուցվածքը նման է լոգարիթմների հավելույթների աղյուսակների կառուցվածքին։

Հակալոգարիթմների աղյուսակների միջոցով գտնում են թվի միայն թվանշանային կազմը, ուստի այդ աղյուսակներով անմիջականորեն աշխատելիս օգտագործում են տրված լոգարիթմի միայն հավելույթը։ Թվի ամբողջ մասի թվանշանների քանակը, կամ ստորակետի դիրքը, որոշվում է լոգարիթմի տրված բնութագրիչով։

Օրինակ 6։ Գտնել x-ը, եթե $\lg x = 2{,}5136$։

Հավելույթը հավասար է 0,5136։ 51 տողի և 3 լայն սյունակի հատման տեղում գտնվում է 3258 թիվը։ Նույն այդ տողի վրա՝ 6 թվանշանով նշված ուղղումների սյունակում գտնվում է 5 թիվը։ Այդ ուղղումը պետք է ավելացնել գտնված թվին։ Կստանանք՝ 3263։ Դա էլ հենց որոնելի թվի թվանշանային կազմն է։ Բնութագրիչը ցույց է տալիս, որ թվի ամբողջ մասում պետք է լինի երեք նիշ։ Այսպիսով, $x = 326{,}3$։

Ստուգեցեք հետևյալ հաշվումները.

1) $\lg x = 2{,}5803$, $x = 380{,}5$,

2) $\lg x = 0{,}5803$, $x = 3{,}805$,

3) $lg\,x = 1{,}5803$, $x = 0{,}3805$,

4) $lg\,x = \bar{3}{,}5803$, $x = 0{,}003805$,

5) $lg\,x = 5{,}5803$, $x = 380\,500$։

Վարժություններ

1007. *Աղյուսակների միջոցով գտեք հետևյալ թվերի հավելուրթները.*

ա) 244; 2,44; 45,1; 0,5721; 268; 0,23; 68,56; 712,6; 2,146; 59 740

բ) 6,31; 631; 0,2673; 31,5; 2,03; 0,712; 68 320; 47,21; 512,6; 3,251։

1008. *Աղյուսակների միջոցով գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները.*

ա) 2,635; 64 720; 121,5; 0,03611; 0,7216; 0,005321,

բ) 5,211; 2310; 56,23; 0,00723; 59 800; 0,06978; 8։

1009. *Աղյուսակների միջոցով գտեք այն թվերը, որոնց լոգարիթմները հավասար են.*

ա) 1,5138; $\bar{1}{,}6467$; 0,2336; $\bar{3}{,}3650$; 4,8649,

բ) 1,2948; 0,3176; $\bar{1}{,}4229$; 0,6931; $\bar{3}{,}9305$։

1010. *Թվերի հետևյալ լոգարիթմները ձևափոխեցեք սովորական տեսքի.*

ա) $\bar{5}{,}1619$; $\bar{4}{,}5656$; $\bar{2}{,}3705$; $\bar{4}{,}0569$,

բ) $\bar{6}{,}2318$; $\bar{4}{,}0623$; $\bar{5}{,}6129$; $\bar{3}{,}5629$։

1011. *Թվերի հետևյալ լոգարիթմները ձևափոխեցեք արհեստական տեսքի.*

ա) —0,2983; —1,6451; —0,5389; —2,8567; —5,5996,

բ) —0,6932; —0,3507; —1,3215; —3,9547; —4,5479։

§ 141. ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ ՀԱՇՎԵՔԱՆՈՆՈՎ

Այժմ դիտարկենք, թե հաշվեքանոնով (լոգարիթմական քանոնով) ինչպես պետք է գտնել թվերի լոգարիթմները և թվերն իրենք, եթե տրված են լոգարիթմները։ Հիշեցնենք, որ § 51—52-ում մենք սովորեցինք թվերը բազմապատկել և բաժանել, իսկ § 105-ում՝ թվերը քառակուսի և խորանարդ բարձրացնել, ինչպես նաև քառակուսի և խորանարդ արմատ հանել։

Քանոնի իրանի ամենաստորին սանդղակը (L սանդղակը) լոգարիթմների սանդղակն է (Նկ. 66)։ Այդ սանդղակը հավասարաչափ է։ Ամբողջ

սանդղակը բնդունված է որպես միավոր։ Այն տրոհված է 10 մեծ բաժանումների, որոնք աջից նշված են 1-ից 10 թվանշաններով։ Մեծ բաժանումը համապատասխանում է հավելույթի տասնորդական մասերին։ Ամեն մեծ-բաժանում գծիկներով տրոհված է 10 միջին բաժանումների։ Ուստի միջին բաժանումը համապատասխանում է հավելույթի հարյուրերորդական մասերին։ Ամեն միջին բաժանում տրոհված է 5 փոքր բաժանումների։ Մեկ փոքր բաժանումը համապատասխանում է հավելույթի երկու հազարերորդական մասերին։

Լոգարիթմական սանդղակի վրա, օրինակ, 0,356 հավելույթը անդրադրելու համար պետք է վերցնել 3 մեծ, 5 միջին և 3 փոքր բաժանումներ։ Եթե դիտագծով նշված է 6 մեծ և 2,5 փոքր բաժանում, ապա դրան համապատասխանում է 0,605 հավելույթը։

Մեկ անգամ ևս հիշեցնենք, որ քանոնի վրա դիտագծով նշվում է միայն հավելույթը, այսինքն՝ այն թվանշանային կազմը, որը լոգարիթմի գրառման մեջ գտնվում է ստորակետից աջ։

Լոգարիթմում: Քանոնով թվի տասնորդական լոգարիթմը գտնելու համար պետք է դիտագծով իրանի հիմնական սանդղակի վրա նշել թվի թվանշանային կազմը և դիտագծի դիմաց, լոգարիթմների սանդղակի վրա կարդալ այդ թվի լոգարիթմի հավելույթը։ Լոգարիթմի բնութագրիչը որոշվում է սովորական ձևով։

Օրինակ 1: Գտնել 32,4 թվի լոգարիթմը։ Իրանի հիմնական սանդղակի վրա դիտագծով նշենք թվի թվանշանային կազմը. 3—2—4։ Լոգարիթմների սանդղակի վրա դիտագծի դիմաց կարդանք հավելույթը. 5—1—1։ 32,4 թվի բնութագրիչը հավասար է 1-ի, հետևաբար.

$$lg\,32,4=1,511.$$

Պոտենցում: Ըստ տրված տասնորդական լոգարիթմի թիվը գտնելու համար պետք է լոգարիթմների սանդղակի վրա դիտագծով նշել հավելույթը և իրանի հիմնական սանդղակի վրա դիտագծի դիմաց կարդալ որոնելի թվի թվանշանային կազմը։ Որոնելի թվի ամբողջ մասի նիշերի քանակը որոշվում է ըստ բնութագրիչի։

Օրինակ 2: Գտնել թիվը, եթե նրա լոգարիթմը հավասար է 3,854-ի։ Լոգարիթմների սանդղակի վրա դիտագծով նշենք որոնելի թվի հավելույթը. 8—5—4։ Իրանի հիմնական սանդղակի վրա դիտագծի դիմաց կարդանք որոնելի թվի թվանշանային կազմը. 7—1—5։ Քանի որ բնութագրիչը հավասար է 3-ի, ուստի թվի ամբողջ մասը պետք է պարունակի չորս նիշ։ Այսպիսով, որոնելի թիվն է 7150։

Օրինակ 3: Գտնել թիվը, եթե նրա լոգարիթմը հավասար է $\bar{2},415$։

սանդղակը ընդունված է որպես միավոր։ Այն տրոհված է 10 մեծ բաժանումների, որոնք աջից նշված են 1-ից 10 թվանշաններով։ Մեծ բաժանումը համապատասխանում է հավելույթի տասնորդական մասերին։ Ամեն մեծ բաժանում գծիկներով տրոհված է 10 միջին բաժանումների։ Ուստի միջին բաժանումը համապատասխանում է հավելույթի հարյուրերորդական մասերին։ Ամեն միջին բաժանում տրոհված է 5 փոքր բաժանումների։ Մեկ փոքր բաժանումը համապատասխանում է հավելույթի երկու հազարերորդական մասերին։

Լոգարիթմական սանդղակի վրա, օրինակ, 0,356 հավելույթը տեղադրելու համար պետք է վերցնել 3 մեծ, 5 միջին և 3 փոքր բաժանումներ։ Եթե դիտագծով նշված է 6 մեծ և 2,5 փոքր բաժանում, ապա դրան համապատասխանում է 0,605 հավելույթը։

Մեկ անգամ ևս հիշեցնենք, որ քանոնի վրա դիտագծով նշվում է միայն հավելույթը, այսինքն՝ այն թվանշանային կազմը, որը լոգարիթմի գրառման մեջ գտնվում է ստորակետից աջ։

Լոգարիթմում: Քանոնով թվի տասնորդական լոգարիթմը գտնելու համար պետք է դիտագծով իրանի հիմնական սանդղակի վրա նշել թվի թվանշանային կազմը և դիտագծի դիմաց, լոգարիթմների սանդղակի վրա կարդալ այդ թվի լոգարիթմի հավելույթը։ Լոգարիթմի բնութագրիչը որոշվում է սովորական ձևով։

Օրինակ 1: Գտնել 32,4 թվի լոգարիթմը։ Իրանի հիմնական սանդղակի վրա դիտագծով նշենք թվի թվանշանային կազմը. 3—2—4։ Լոգարիթմների սանդղակի վրա դիտագծի դիմաց կարդանք հավելույթը. 5—1—1։ 32,4 թվի բնութագրիչը հավասար է 1-ի, հետևաբար.

$$lg\,32,4=1,511$$

Պոտենցում: Ըստ տրված տասնորդական լոգարիթմի թիվը գտնելու համար պետք է լոգարիթմների սանդղակի վրա դիտագծով նշել հավելույթը և իրանի հիմնական սանդղակի վրա դիտագծի դիմաց կարդալ որոնելի թվի թվանշանային կազմը։ Որոնելի թվի ամբողջ մասի նիշերի քանակը որոշվում է ըստ բնութագրիչի։

Օրինակ 2: Գտնել թիվը, եթե նրա լոգարիթմը հավասար է 3,854-ի։ Լոգարիթմների սանդղակի վրա դիտագծով նշենք որոնելի թվի հավելույթը. 8—5—4։ Իրանի հիմնական սանդղակի վրա դիտագծի դիմաց կարդանք որոնելի թվի թվանշանային կազմը. 7—1—5։ Քանի որ բնութագրիչը հավասար է 3-ի, ուստի թվի ամբողջ մասը պետք է պարունակի չորս նիշ։ Այսպիսով, որոնելի թիվն է 7150։

Օրինակ 3: Գտնել թիվը, եթե նրա լոգարիթմը հավասար է $\bar{2},415$։

Լոգարիթմների սանդղակի վրա նշենք հավելույթը՝ 4—1—5 և դի-տագծի դիմաց կարդանք թվանշանային կազմը. 2—6։ Ելնելով տրված լո-գարիթմի բնութագրիչից, ստանում ենք պատասխան՝ 0,026։

Օրինակ 4: Գտնել թիվը, եթե նրա լոգարիթմը հավասար է 1,072։

Լոգարիթմների սանդղակի վրա դիտագծով նշենք հավելույթի թվա-նշանային կազմը՝ 0—7—2։ Այս դեպքում շատ կարևոր է չմոռանալ հա-վելույթի թվանշանային կազմի առաջին տեղում գրված զրոն։ Դիտագծի դիմաց քանոնի հիմնական սանդղակի վրա կարդում ենք՝ 1—1—8, իսկ որոնելի թիվը կլինի 11,8։

Վարժություններ

1012. *Հաշվեքանոնով գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները.*

ա) 56,3; 2,75,   գ) 3960; 425,

բ) 0,354; 0,0057,   դ) 673; 0,972։

1013. *Հաշվեքանոնով գտեք թվերը, եթե հայտնի են դրանց լոգա-րիթմները.*

ա) 2,324; 1,568; 1,032,   գ) 1,905; $\bar{4}$,608; 0,085,

բ) 0,123; 4,265; 2,008,   դ) 3,720; 2,432; 1,007։

§ 142. $y=10^x$ ԵՎ $y=\lg x$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԸ

Օգտվելով թվերի լոգարիթմների և հակալոգարիթմների աղյուսակնե-րից, կարելի է կառուցել $y=10^x$ և $y=\lg x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։

Կառուցենք $y=10^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ $x=-0,5$ դեպքում քա-ռակուսի արմատների և $\frac{1}{n}$ տեսքի կոտորակների արժեքների աղյուսակ-ներից գտնում ենք, որ

$$10^{-0,5}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{3,162}\approx 9,3162\approx 0,3,$$

Արգումենտի դրական արժեքների դեպքում ֆունկցիայի արժեքները

գտնում ենք հակալոգարիթմների աղյուսակներից.

x	−0,5	0	0,25	0,50	0,75	1,00
10^x	0,3	1,0	1,8	3,2	5,6	10,0

$y=\lg x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար կարելի է կազմել աղյուսակ, անմիջականորեն օգտվելով լոգարիթմների աղյուսակից.

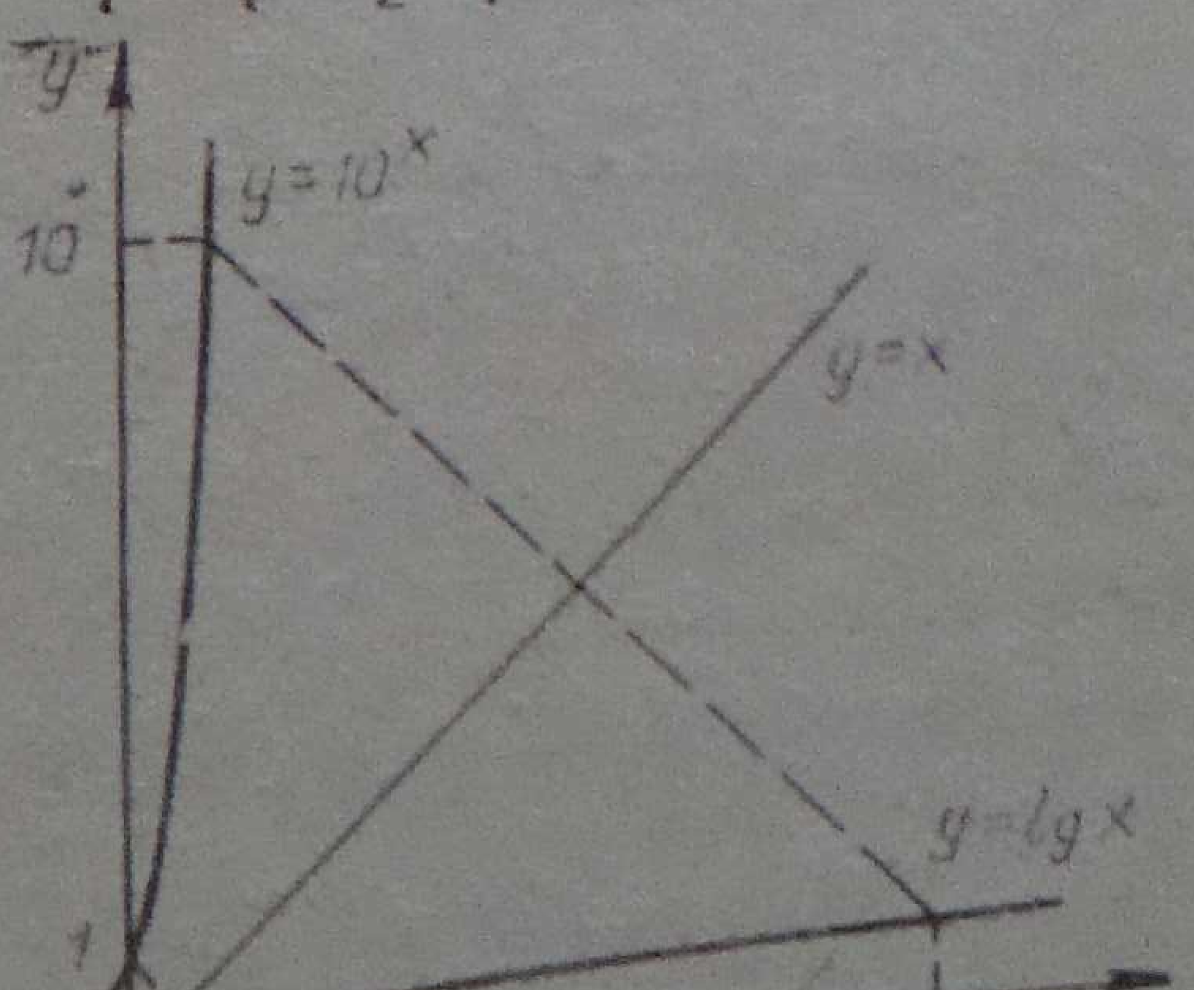
x	0,5	1,0	3	5	7	8	10
lg x	−0,7	0	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0

Կոորդինատային հարթության վրա կառուցելով համապատասխան կոորդինատներով կետերը և դրանք միացնելով սահուն գծով, կստանանք որոնելի երկու գրաֆիկները (Նկ. 185)։ Դրանք սիմետրիկ են առաջին և երրորդ կոորդինատային անկյունների կիսորդի նկատմամբ։

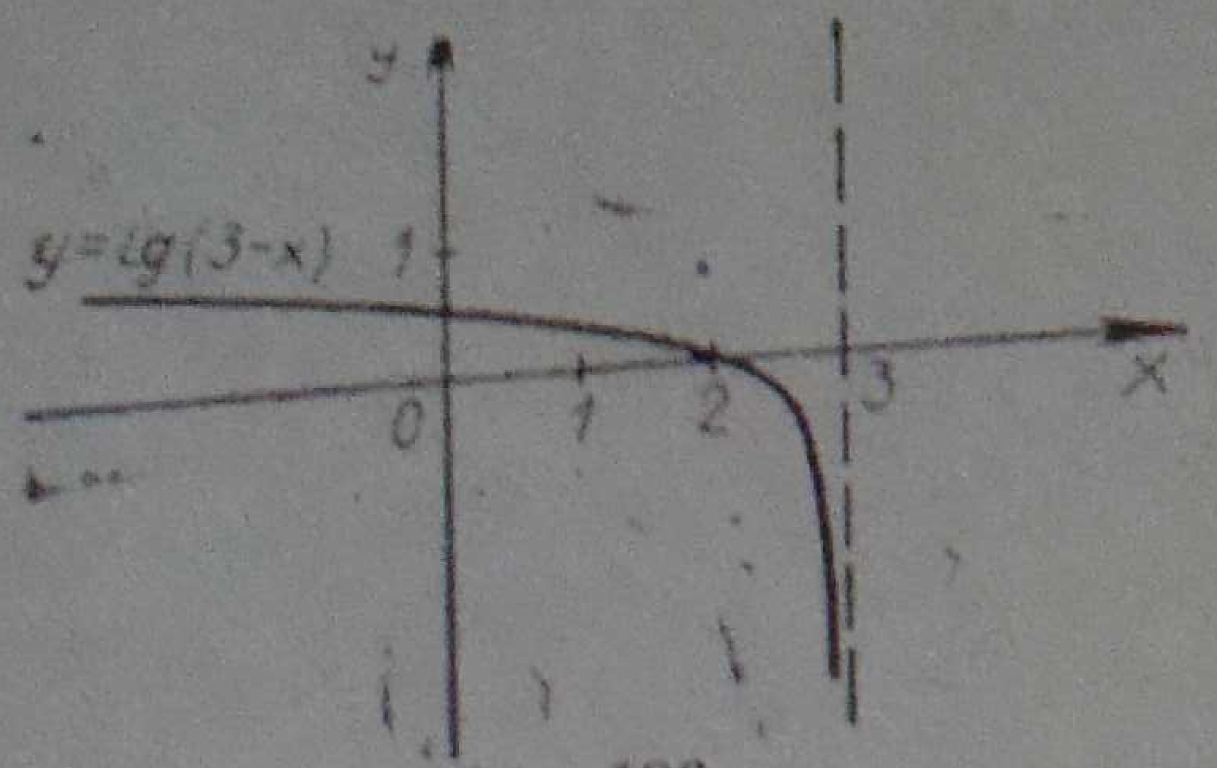
Օրինակ 1: Կառուցել $y=\lg(3-x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ $y=\lg x$ լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է։ Տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր այն թվերի բազմությունն է, որոնց դեպքում արգումենտը ընդունում է դրական արժեքներ, այսինքն՝ $x<3$ անհավասարությանը բավարարող թվերի բազմությունը։ Այսպիսով, տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը տեղադրված է $x=3$ ուղղից ձախ։

$y=\lg x$ լոգարիթմական ֆունկցիան զրոյական արժեք ընդունում է $x=1$ դեպքում. տրված ֆունկցիան զրո արժեք ընդունում է $3-x=1$ դեպքում; այսինքն $x=2$ դեպքում։ Այսպիսով, (2; 0) կետը պատկանում է որոնելի գրաֆիկին։

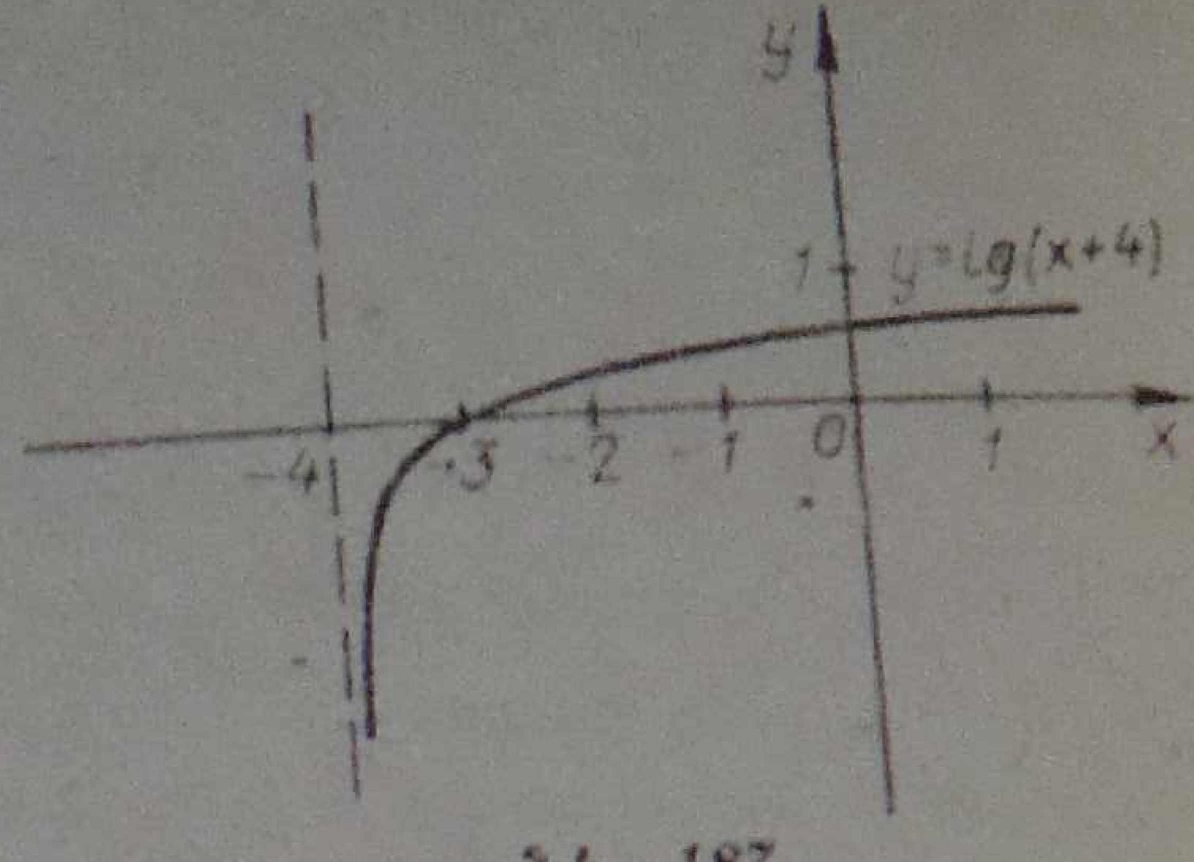
$x=0$ դեպքում $y=\lg 3\approx 0,477\approx 0,5$։ (0; lg3) կետը գրաֆիկի և Oy առանցքի հատման կետն է։ Հաշվենք, թե արգումենտի որ արժեքի դեպքում է ֆունկցիան ընդունում 1 արժեքը։ Դրա համար լուծենք $\lg(3-x)=1$ հավասարումը. $\lg(3-x)=\lg 10$, $3-x=10$, $x=-7$։



Նկ. 185



Նկ. 186



Նկ. 187

Այսպիսով, գտանք գրաֆիկին պատկանող ևս մեկ կետ՝ $(-7, 1)$։ Այժմ գտնենք գրաֆիկի այնպիսի կետ, որի աբսցիսը պատկանի $[2; 3[$

միջակայքին։ Եթե, օրինակ, $x=2{,}5$, ապա $y=\lg\frac{1}{2}=\lg 1-\lg 2=$ $=-\lg 2\approx -0{,}3$։ Որոնելի կետն ունի $(2{,}5; -\lg 2)$ կոորդինատները։ Գտած կետերով կարելի է կառուցել $y=\lg(3-x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (Նկ. 186)։

Օրինակ 2: Կառուցել $y=\lg(x+4)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։

Տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $x+4>0$ անհավասարության լուծումների բազմությունն է, այսինքն՝ $x>-4$ անհավասարության լուծումների բազմությունն է։ Գրաֆիկը տեղավորված է $x=-4$ ուղղից աջ։

Գտնենք Ox առանցքի հետ գրաֆիկի հատման կետը։ Եթե $y=0$, ապա $\lg(x+4)=0$, $\lg(x+4)=\lg 1$, $x+4=1$, $x=-3$։ Գտնենք Oy առանցքի հետ գրաֆիկի հատման կետը։ Եթե $x=0$, ապա $y=\lg 4=$ $=2\lg_2\approx 0{,}6$։

Այսպիսով, ունենք երկու կետ $(-3;0)$ և $(0; \lg 4)$։ Տեղադրելով $y=1$, կստանանք. $\lg(x+4)=1$, $x+4=10$, $x=6$։ Տեղադրելով $x=-3{,}5$, կստանանք. $y=\lg\frac{1}{2}=-\lg 2\approx -0{,}3$։ Մենք գտանք գրաֆիկին պատկանող ևս երկու կետ՝ $(6;1)$ և $(-3{,}5; \lg 2)$, $y=\lg(x+4)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը տրված է 187-րդ նկարում։

Վարժություններ

Կառուցեք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

1014. $y=\lg(x-2)$,

1015. $y=\lg(x+3)$,

1016. $y=\lg(-x-2)$,

§ 143. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ՀԵՏ։ ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐՈՎ

Լոգարիթմների միջոցով կարելի է հաշվել զանազան արտահայտությունների արժեքները։ Այդ անելիս հարկ է լինում լոգարիթմների հետ կատարել գործողություններ։ Եթե լոգարիթմի բնութագրիչը դրական թիվ է, ապա լոգարիթմն ինքը դրական թիվ է։ Ուստի լոգարիթմների հետ գործողությունները կատարվում են այնպես, ինչպես տասնորդական կոտորակների հետ։

Օրինակ. $0,8752+2,3674=3,2426$; $1,5734-0,6087=0,9647$; $2,4503\cdot 3=7,3509$; $6,3176:5=1,2635$։

Բաժանելիս մենք հավելույթը կլորացրինք չորս տասնորդական նիշի ճշգրտությամբ։

Եթե լոգարիթմները հանելիս ստացվում է բացասական թիվ, ապա կարելի է ստացված լոգարիթմը ներկայացնել արհեստական ձևով։ Օրինակ, $2,3246-5,6728=-3,3482=\bar{4},6518$։

Քիչ ավելի բարդ է այնպիսի լոգարիթմների հետ գործողություններ կատարելը, որոնց բնութագրիչները բացասական թվեր են։ Այդ դեպքում անհրաժեշտ է բնութագրիչների և հավելույթների հետ գործողությունները կատարել առանձին-առանձին։

Դիտարկենք մի քանի օրինակ։

1) $\begin{array}{r} 2,5624 \\ +\ \bar{3},6517 \\ \hline 0,2141 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \bar{5},8723 \\ -\ \bar{2},3611 \\ \hline \bar{3},5112 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 3,1265 \\ -\ \bar{2},5647 \\ \hline 4,5618 \end{array}$

4) $\bar{3},6752\cdot 3=\bar{7},0256$։ *Իրոք,* $\bar{3},6752\cdot 3=(-3+0,6752)\cdot 3=$

$=-9+2,0256=-7+0,0256=\bar{7},0256$։

Բացասական բնութագրիչ ունեցող լոգարիթմը ամբողջ թվի բաժանելիս պետք է բացասական բնութագրիչն ու հավելույթը այդ թվի վրա բաժանել առանձին-առանձին։ Այդ պարագայում հնարավոր է երկու դեպք։

1-ին դեպք։ Բնութագրիչը բաժանարարին բազմապատիկ թիվ է։ Այս դեպքում բնութագրիչի և հավելույթի բաժանումը կատարում են առանձին և արդյունքում ստացվում է բացասական բնութագրիչ։ Օրինակ, $\bar{9},7851:3=\bar{3},2617$։

2-րդ դեպք։ Լոգարիթմի բնութագրիչը բացասական թիվ է և բազմապատիկ չէ բաժանարարին։ Այս դեպքում անհրաժեշտ է բնութագրիչին ավելացնել այնքան բացասական միավոր, որ գումարը դառնա բաժանարարին բազմապատիկ։ Իսկ որպեսզի լոգարիթմի արժեքը չփոխվի, ան-

հրաժեշտ է հավելույթին ավելացնել նույնքան, բայց այս անգամ դրական միավոր։ Այնուհետև պետք է բնութագրիչն ու հավելույթը առանձին-առանձին բաժանել տրված թվի վրա։

Դիտարկենք մի օրինակ.

$$\bar{6},3070:5=(-6+0,3070):5=(-6-4+0,3070+4):5=$$

$$=(-10+4,3070):5=-2+0,8614=\bar{2},8614։$$

Անցնենք լոգարիթմների աղյուսակներով հաշվումներ կատարելուն։

Օրինակ 1: Գտնել

$$x=\frac{26,53^3\cdot\sqrt[4]{1,723}}{527,4^2}$$

արտահայտության արժեքը։

Լոգարիթմենք այս արտահայտությունը.

$$\lg x=3\lg 26,53+\frac{1}{4}\lg 1,723-2\lg 527,4։$$

Արտագրենք տրված արտահայտության աջ մասի յուրաքանչյուր գումարելին, աղյուսակով գտնենք դրանց լոգարիթմները և կատարենք նշված գործողությունները.

$$3\lg 26,53=3\cdot 1,4237=4,2711,$$

$$\frac{1}{4}\lg 1,723=\frac{1}{4}\cdot 0,2363=0,0591,$$

$$2\lg 527,4=2\cdot 2,7221=5,4442։$$

$\lg x$-ը գտնելու համար պետք է գումարել կատարված գործողությունների առաջին երկու արդյունքները և ստացված գումարից հանել երրորդ արդյունքը։ Այսպիսով, $\lg x=\bar{2},8860$։

Ըստ ստացված լոգարիթմի գտնենք թիվն ինքը։ Հակալոգարիթմների աղյուսակով գտնենք պատասխանի թվանշանային կազմը. 7—6—9—1։ Քանի որ բնութագրիչը հավասար է $\bar{2}$-ի, ուստի պատասխանում թվանշանային կազմից առաջ (այսինքն նրանից ձախ) պետք է գրել երկու զրո։

Պ ա տ ա ս խ ա ն. 0,07691։

Օրինակ 2: Գտնել

$$x=\frac{24,67^2}{\sqrt[3]{2,712}}+\sqrt{\frac{4519}{0,421^2}}$$

արտահայտության արժեքը։

Առանձին-առանձին հաշվենք յուրաքանչյուր գումարելիի արժեքը, իսկ այնուհետև գտնենք այդ արժեքների գումարը։ Գումարելիները նշանակենք A և B տառերով։

$$\lg A = 2\lg 24,67 - \frac{1}{3}\lg 2,712,$$

$$2\lg 24,67 = 2\cdot 1,3921 = 2,7842,$$

$$\frac{1}{3}\lg 2,721 = \frac{1}{3}\cdot 0,4333 = 0,1444,$$

$\lg A = 2,6398,$ *այսինքն՝* $A = 436,3$։

Հաշվենք երկրորդ գումարելիի արժեքը.

$$\lg B = \frac{1}{2}\lg 4519 - 2\lg 0,421,$$

$$\frac{1}{2}\lg 4519 = \frac{1}{2}\cdot 3,6551 = 1,8276,$$

$$2\lg 0,421 = 2\cdot \bar{1},6243 = \bar{1},2486.$$

Հետևաբար.

$$\lg B = 2,5790, \qquad B = 379,3.$$

Քանի որ $x = A + B$, *ապա* $x = 815,6$։

Պատասխան. 815,6։

Վարժություններ

Կատարեցեք նշված գործողությունները.

1017. ա) $1,2615+3,1251,\quad 5,6103+\bar{4},9892,\quad 2,1671+1,2514,$

բ) $4,9804-2,5311,\quad 5,6371-5,9784,\quad 7,2318-9,6514,$

$\bar{5},6974-4,2107.$

1018. ա) $\bar{2},3121+\bar{1},6315,\quad \bar{5},0675+\bar{2},3719,\quad \bar{2},8715+\bar{3},7581,$

բ) $2,5120-3,8519,\quad \bar{3},6214-2,6812,\quad 1,8712-\bar{3},6314,$

$\bar{2},6715-\bar{3},9125.$

1019. ա) $\bar{2},1521\cdot 5,\quad \bar{3},6383\cdot 4,\quad 1,8196\cdot 3,$

բ) $\bar{12},8653:6,\quad 9,1721:3,\quad \bar{8},5612:3,\quad \bar{13},0769:4.$

գ) $4,6374\cdot\frac{2}{3},\quad 4,2516\cdot\frac{3}{4},\quad \bar{2},8593\cdot\frac{4}{3},\quad \bar{5},6791\cdot\frac{5}{2},$

1020. ա) $5{,}6361 \cdot 3,\quad \bar{3}{,}1065 \cdot 7,\quad \bar{2}{,}9035 \cdot 3,$

բ) $2{,}8723 : 3,\quad \bar{6}{,}1256 : 2,\quad \bar{8}{,}4516 : 4,\quad \bar{7}{,}8115 : 4,$

գ) $5{,}2691 \cdot \frac{3}{4},\quad \bar{6}{,}7124 \cdot \frac{2}{3},\quad \overline{12}{,}6521 \cdot \frac{3}{4},\quad \bar{5}{,}3665 \cdot \frac{4}{3}.$

Լոգարիթմների աղյուսակների միջոցով գտեք հետևյալ թվային արտահայտությունների արժեքները.

1021. ա) $\sqrt[5]{27{,}36}$, գ) $\frac{63{,}57 \cdot 4{,}821}{26{,}59}$,

բ) $5{,}63^{15}$, դ) $\frac{1{,}503 \cdot 0{,}225}{0{,}864 \cdot 2{,}071}$.

1022. ա) $\sqrt[7]{152{,}6}$, գ) $\frac{37{,}52 \cdot 5{,}263}{123{,}4}$,

բ) $8{,}216^{8}$, դ) $\frac{0{,}0135 \cdot 2{,}504}{0{,}432 \cdot 4{,}144}$.

Ինքնուրույն աշխատանք № 22

1. *Լուծեցեք հետևյալ հավասարումը.*

$$\frac{4}{5\lg x+1}-\frac{5}{2\lg x-1}=9.$$

2. *Լոգարիթմների աղյուսակների միջոցով գտեք*

$$x=\frac{9{,}61^{3} \cdot \sqrt[7]{0{,}0815}}{3{,}512^{2} \cdot \sqrt[6]{14{,}53^{5}}}$$

արտահայտության արժեքը։

Հարցեր ինքնաստուգման համար

1. Ձևակերպեցեք թվի կամայական ամբողջ ցուցիչով աստիճանի սահմանումը (չորս դեպք)։

2. Ձևակերպեցեք դրական թվի կոտորակային (ոչ ամբողջ) ցուցիչով աստիճանի սահմանումը։

3. Միևնույն հիմքերով աստիճանների արտադրյալի և քանորդի վերաբերյալ թեորեմները (ձևակերպումները և օրինակներ)։

4. Աստիճանը աստիճան բարձրացնելու վերաբերյալ թեորեմը (ձևակերպումը և օրինակներ)։

5. Արտադրյալի և քանորդի աստիճանի վերաբերյալ թեորեմները (ձևակերպումները և օրինակներ)։

6. Թվեցեք դրական թվերի ռացիոնալ ցուցիչներով աստիճանների հինգ հիմնական հատկությունները։

7. Ինչպիսի՞ ֆունկցիան է կոչվում աստիճանային։ Նշեցեք $y=x^2$ և $y=x^{-2}$ ֆունկցիաների որոշման և արժեքների տիրույթները։

8. Ինչպիսի՞ ֆունկցիան է կոչվում ցուցչային։ Ձևակերպեցեք նրա հիմնական հատկությունները և դրանք պարզաբանեցեք ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ։

9. Ո՞րն է կոչվում ֆունկցիա։ Ինչպիսի՞ ֆունկցիան է կոչվում հակադարձելի։ Ինչպիսի՞ ֆունկցիան է կոչվում տրված ֆունկցիային հակադարձ։

10. Բացատրեցեք, թե ինչու է մոնոտոն ֆունկցիան հակադարձելի։

11. Հակադարձելի ֆունկցիան տրված է բանաձևով։ Ինչպե՞ս կազմել տրվածին հակադարձ ֆունկցիայի բանաձևը։

12. Ո՞րն է կոչվում թվի լոգարիթմ ըստ տրված հիմքի։ Գրեցեք հիմնական լոգարիթմական նույնությունը։

13. Ինչպիսի՞ ֆունկցիան է կոչվում լոգարիթմական։ Ձևակերպեցեք նրա հիմնական հատկությունները և դրանք բացատրեցեք ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ։

14. Ապացուցեք արտադրյալի լոգարիթմի վերաբերյալ թեորեմը։

15. Ապացուցեք քանորդի լոգարիթմի վերաբերյալ թեորեմը։

16. Ապացուցեք աստիճանի լոգարիթմի վերաբերյալ թեորեմը։

17. Ո՞րն է կոչվում իրական թվի ամբողջ մաս։

18. Ո՞րն է կոչվում իրական թվի կոտորակային մաս։

19. Ի՞նչ բան է լոգարիթմի բնութագրիչը, լոգարիթմի հավելույթը։ Օրինակներով բացատրեցեք թվի լոգարիթմի բնութագրիչի գտնելը։

20. Բացատրեցեք, թե ինչպես են փոխվում որևէ թվի լոգարիթմի բնութագրիչն ու հավելույթը, եթե ստորակետը տեղափոխվում է մի քանի միավոր դեպի աջ կամ ձախ։

Հետևյալ արտահայտությունները ներկայացրեք երկու ամբողջ արտահայտությունների հարաբերության կամ, մասնավորապես, երկու բազմանդամների հարաբերության տեսքով.

1023. ա) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{3b}{a}\right):\left(\frac{18b^2}{a^2}-\frac{a^2}{2b^2}\right)$,

բ) $\left(\frac{y}{ax+ay}+\frac{3}{2x-3a}\right):\frac{4xy+6ax}{3y^2+3xy}$,

1024. ա) $\left(\frac{a^3}{4b^3}-\frac{4b^3}{a^3}\right):\left(\frac{2b}{a^2}-\frac{a}{2b^2}\right)$,

բ) $\left(\frac{3}{2x-2y}+\frac{y}{ay-ax}\right):\frac{4xy-6ax}{3xy-3y^2}$,

Ապացուցեք նույնությունը.

1025. ա) $\left(\frac{xy-4}{x^3-y^3}-\frac{1}{y-x}\right):\left(\frac{2-2y}{y^3-x^3}+\frac{1}{x^2+xy+y^2}\right)=x+y+2$,

բ) $\left(\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{b-a}{a}$,

1025. ա) $\frac{9a^2-16b^2}{9b^2-1-6ab+2a}:\frac{9a^2+16b^2-24ab}{1-2a+3b}=\frac{3a+4b}{(1-3b)(4b-3a)}$,

բ) $\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right):\left(\frac{y}{x-y}+\frac{3xy-x^2}{y^2-x^2}\right)=x-y$.

Լուծեցեք հավասարումները.

1027. ա) $\frac{2+5y}{5y-2}+\frac{25y^2}{4-25y^2}=\frac{6}{2+5y}$,

բ) $\frac{4}{3x+1}+\frac{3x+1}{1-3x}=\frac{9x^2-3}{1-9x^2}$,

1028. ա) $\frac{3}{1-2y}=\frac{2}{2y+1}-\frac{3y+8}{4y^2-1}$,

բ) $\frac{2(x-1)}{2x+1}=\frac{17+4x^2}{4x^2-1}+\frac{5}{1-2x}$.

Նախապես պարզեցնելով հետևյալ արտահայտությունները, գտեք դրանց արժեքները փոփոխականների տրված արժեքների դեպքում.

1029. ա) $\frac{5x^2-10xy+5y^2}{2x^2-2xy+2y^2}:\frac{8x-8y}{10x^3+10y^3}$, երբ $x=-3$, $y=-1$,

բ) $\frac{6a^2-6b^2}{a^2-2ab+b^2}:\frac{3b+3a}{2a^3-2b^3}$, երբ $a=2$, $b=-1$։

1030. ա) $\frac{7x^2+14xy+7y^2}{2x+2y}:\frac{7y+7x}{x^2-2xy+y^2}$, երբ $x=3$, $y=-1$,

բ) $\frac{5a^2-5b^2}{a^2+2ab+b^2}:\frac{5a^2-10ab+5b^2}{3b+3a}$, երբ $a=8$, $b=7$։

Լուծեցեք խնդիրները։

1031. ա) Կոտորակի համարիչը 23-ով փոքր է հայտարարից։ Եթե համարիչին ավելացվի 3, իսկ հայտարարից հանվի 20, ապա կստացվի 1։ Գտեք կոտորակը։

բ) Կոտորակի հայտարարը 87-ով մեծ է համարիչից։ Եթե համարիչին ավելացվի 17, իսկ հայտարարին ավելացվի 50, ապա կստացվի 0,2։ Գտեք կոտորակը։

1032. ա) Եթե փոխվի երկնիշ թվի թվանշանների տեղերը, ապա թիվը կփոքրանա 27-ով։ Գտեք տրված թիվը, եթե նրա թվանշանների գումարը հավասար է 15-ի։

բ) Տրված է մի երկնիշ թիվ, որի թվանշանների գումարը հավասար է 16-ի։ Եթե փոխվի այդ թվի թվանշանների տեղերը, ապա ստացված թիվը տրվածից մեծ կլինի 18-ով։ Գտեք ստացված թիվը։

1033. ա) Երկու խառատ, աշխատելով միասին, առաջադրանքը կատարեցին 48 ժ-ում։ Նրանցից առաջինի արտադրողականությունը կազմում էր մյուսի արտադրողականության 150 %-ը։ Առաջադրանքը կատարելու համար որքա՞ն ժամանակ կպահանջվեր յուրաքանչյուր խառատից, եթե նրանք աշխատեին առանձին։

բ) Տնաշինական կոմբինատի արտադրամասը առաջադրանքը պետք է կատարեր 30 օրում։ Օրական առաջադրանքը գերակատարելով 4 պանելով, արտադրամասի ժամկետից 4 օր շուտ առաջադրանքը գերակատարեց 12 պանելով։ Որքա՞ն էր պանել թողարկելու օրական պլանը։

1034. Կատերը մի կայանից մյուսը գնաց և վերադարձավ 5 ժ-ում։ Կատերի արագությունը կանգնած ջրում 15 կմ/ժ է, իսկ գետի հոսանքի արագությունը՝ 3 կմ/ժ։ Գտեք նավակայանների հեռավորությունը։

բ) Մարզական ինքնաթիռը, շարժվելով քամուն հակառակ, A վայրից B վայրը գնաց և անմիջապես ետ դարձավ, ամբողջ ճանապարհի վրա ծախսելով 4 ժ 20 ր։ Քամու արագությունը 20 կմ/ժ է, իսկ ինքնաթիռի սեփական արագությունը՝ 260 կմ/ժ։ Գտեք ինքնաթիռի անցած ամբողջ ճանապարհը։

1035. ա) Մեքենաներից մեկը որոշակի բեռը կարող է տեղափոխել 20 ուղերթ կատարելով, իսկ երկրորդ մեքենան՝ 30 ուղերթ կատարելով։ Քանի՞ ուղերթով կարող է տեղափոխվել ամբողջ բեռը, եթե մեքենաներն աշխատեն միաժամանակ։

բ) Առաջին կռունկը լաստանավը բարձում է 3 ժ-ում, իսկ երկրորդը՝ 24 ժ-ում։ Կռունկները քանի՞ ժամում կբարձեն լաստանավը, եթե աշխատեն միաժամանակ։

1036. ա) Տրամվայի ուղու 1 կմ-անոց հատվածը հետիոտնը անցնելով 12 ր-ում, ամեն օր հաշվում էր ետևից և դիմացից եկող տրամվայները։ Մեկ ամսվա ընթացքում նա հաշվեց ետևից եկող 45, իսկ դիմացից եկող 120 տրամվայ։ Որոշեցեք տրամվայի արագությունը։

բ) Լենինգրադից Մոսկվա մեկնեց բեռնատար գնացքը։ Մեկուկես ժամ հետո նրա ետևից մեկնեց մարդատար գնացքը, որի արագությունը բեռնատարից ավելի է 5 կմ/ժ-ով։ Իր մեկնելուց 15 ժ հետո մարդատար գնացքը ոչ միայն հասավ բեռնատարին, այլև նրանից առաջ անցավ 21 կմ-ով։ Որոշեցեք բեռնատար գնացքի արագությունը։

Լուծեցեք հավասարումների համակարգերը.

1037. ա) $\begin{cases} \dfrac{3x-5y+17}{2}-5=\dfrac{4x-7y+6}{4}, \\ 6-\dfrac{3x-y+3}{12}=\dfrac{2x+3y+2}{6}, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{3}{4a}-\dfrac{5}{6b}=-1, \\ \dfrac{1}{2a}+\dfrac{2}{3b}=3; \end{cases}$

1038. ա) $\begin{cases} \dfrac{2x-y+2}{5}+\dfrac{3x+y-1}{7}=4, \\ \dfrac{3x+2y+1}{3}-\dfrac{7x-5y+8}{4}=8, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{2}{5a}+\dfrac{5}{3b}=7, \\ \dfrac{1}{10a}-\dfrac{7}{6b}=-3; \end{cases}$

1039. ա) $\begin{cases} \dfrac{10}{5a+2b}+\dfrac{12}{3a-2b}=-2,5, \\ \dfrac{15}{5a+2b}-\dfrac{5}{3a-2b}=2, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{12}{2x+y}-\dfrac{51}{3x+4y}=1, \\ \dfrac{15}{2x+y}-\dfrac{17}{3x+4y}=4, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \dfrac{8}{2x+5y}-\dfrac{7}{4x-5y}=-3, \\ \dfrac{4}{2x+5y}+\dfrac{3}{4x-5y}=5, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{7}{2a-4b}+\dfrac{45}{3a+2b}=6{,}5, \\ \dfrac{1}{2a-4b}+\dfrac{30}{3a+2b}=2{,}5։ \end{cases}$

1040. ա) $\begin{cases} \dfrac{7}{8a-b}+\dfrac{4}{2a+b}=8, \\ \dfrac{3}{8a-b}-\dfrac{8}{2a+b}=1, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} \dfrac{18}{x-3y}+\dfrac{26}{2x+y}=8{,}5, \\ \dfrac{9}{x-3y}-\dfrac{6}{2x+y}=-0{,}5 \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \dfrac{36}{2a+b}-\dfrac{5}{a-2b}=-2, \\ \dfrac{30}{2a+b}-\dfrac{2}{a-2b}=0{,}5, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{26}{3x+2y}+\dfrac{7}{x+6y}=3, \\ \dfrac{52}{3x+2y}-\dfrac{21}{x+6y}=1։ \end{cases}$

Լուծեցեք խնդիրները.

1041. *ա) Տրված է մի կոտորակ։ Եթե նրա համարիչին ավելացվի 1, իսկ հայտարարին՝ 5, ապա կստացվի* $\frac{1}{3}$ *։ Եթե համարիչից հանվի 2, իսկ հայտարարին ավելացվի 3, ապա կստացվի 0,1։ Գտեք կոտորակը։*

բ) Տրված է մի կոտորակ։ Եթե համարիչին ավելացվի 8, իսկ հայտարարից հանվի 3, ապա կստացվի 1։ Եթե համարիչին ավելացվի հայտարարը, իսկ հայտարարին ավելացվի 23, ապա կստացվի 0,5։ Գտեք կոտորակը։

1042. *ա) Կատերը գետի հոսանքի ուղղությամբ գնաց 20 կմ, իսկ հոսանքին հակառակ՝ 40 կմ, այդ ամենի վրա ծախսելով 3 ժ 30 ր։ Մեկ ուրիշ անգամ նա հոսանքի ուղղությամբ գնաց 40 կմ, իսկ հոսանքին հակառակ՝ 20 կմ, այդ ամենի վրա ծախսելով 3 ժ 15 ր։ Գտեք գետի հոսանքի արագությունը և կատերի արագությունը կանգնած ջրում։*

բ) Մոտորանավակը գետի հոսանքի ուղղությամբ 45 կմ և հոսանքին հակառակ 27 կմ անցնում է 6 ժ-ում։ Նույն այդ նավակը հոսանքին հակառակ 36 կմ և հոսանքի ուղղությամբ 15 կմ անցնում է 5 ժ-ում։ Գտեք նավակի արագությունը կանգնած ջրում և գետի հոսանքի արագությունը։

1043. *ա) Եռանիշ թվի միջնեղի թվանշանը զրո է, իսկ թվանշանների գումարը հավասար է 9-ի։ Եթե փոխվի առաջին և վերջին թվանշանների տեղերը, ապա նոր թիվը 99-ով մեծ կլինի տրվածից։ Գտեք տրված թիվը։*

բ) Եռանիշ թվի միջնեղի թվանշանը զրո է, իսկ թվանշանների գումարը հավասար է 12-ի։ Եթե փոխվի առաջին և վերջին թվանշանների տեղերը, ապա նոր թիվը 594-ով փոքր կլինի տրվածից։ Գտեք տրված թիվը։

1044. ա) Եռանիշ թվի թվանշանների գումարը հավասար է 19-ի։ Եթե փոխենք եզրային թվանշանների տեղերը, ապա նոր թիվը 396-ով փոքր կլինի սկզբնականից։ Հարյուրավորների թվանշանը երկու անգամ մեծ է միավորների թվանշանից։ Գտեք թիվը։

բ) Եռանիշ թվի թվանշանների գումարը հավասար է 13-ի։ Եթե փոխենք եզրային թվանշանների տեղերը, ապա նոր թիվը 495-ով փոքր կլինի սկզբնականից։ Հարյուրավորների թվանշանը 3 անգամ մեծ է տասնավորների թվանշանից։ Գտեք թիվը։

1045. ա) Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկի երկարության քառակուսին հավասար է 400-ի, ներքնաձիգի և մյուս էջի երկարությունների տարբերությունը հավասար է 10-ի։ Հաշվեցեք եռանկյան կողմերի երկարությունները։

բ) Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկի երկարության քառակուսին հավասար է 121-ի, ներքնաձիգի և մյուս էջի երկարությունների գումարը նույնպես հավասար է 121-ի։ Հաշվեցեք եռանկյան կողմերի երկարությունները։

1046. ա) Վերցրին 14 սմ³ պղինձ և 12 սմ³ անագ և ստացան 212,2 գ համաձուլվածք։ Մեկ ուրիշ անգամ վերցրին 18 սմ³ պղինձ և 6 սմ³ անագ և ստացան 204 գ համաձուլվածք։ Որոշեցեք 1 սմ³ պղնձի և անագի զանգվածը։

բ) Վերցրին 15 սմ³ կապար և 28 սմ³ անագ և ստացան 373,9 գ համաձուլվածք։ Մեկ ուրիշ անգամ 12 սմ³ կապարից և 9 սմ³ անագից ստացան 201,3 գ համաձուլվածք։ Որոշեցեք 1 սմ³ կապարի և անագի զանգվածը։

Գտեք մեկ փոփոխականով երկու գծային անհավասարությունների համակարգի ամբողջ լուծումների բազմությունը.

1047. ա) $\begin{cases} \frac{2x+1}{7} < \frac{5x-3}{6} - 1, \\ \frac{3x+1}{2} - \frac{5+2x}{5} < x, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \frac{a+3}{6} < 9 - \frac{4a-1}{5}, \\ \frac{7+3a}{4} > \frac{2a-5}{9} + 6; \end{cases}$

1048. ա) $\begin{cases} \frac{7y+2}{9} > 2 - \frac{3+4y}{7}, \\ \frac{2y-3}{4} < 4 - \frac{1+4y}{5}, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \frac{11-2x}{6} > \frac{3-x}{4}, \\ \frac{2x-15}{2} + \frac{2x+3}{3} > 8,5; \end{cases}$

1049. ա) $\begin{cases} \frac{2x+1}{2} + \frac{2(7x-1)}{5} > 2, \\ \frac{2+3x}{7} > 1 - \frac{5-2x}{3}, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \frac{1+3a}{2} + \frac{3-2a}{7} < 7, \\ \frac{3a+1}{10} > 8 - \frac{9a+1}{4}, \end{cases}$

1050. ա) $\begin{cases} \frac{3-2y}{5}-\frac{2-5y}{3}\leq 5, \\ 4-\frac{1-3y}{8}<\frac{3+4y}{3}, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 6(1-x)+27>7-x, \\ \frac{2x}{3}-5<10x-2. \end{cases}$

Լուծեցեք մեկ փոփոխականով երկու գծային անհավասարությունների համակարգերը.

1051. ա) $\begin{cases} 36x-\frac{7x+9}{2}<\frac{1-2x}{7}-1, \\ \frac{3+4x}{2}-2x>5+\frac{2-3x}{2}, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} \frac{3a-17}{5}+6<\frac{1-a}{2}+\frac{4a}{3}, \\ \frac{8-a}{3}>\frac{2a-5}{2}+1, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{2+y}{15}-5y>-4y-2, \\ \frac{2y+9}{3}+3y>7y+23, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \frac{2x+17}{5}-\frac{6x-7}{4}<2, \\ 3x-\frac{3x-12}{4}>\frac{26-3x}{2}, \end{cases}$

1052. ա) $\begin{cases} \frac{a-7}{3}<\frac{a}{2}-4, \\ 3a-\frac{5}{6}<\frac{a+3}{2}+5a, \end{cases}$ գ) $\begin{cases} \frac{9x+7}{2}-36>\frac{6x+2}{7}, \\ \frac{9-2x}{3}+1<\frac{3x-2}{3}, \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{9-x}{4}-3<\frac{15-2x}{6}, \\ \frac{2}{3}+\frac{4+x}{4}<\frac{7-5x}{9}, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \frac{15y+7}{15}<\frac{1-2y}{3}+\frac{4y-5}{5}, \\ \frac{y-1}{3}-\frac{5-y}{4}>\frac{3-y}{4}. \end{cases}$

Լուծեցեք հավասարումները.

1053. ա) $\frac{x-7}{3-4x}+1=\frac{15x+24}{15+6x}$, գ) $1+\frac{4-x}{2x-5}=\frac{1-x}{12-x}$,

բ) $\frac{12-2y}{7-3y}-\frac{y+2}{3-y}=1$, դ) $\frac{3x-7}{x-3}=\frac{2}{x-3}+x.$

1054. ա) $\frac{2k-5}{3k-6}=\frac{13k-1}{2+8k}-1$, գ) $\frac{9(x+2)}{2(x-6)}=\frac{9}{2x-12}-\frac{1}{x+2}$,

բ) $\frac{4a-3}{7-a}+1=\frac{8+5a}{3a+3}$, դ) $\frac{5}{2+x}=\frac{1-2x}{x+2}-x.$

Գրաֆիկորեն լուծեցեք մեկ փոփոխականով երկրորդ աստիճանի անհավասարությունները.

1055. ա) $4x^2+7x<2$, գ) $16x^2+9>24x$,

բ) $5x-2<8x^2$, դ) $3x^2+9<4x$։

1056. ա) $2x^2-3<5x$, գ) $3x^2+7>2x$,

բ) $2x^2-3x+7<0$, դ) $10x-1<25x^2$։

Խնդիրները լուծեցեք քառակուսի հավասարումներ կազմելու միջոցով։

1057. ա) Եթե ուղղանկյուն հողամասի երկարությունը մեծացվի 17 մ-ով, լայնությունը փոքրացվի 2 մ-ով, ապա հողամասի մակերեսը կմեծանա 8 $մ^2$-ով։ Գտեք հողամասի երկարությունը և լայնությունը, եթե նրա մակերեսը հավասար է 180 $մ^2$-ու։

բ) Ըստ պլանի սովխոզը պետք է որոշակի ժամկետում ցաներ 1800 հա հացահատիկային կուլտուրաներ։ Բայց սովխոզը ամեն օր օրական պլանից ավելի էր ցանում 25 հա, ուստի և ժամկետից 4 օր շուտ սովխոզն արդեն պլանից ավելի ցանել էր 200 հա։ Սովխոզը ըստ պլանի օրական քանի՞ հեկտար պետք է ցաներ։

1058. ա) M և N վայրերից, որոնց հեռավորությունը 16 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ մեկնեցին հետիոտնը և հեծանվորդը։ Մեկ ժամ հետո նրանք հանդիպեցին։ Հանդիպումից հետո հետիոտնը N վայրը հասավ 2 ժ 40 ր ուշ, քան հեծանվորդը M վայրը։ Գտեք հետիոտնի և հեծանվորդի արագությունները։

բ) A և B քաղաքներից, որոնց հեռավորությունը 200 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ մեկնեցին ավտոբուսը և մոտոցիկլը։ Մոտոցիկլը, որ մեկնեց B քաղաքից, 2 ժ հետո հանդիպեց ավտոբուսին և A քաղաքը հասավ 1 ժ 40 ր շուտ, քան ավտոբուսը B քաղաքը։ Ի՞նչ արագություններով էին ընթանում ավտոբուսն ու մոտոցիկլը։

1059. ա) Էքսկավատորներից մեկը աշխատանքի ընթացքում հանեց 360 $մ^3$ հող, իսկ երկրորդը, որը աշխատեց 1 ժ ավելի, հանեց 165 $մ^3$ ավելի, քան առաջինը։ Քանի՞ խորանարդ մետր հող էր հանում յուրաքանչյուր էքսկավատորը 1 ժ-ում, եթե երկրորդը մեկ ժամում հանում էր 15 $մ^3$ հող ավելի, քան առաջինը։

բ) Մերենան քաղաքից կոլտնտեսություն գնաց հին ճանապարհով, որի երկարությունն է 165 կմ։ Նա ետ դարձավ նոր ճանապարհով, որը 15 կմ-ով կարճ է հին ճանապարհից, ընդ որում մեքենայի արագությունը նոր ճանապարհով 20 կմ/ժ-ով մեծ էր, քան հնով։ Մեքենայի քաղաքից կոլտնտեսություն գնալը 1 ժ-ով ավելի տևեց, քան կոլտնտեսությունից քաղաք։ Գտեք մեքենայի արագությունը հին և նոր ճանապարհներով։

1060. *ա) Նավամատույցից գետի հոսանքով դեպի ներքև շարժվեց լաստը։ 9 ժ հետո նավամատույցից նույն ուղղությամբ մեկնեց կատերը, որը լաստին հասավ նավամատույցից 20 կմ հեռավորության վրա։ Գտեք գետի հոսանքի արագությունը, եթե կատերի արագությունը կանգնած ջրում հավասար է 18 կմ/ժ-ի։*

բ) Կատերը, որի արագությունը կանգնած ջրում 15 կմ/ժ է, նավակայանից մեկնեց գետի հոսանքի ուղղությամբ և, անցնելով 36 կմ, հասավ լաստին, որը նույն նավակայանից դուրս էր եկել 10 ժ առաջ։ Գտեք գետի հոսանքի արագությունը։

1061. *ա) A և B քաղաքների հեռավորությունը 120 կմ է։ A քաղաքից B քաղաքը մեկնեց ավտոբուսը։ Քառորդ ժամ անց A քաղաքից B քաղաքը մեկնեց մարդատար մեքենան, որի միջին արագությունը ավտոբուսի արագությունից մեծ է 12 կմ/ժ-ով։ Մարդատար մեքենան B քաղաքը հասավ ավտոբուսից 5 ր շուտ։ Գտեք ավտոբուսի և մարդատար մեքենայի արագությունները։*

բ) A նավակայանից դեպի B նավակայանը մեկնեց կատերը։ 40 ր հետո նույն այդ A նավակայանից նույն ուղղությամբ մեկնեց մոտորանավակը, որի արագությունը 6 կմ/ժ-ով մեծ է կատերի արագությունից։ Մոտորանավակը B նավակայան հասավ 10 ր ուշ, քան կատերը։ Նավակայանների հեռավորությունը 90 կմ է։ Գտեք կատերի և մոտորանավակի արագությունները։

1062. *ա) Ժամը 7-ին նավակայանից գետով դեպի վեր շարժվեց մոտորանավակը։ Անցնելով 10 կմ, նա ետ դարձավ և նավակայան հասավ ժամը 9 անց 5 ր-ին։ Գետի հոսանքի արագությունը 2 կմ/ժ է։ Որոշեցեք մոտորանավակի արագությունը կանգնած ջրում։*

բ) Տուրիստը լաստով գետի հոսանքի ուղղությամբ գնալով 12 կմ, ետ դարձավ նավակով, որի արագությունը կանգնած ջրում 5 կմ/ժ է։ Գտեք գետի հոսանքի արագությունը, եթե հայտնի է, որ տուրիստի ամբողջ ճանապարհորդությունը տևեց 10 ժ։

Լուծեցեք երկու փոփոխականով հավասարումների համակարգերը․

1063. $\begin{cases} x+2y=12, \\ 2x^2+y^2=33; \end{cases}$

1064. $\begin{cases} 3a-2b=4, \\ 5a^2-2b^2-7b=5; \end{cases}$

1065. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{y+1}{y+4}+\dfrac{5x-13}{(x-1)(y+4)}=0, \\ 4x-3y=16; \end{cases}$

1066. $\begin{cases} \dfrac{a+2}{2-b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{9b-3}{a(b-2)}, \\ 3a-2b=17 ։ \end{cases}$

1067. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+4} - \dfrac{y-1}{y+2} + \dfrac{5x+12}{(x+4)(y+2)} = 0, \\ 4x-3y+10=0, \end{cases}$

1068. $\begin{cases} \dfrac{a+8}{5-b} - \dfrac{b-3}{a+6} = \dfrac{9b-30}{(a+6)(b-5)}. \\ 3a-2b+7=0, \end{cases}$

Լուծեցեք խնդիրները.

1069. *Երկու թվերի երկրաչափական միջինը հավասար է 16-ի, իսկ թվաբանական միջինը՝ 20-ի։ Գտեք այդ թվերը։*

1070. *Ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը հավասար է 60 սմ²-ի, իսկ ներքնաձիգի երկարությունը՝ 17 սմ-ի։ Գտեք էջերի երկարությունները։*

1071. *Ուղղանկյուն հողամասի մակերեսը հավասար է 700 մ²-ի։ Եթե ուղղանկյան կողմերից մեկի երկարությունը փոքրացնենք 8 մ-ով, իսկ մյուսինը՝ 15 մ-ով, ապա մակերեսը կփոքրանա 500 մ²-ով։ Գտեք հողամասի կողմերի երկարությունները։*

1072. *Երկու թվերի գումարը իրենց տարբերությունից մեծ է 16-ով, իսկ այդ թվերի քառակուսիների գումարը հավասար է 260-ի։ Գտեք այդ թվերը։*

1073. *Թվաբանական պրոգրեսիայի երրորդ և հինգերորդ անդամների գումարը հավասար է 76-ի, իսկ երկրորդ և յոթերորդ անդամների արտադրյալը՝ 1224-ի։ Գտեք այդ պրոգրեսիայի առաջին անդամն ու տարբերությունը։*

1074. *Երկրաչափական պրոգրեսիայի հինգերորդ և վեցերորդ անդամների գումարը հավասար է 96-ի, իսկ յոթերորդ և հինգերորդ անդամների տարբերությունը՝ նույնպես 96-ի։ Որոշեցեք պրոգրեսիայի առաջին անդամն ու հայտարարը։*

1075. *Թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին երեք անդամների գումարը հավասար է 21-ի, իսկ չորրորդ և ութերորդ անդամների գումարը՝ 30-ի։ Գտեք պրոգրեսիան։*

1076. *Գտեք թվաբանական պրոգրեսիան, եթե նրա առաջին տասներկու անդամների գումարը հավասար է 234-ի, իսկ առաջին քսան անդամների գումարը՝ 630-ի։*

1077. *Գտեք թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների թիվը և վերջին անդամը, եթե նրա առաջին անդամը հավասար է 5-ի, տարբերությունը՝ 3-ի, իսկ գումարը՝ 874-ի։*

1078. *7-ի հավասար առաջին անդամ և 3-ի հավասար հայտարար ունեցող երկրաչափական պրոգրեսիայի քանի՞ անդամ պետք է վերցնել, որպեսզի դրանց գումարը հավասար լինի 847-ի։*

Կառուցեք ֆունկցիաների գրաֆիկները։

1079. *ա)* $y=2x-6$, *բ)* $y=-3x+5$։

1080. *ա)* $y=-0{,}5x+4$, *բ)* $y=3x+2$։

1081. *ա)* $y=2x^2+x-6$, *բ)* $y=-2x^2+7x+6$։

1082. *ա)* $y=2x^2+7x+6$, *բ)* $y=-2x^2+x+6$։

1083. *ա)* $y=3x^2-7x$, *բ)* $y=-5x^2+7x$։

Լուծեցեք հավասարումը։

1084. *ա)* $5^{x+1}-\sqrt[3]{25^{2x}}=0$, *բ)* $3^{x+1}\cdot 4^{2x-1}-1728=0$։

1085. *ա)* $\sqrt[4]{27^{x+2}}-3^{2x-1}=0$, *բ)* $2^{x+2}\cdot 3^{2x-3}-864=0$,

1086. *ա)* $2^{x+2}+2^{x+4}+2^{x+5}=104$, *բ)* $3^{x+3}-3^{x+2}-3^{x+1}=5$,

Լուծեցեք անհավասարությունը։

1087. *ա)* $7^{2x+3}-7^{x+1}<0$, *բ)* $4^{5-x}-4^{5x-7}>0$։

1088. *ա)* $12^{3x-5}-12^{5x+3}>0$, *բ)* $5^{2x+7}-5<0$։

1089. *ա)* $14^{7x+2}-14^{3x-6}<0$, *բ)* $3^{4x-9}-3>0$։

1090. *ա)* $2^{x^2+2x-12}>8$, *բ)* $5^{x^2+2x-12}<125$։

1091. *ա)* $3^{x^2+5x-11}<27$, *բ)* $2^{x^2-3x-5}>32$։

Լուծեցեք հավասարումը կամ անհավասարությունը։

1092. *ա)* $\frac{\lg x+2}{4}+\frac{7+4\lg x}{5}=4$, *բ)* $\frac{3+\lg x}{7}-\frac{2\lg x-7}{2}=\frac{1}{2}$,

1093. *ա)* $\frac{3+4\lg x}{3}-\frac{2\lg x-1}{5}=4$, *բ)* $\frac{5\lg x-4}{6}+\frac{4\lg x+1}{9}=2$։

1094. *ա)* $\lg(x+12)\geq\lg(4x+3)$, *բ)* $\lg(x-18)<\lg(9x+2)$։

1095. *ա)* $\lg(5x+7)\leq\lg(9x+3)$, *բ)* $\lg(5x-2)<\lg(2x+10)$;

Կառուցեք ֆունկցիաների գրաֆիկները։

1096. *ա)* $y=\frac{6}{x}$, *բ)* $y=\frac{4}{|x|}$,

1097. ա) $y=-\frac{4}{x}$,   բ) $y=-\frac{6}{|x|}$։

1098. ա) $y=\sqrt{x}$,   բ) $y=\sqrt{-x}$։

1099. ա) $y=-\sqrt{x}$,   բ) $y=-\sqrt{-x}$։

1100. ա) $y=\sqrt{x-2}$,   բ) $y=\sqrt{4-x}$։

1101. ա) $y=\sqrt{x+5}$,   բ) $y=\sqrt{-x-3}$։

1102. ա) $y=2^x$,   բ) $y=2|x|$։

1103. ա) $y=2^{-x}$,   բ) $y=2^{-|x|}$,

1104. ա) $y=\lg x$,   բ) $y=\lg(-x)$։

1105. ա) $y=-\lg x$,   բ) $y=-\lg(-x)$։

1106. ա) $y=\lg(x-5)$,   բ) $y=\lg(4-x)$։

Հանրագումարային ինքնուրույն աշխատանքներ[1]

Տարբերակ 1.

1. Հաշվեցեք.

$$\left(2{,}4\cdot0{,}5-2:\frac{1}{2}\right):0{,}1։$$

2. Լուծեցեք անհավասարությունը.

$$\lg x<1։$$

3. Հավասարումը լուծեցեք գրաֆիկորեն.

$$x^2=x+2։$$

4. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

$$\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{m}:\frac{1}{m^2}\right)\cdot\frac{m}{m^2-4}:$$

5. Հեծանվորդը A-ից B գնաց որոշ արագությամբ և ետ դարձավ 5 կմ/ժ-ով փոքր արագությամբ։ A-ից B ճանապարհը 15 կմ է։ Հեծանվոր-

[1] Որպես հանրագումարային ինքնուրույն աշխատանքներ տրված են գրքույկներում 1977—79 թթ. առաջարկված քննական աշխատանքները։

ըը ամբողջ ճանապարհի վրա ծախսեց $2\frac{1}{2}$ ժ։ Հեծանվորդը ի՞նչ արագությամբ գնաց A-ից B։

Տ ա ր բ ե ր ա կ 2.

1. Հաշվեցեք.

$$0,27+0,03\cdot\left(2-15\frac{1}{3}\right)։$$

2. Լուծեցեք անհավասարությունը.

$$(3-2x)(5+3x)<0։$$

3. Հավասարումների համակարգը լուծեցեք գրաֆիկորեն.

$$\begin{cases} x^2+y^2=49, \\ y=0,4x+3։ \end{cases}$$

4. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

$$\left(\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}\right):\left(\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2-2x}\right)։$$

5. Հեծանվորդը 24 կմ-ը անցավ 1 ժ 30 ր-ում։ Առաջին 18 կմ-ը նա անցավ մի արագությամբ, իսկ մնացած հեռավորությունը՝ սկզբնականից 6 կմ/ժ-ով փոքր արագությամբ։ Հեծանվորդն ի՞նչ արագությամբ անցավ ճանապարհի վերջին հատվածը։

Տ ա ր բ ե ր ա կ 3.

1. Գտեք արտահայտության արժեքը.

$$0,3-4,2:\left(2,25-1\frac{7}{8}\cdot 3\frac{1}{3}\right)։$$

2. (z_n) Թվաբանական պրոգրեսիայում (z_n) $z_3=-1,5$; $z_8=2\frac{1}{4}$։ Գտեք այդ պրոգրեսիայի առաջին տասը անդամների գումարը։

3. Հավասարումը լուծեցեք գրաֆիկորեն.

$$1-5x=\left(\frac{1}{3}\right)^x։$$

4. Գտեք անհավասարությունների համակարգի ամբողջ լուծումները.

$$\begin{cases} x(1+x)\leq 2+x^2, \\ 2x^2-1<(x+2)(2x+3)։ \end{cases}$$

5. Երկու խանութներին բեռներ հասցնելու համար օգտագործվում են երկու մեքենաներ, որոնց բեռնատարողությունները տարբերվում են 1 տ-ով։ Յուրաքանչյուր մեքենա մատակարարում է մեկ խանութի։ Խանութներ պետք է հասցնել 60 տ բեռ։ Քանի՞ ուղերթ կատարեց յուրաքանչյուր մեքենան և որքա՞ն է դրանց բեռնատարողությունը, եթե մեքենաներից մեկը կատարել է 10 ուղերթ ավելի, քան մյուսը։

Տ ա ր բ ե ր ա կ 4.

1. Գտեք արտահայտության արժեքը.

$$1\frac{5}{36}+0{,}07:(0{,}85\cdot 0{,}4-0{,}4)։$$

2. (C_n) թվաբանական պրոգրեսիայում $c_2=-2$, $d=3$։ Գտեք պրոգրեսիայի առաջին անդամը և առաջին վեց անդամների գումարը։

3. $2^x=x^2$ հավասարումը լուծեցեք գրաֆիկորեն, որպես մասշտաբի միավոր ընդունելով 2 սմ-ը (կամ 4 վանդակը)։

4. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

$$\left(\frac{2}{4-4b+b^2}-\frac{1}{2-b}\right):\left(\frac{2}{b^2-4}+\frac{1}{b+2}\right)։$$

5. Միանման դետալներ դրոշմելու համար հատկացվել է երկու հաստոց-ավտոմատ։ Առաջին ավտոմատը պատրաստեց 160 դետալ։ Երկրորդը, որ մեկ ժամում 3 դետալ քիչ է պատրաստում, քան առաջինը, առաջինից ավելի աշխատեց 6 ժ և պատրաստեց 120 դետալ։ Ժամում քանի՞ դետալ էր պատրաստում առաջին հաստոցը։

Տ ա ր բ ե ր ա կ 5.

1. Գտեք արտահայտության արժեքը.

$$(0{,}6\cdot 2{,}5-2{,}5):0{,}8+1\frac{3}{16}։$$

2. (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայում $a_2=-3$, $a_3=1$։ Գտեք պրոգրեսիայի առաջին անդամը և առաջին ութ անդամների գումարը։

3. $2^x=x+2$ հավասարումը լուծեցեք գրաֆիկորեն, որպես մասշտաբի միավոր ընդունելով 2 սմ-ը (կամ 4 վանդակը)։

4. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

$$\left(a^2-\frac{1+a^4}{a^2+1}\right):\frac{1-a}{1+a^2},$$

5. Հանդիսասրահն ունի 340 տեղ։ Եթե շարքերի քանակը ավելացվի 2-ով, իսկ տեղերի քանակը յուրաքանչյուր շարքում պակասեցվի 4-ով, ապա սրահը կունենա 360 տեղ։ Քանի՞ շարք կա սրահում։

Տարբերակ 6.

1. Գտեք արտահայտության արժեքը.

$$0{,}4+0{,}6\cdot\left(\frac{1}{6}:2-3\right)։$$

2. Կոորդինատային հարթության վրա գծապատման միջոցով ցույց տվեք այն կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են անհավասարությունների հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases} y \quad x+3, \\ y\leq 3-x։ \end{cases}$$

Գտեք այս համակարգի երեք լուծում։

3. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

$$\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)-(x-y)։$$

4. Լուծեցեք հավասարումը.

$$\frac{2x^2+4x-6}{x-1}=0։$$

5. Ուղղանկյան մի կողմը հավասար է 4 մ-ի, իսկ անկյունագիծը $1\frac{2}{3}$ անգամ մեծ է մյուս կողմից։ Գտեք ուղղանկյան մակերեսը։

Տարբերակ 7.

1. Գտեք արտահայտության արժեքը.

$$0{,}4+0{,}2\cdot\left(2-4:\frac{3}{4}\right)։$$

2. x-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում $\lg(2-3x)$ արտահայտությունն իմաստ ունի։ Ասացեք x-ի երեք արժեքներ, որոնց դեպքում արտահայտությունն իմաստ ունի։

3. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

$$\left(\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a^2-a}\right):a^{-1},$$

4. Լուծեցեք հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} x+y=-1, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \end{cases}$$

5. Քանի որ A կայարանում գնացքը հարկադրված եղավ 5 ր ավելի սպասել, ուստի որպեսզի B կայարանը հասնի ժամանակին, նա սկսեց գնալ նախատեսվածից $1\frac{1}{9}$ անգամ մեծ արագությամբ։ Ի՞նչ արագությամբ էր գնում գնացքը, եթե $|AB|=60$ կմ։

Տարբերակ 8.

1. Գտեք արտահայտության արժեքը.

$$(0,25 \cdot 0,2-0,1):0,5+\frac{1}{6},$$

2. Լուծեցեք հավասարումը։

$$3^{2,1-0,5x}=9,$$

3. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

$$\left(\frac{a}{3a-9}+\frac{1}{6}\right):\left(\frac{2}{(a-3)^2}+\frac{1}{a-3}\right),$$

4. Կառուցեք 5 անդամ ունեցող (b_n) հաջորդականության գրաֆիկը, եթե $b_1=-4$, $b_{n+1}=b_n+3$։

5. Երկու հետիոտներ միաժամանակ դուրս եկան գյուղից և ուղևորվեցին դեպի կայարան։ Առաջինը գնում էր խճուղով, իսկ երկրորդը արահետով, 1 ժ-ում 1 կմ ավելի անցնելով, քան առաջինը։ Գյուղից կայարան հեռավորությունը արահետով 5 կմ է, իսկ խճուղով՝ 8 կմ։ Գտեք հետիոտներից մեկի արագությունը, եթե երկրորդը կայարան հասավ առաջինից 1 ժ շուտ։

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

Գլուխ I

1. 35. 2. 802. 3. 0. 4. 14. 5. 50. 6. 6355. 9. ա) մեծ է. 10. ա) փոքր է, բ) հավասար է. 11. ա), բ) — ճշմարիտ են. 12. բ), դ) — ճշմարիտ են. 15. ա), գ) — կեղծ են. 16. բ), դ) — կեղծ են. 35. 15,3. 33. 0,094. 38. 3,03. 39. ա) 362,813, բ) 5,002. 40. ա) 2,04, բ) 0,101. 41. ա) 145,314, բ) 36,6. 42. ա) 27,72, բ) 0,0724. 43. 3,01. 44. 3,35. 48. ա) {0,36}. 49. 0. 50. $13\frac{61}{90}$.

51. 0,4. 52. 0. 53. ա) $\left\{6\frac{37}{40}\right\}$, բ) $\left\{1\frac{2}{45}\right\}$; 54. ա) $\left\{10\frac{37}{88}\right\}$, բ) $\left\{6\frac{11}{12}\right\}$. 55. $\frac{2}{3}$.

56. $4\frac{1}{6}$. 57. ա) $\left\{\frac{7}{8}\right\}$, բ) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$. 58. ա) $\left\{5\frac{25}{44}\right\}$, բ) $\left\{\frac{3}{11}\right\}$. 59. 5,6. 60. $\frac{7}{9}$.

62. 15,6. 63. $3\frac{53}{90}$. 64. 62 կմ. 65. 160, 200 կմ. 74. 162 հա. 75. 208 կմ. 80. 10000. 81. 80 կմ. 84. 35%-ով. 85. 15%-ով. 88. 30%. 89. 40%. 90. 31; 248. 91. 40,5; 30. 92. 1764-ով. 93. 20%-ով, 25%-ով. 94. 225; 300 մմ. 95. 236; 200 մմ. 96. 168,3 կգ. 97. 25.

Գլուխ II

101. 1053; 1165 մ. 104. 9,9 մմ. 105. 14,63 սմ (146,3°). 120. ա) −4, բ) 11. 121. ա) −1; բ) −2,15. 122. ա) $-\frac{14}{15}$, բ) $-2\frac{19}{21}$. 123. ա) 1,09, բ) −3,4. 149. ա) A(2; 4), K(−4; 7), F(−3; −1), C(5; −3), M(0; 6), S(6; 0), L(6; 6), I(−6; −5); բ) B(4; 3), Q(−6; 1), E(−1; −4), D(3; −2), G(−5; 0), N(0; −5), H(−2; 5), P(1; −5). 159. ա)]−6; 5[, [−4; 4], բ)]−5; 3], [−3; 2[, դ)]−4; −2] ∪ [2; 5[, ∅. 160. ա) [−7; 4[, [−5; 3[, բ)]−6; 2],]−4; 1], դ) [−5; −3[∪]1; 4], ∅. 162. $A\subset Z$, $B\subset Z$, $C\subset N\subset Z$. 164. $A\subset Z$, $D\subset Z$, $B\subset N\subset Z$.

Գլուխ III

165. ա) 19, բ) 29. 166. ա) −1, բ) 7. 167. ա) 7; բ) 37. 168. ա) 1, բ) իմաստ չունի. 169. ա) 2, բ) իմաստ չունի. 170. ա) 180 մ, բ) 106 սմ, 690 սմ². 175. ա) $\frac{k-m}{m+8}$. 176. ա) $(a-b)(c+6)$, բ) $\frac{2a+b}{c-2}$. 177. ա) 2660, բ) 3000. 178. ա) 4մ

48 ր, բ) 2 ժ 24 ր. 183. բ) 11,6, գ) 1800. 184. ա) —72, բ) 101. 186. ա) 2a—3b; 187. ա) x—2y; 189. ա) 324, բ) 6,23. 190. ա) 0,861, բ) 394. 191. ա) 9630 բ) 12,5. 192. ա) 4510, բ) 1,108. 205. ա) {—1} բ) {2}. 206. ա)]—∞; +∞[, բ) ∅. 207. 0,535; 0,107. 208. 4,25; 29,75. 209. 230,4. 128. 210. 207; 36,5. 211. 15,3; 12,6 կմ. 212. 3 ժ. 213. 63°; 69°; 48°. 214. 31 ժ. 215. 72 կմ. 216. 42.

Գլուխ IV

217. 0,72. 1,52. 218. 0,53; 1,03. 219. 0,85. 0,90. 220. 13,74; 13,72. 13,91. 223. ա) 175, բ) 160. 224. ա) 7, բ) 36 225. ա) 7, բ) 44. 226. ա) $10\frac{2}{3}$, բ) 19,6.

227. ա) $4\frac{7}{8}$, բ) $2\frac{1}{3}$. 228. ա) {2,25}, բ) $\left\{\frac{9}{16}\right\}$. 229. ա) {0,2}, բ) {40}.

232. 150; 312; 265 կմ. 233. 54; 104; 76 սմ². 234. 3 ժ 20 ր. 235. 38. 236. 86,4 կգ. 237. 145 կգ. 238. ա) 136,5. 81,9. բ) 75,6; 100,8; 126. 239. ա) 60,4; 211,4. բ) 42,4. 148,4; 84,8. 240. 1,2. 2,4 կգ. 241. 1,8. 1,2 կգ. 242. 14; 112. 28 կգ. 243. 12; 42. 244. 27; 6. 245. 2,4; 4. 6 ժ. 246. 180. 192. 144. 219. 2ժ. 250. 30. 251. 14 կմ/ժ. 252. 90 ժ. 253. 56. 254. 57. 255. 240. 256. 96.

Գլուխ VI

267. ա) 0,05. 0,78%; բ) 0,05. 0,77%. 268. 0,08; 1,11%. 0,02; 0,27%. 279. ա) 18,70; բ) 33,4; գ) 3574,74. դ) 16,49. 280. ա) 25,4; բ) 53,9. գ) 13,93; դ) 16,39. 281. ա) 4,3; բ) 52,5; գ) 24,1. դ) 4,04. 282. ա) 3,40; բ) 0,9; գ) 165; դ) 8,31. 288. ա) 450; բ) 344; գ) 31,4. դ) 515. 289. ա) 8,05 բ) 925; գ) 150; դ) 2,6. 290. ա) 59,5. բ) 3,96. գ) 9,15; դ) 6. 291. ա) 62,5. բ) 58,0 գ) 0,5. դ) 15.

Գլուխ VII

298. ա) {2}; բ) {—1}; գ) {—2}. դ) {1}. 299. ա) {0} բ) {—5}; գ) {—3}. դ) {4}. 300. ա) {3}; բ) {25}; գ) {15}; դ) {7}. 301. ա) {2}; բ) {2}. 302. ա) {10}; բ) {3}. 303. ա) 3; բ) —5; գ) —2; դ) 11. 304. ա) —3; բ) 12. դ) 8. 305. ա) 0; բ) 20; գ) 5; 306. 940; 235. 307. 18,63. 12,42. 308. 32,58. 38,01. 309. 129,5; 92,5. 311. 2224; 1390. 312. 2,4. 1,95 ժ. 313. 12,96; 3,24. 314. 162; 54. 324 ժ. 315. 60°; 20°; 160°; 120°; 316. 229, 252, 188 սմ. 317. 476; 563 582. 318. ա) {3}; բ) {—2}. 319. ա) {—1}; բ) {0}. 320. ա) {4}; բ) {15}. 321. ա) {8}; բ) $\left\{5\frac{1}{3}\right\}$. 322. ա) {0}. բ) {35}. 323. ա) {5}. բ) {19}. 325. 195. 297. 326. 7052; 2000 ա. 327. 60 կմ. 328. 180 կմ. 329. 100 կմ. 330. 192 կմ. 331. 360 կմ. 332. 50 կմ/ժ. 75 կմ. 333. 5 օր. 334. 42; 46 կմ/ժ. 335. 2ժ 24 ր. 336. 15 ր. 337. 8 օր. 338. 50; 75. 339. 9; 7. 340. 21 ժ.

Գլուխ VIII

359. ա) $10a^4b^5$. 360. բ) $-3p^{20}q^{18}$. 361. ա) $5a^9b^4$. 362. բ) $4p^{16}q^{18}$. 363. ա) $-3xy$. բ) 0. 364. ա) $-x$. բ) 0. 365. ա) 240. բ) 65. 366. ա) 30. բ) 204. 367. ա) —10. 373. ա) {—4}. բ) {3}. 374. ա) {6}. բ) {8}. 375. բ) {7,75}. 376. ա) {3,36}. բ) {0,5}. 381. 87°, 69°, 24°. 382. 142; 180; 97 սմ. 383. 66; 85; 53. 132 սմ. 384. 32°, 96°, 135°, 97°. 385. 67,3. 25,7; 99,1; 269,2. 386. 40,25;

120. 75. 97,45. 16,75։ 387. 1, 3; 9, 27։ 388. 27, 9, 3, 1։ 389. 105, 21, 78, 138, 120, 75, 97,45, 16,75։ 392. 37; 222, 305; 208 մ։ 397. ա) {8}, բ) {−5}, գ) {1}; 391. 84; 21, 67; 102 մ։ 398. ա) {−2}, բ) {−2}, գ) {3}, դ) {5}։ 401. ա) {3}, բ) {−5}, գ) {−2}, դ) {−10}, գ) {18}։ 402. ա) {−10}, բ) {−2}, գ) {6}, դ) {3}։ 403. ա) {0}, դ) {−10}, գ)]−∞; +∞[, դ) {−5}։ 408. ա) $27x^3+125$, 409. բ) $125p^3-216$, 412. բ) ∅, գ) $0,008x^3+0,001$, 413. ա) $0,064-0,027a^3$, 416. ա) {7}, բ) {−9}, գ) {2,5}, դ) {3}։ 417. ա) {12}, բ) {−10}, գ) {−7}, դ) {4}։ 418. ա) {−1}, բ) {0}, գ) {1,5}։ 439. բ) ∅։ 440. բ) ∅։ 452. ա) {1}։ 473. բ) $(1-5p)(2q+1)$, 474. բ) $(x+7)(y-3)$։ 498. ա) ±5, բ) 36։ 499. ա) ±10, բ) ±3։

Գլուխ IX

524. բ) $a+b$, գ) $a-b$։ 533. ա) $(a-b)^2$; բ) a^2-b^2։ 534. ա) $(x+y)^2$, բ) x^3-y^3, 535. ա) -1, գ) $3(x-y)^2$։ 536. բ) $-\frac{2}{3}$, գ) $3(a-b)$։ 537. բ) $-\frac{y^2}{x(2x+y)}$, 538. ա) $3a(a-b)$։ 539. ա) $\frac{4y}{x-1}$, 540. գ) $\frac{a^2}{x^2}$, 564. ա) $\frac{2a+3b}{b}$, գ) 1։ 565. ա) $\frac{3a^2-4b^2}{ab}$, գ) 1։ 566. ա) $\frac{14a+23}{60}$, գ) 0։ 573. ա) $\frac{9x}{x-y}$, բ) 1։ 574. ա) 1, բ) 0։ 577. ա) $\frac{2y}{x^2-y^2}$, գ) $\frac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4}$։ 578. բ) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, գ) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$, 581. ա) $\frac{2y-3}{(y^2-1)(2y+3)}$, բ) $\frac{a-2}{a(a-3b)}$, 582. բ) $\frac{1}{a}$, 583. ա) 1։ 584. ա) $\frac{18x^2}{27x^3-8y^3}$, 585. բ) $\frac{c}{a}$, 586. գ) $\frac{b}{b-a}$, 587. ա) $\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^4}$, գ) $\frac{a^2+25}{10a}$, 588. բ) a, 589. բ) 5։ 590. բ) $-\frac{a+4}{a+3}$, 593. բ) −1, գ) $\frac{1-y}{x}$, 594. ա) −7։ 595. գ) 2a−1, դ) $\frac{x-y}{4y}$, 596. բ) $\frac{7c^5}{6(a+b)}$, գ) 2k−4, դ) 0,5։ 605. ա) {1}, բ) {7}։ 606. ա) {5}, բ) {10}։ 607. ա) {10}։ 608. ա) {0}։ 611. ա) {−1,25}։ 612. ա) {1}, բ) {2}։ 613. ա) {1}, բ) {0}։ 614. ա) {−0,25}։ 615. ա) {2}, բ) {2}։ 616. ա) {2}, բ) {8}։ 617. $\frac{2}{7}$։ 618. 2 ժ 55 ր։ 619. 8 ժ 24 ր։ 621. 50, 80 կմ/ժ։ 622. 20 մ³։

Գլուխ X

625. ա) {(2; 8)}, բ) {(0, −2)}, գ) ∅, դ) {(−2; 3)}։ 626. ա) {(1; 2)}, բ) {(4 8)}, գ) {(0; 3)}, դ) ∅։ 627. ա) {(−3; −1)}, բ) {(3; −4)}, գ) {(−5; 0)}, դ) անվերջ բազմություն լուծումներ. {(x, y) | x-ը ցանկացած թիվ է, $y=\frac{1}{3}(2x-5)$}։ 628. ա) {(4; 0)}, բ) {(x, y) | x-ը ցանկացած թիվ է, $y=\frac{1}{5}(3x-7)$}, դ) {(−5; 2)}, դ) {(4; −5)}։ 629. գ) {(64; 56)}, դ) {(−2; −3)}։ 630. ա) {(x, y) | x-ը ցանկացած թիվ է, $y=\frac{2}{3}(2-x)$}, բ) {(0,5; 3)}, գ) {(16; 7)}, դ) {(−3; 5)}։ 631. ա) {(2; 2,5)}, բ) {(2; 3)}, գ) {(1; −3)}, դ) ∅։ 632. ա) {(−1; 2)}, բ) ∅, գ) {(2; 3)}։ 633. ա) {(21; 16)}, բ) {(5; −2)}, գ) {(6; 5)}, դ) {(11; 3)}։ 634. ա) {(140; 50)}, բ) {(39; 13)}, գ) {(38,4; 57,6)}, դ) {(1 2;

6,5)}, 635. ա) {(30, 52)}, դ) ∅; 636. ա) {(7; −3)}, գ) ∅, դ) {(1; 3)}; 637.
ա) {(12; 12)}, դ) {(9; 14)}; 638. ա) {(9; 8)}, բ) {(10; 5)}, գ) {(4; 3)}, դ) {(5.
17)}, 639. ա) {(18, 6)}, դ) {(4; 5)}; 640. բ) {(12, 6)}, դ) {(3; 2)}; 641.
ա) {(3; 1)}, դ) {(5; 2)}; 642. ա) $\{(a, b)|a=2+\frac{3}{8}b,\ b\neq-8,\ b\neq0\}$, բ) {(4;
16)}, դ) {(4; 5)}; 643. ա) {(3; 2)}, բ) {(7; 9)}; 644. ա) {(8,25; 8,375)};
բ) {(21; 20)}; 645. ա) {(2; 0,1)}, դ) {(8; 12)}, դ) {(−2, 5)}; 646. ա) {(2; 3)},
բ) {(0,1; 7)}, դ) {(12; 10)}; 647. 59; 8; 648. 32; 18; 651. 13, 11; 652. 175;
90 կմ/ժ, 653. 96°, 68°. 654. 6; 2 կմ/ժ; 655. 4 բանվոր, 6 օրվա; 656. 53; 657. 80,
48 կ; 659. 8,5; 10,5 գ/սմ³; 660. 2,4; 2,7 գ/սմ³; 661. 24; 6 կմ; 662. 36 կմ/ժ, 5 ժ,
663. 143; 217; 664. 56; 42ժ; 665. 60, 40 ամ; 666. 12; 7 ժ;

Գլուխ XI

693. ա)]13; ∞[; 701. ա)]−∞; −3[, բ)]3; 19[, գ) ∅; 702. ա) [1; 4],
բ) $\left]\frac{3}{2};\ \infty\right[$; դ) ∅; 703. ա)]0,5; ∞[, բ) [1; 1,5[, գ)]5; 27[, դ)]−∞; −1],
704. ա)]−∞; 6[, բ)]−∞; −6[, գ)]−∞; −3], դ)]4,4; ∞[; 705. ա) {−1;
0, 1; 2}, բ) ∅, գ) {y|y ∈ N, y>2}, դ) {2; 3}; 706. ա) {1}, բ) {2; 3},
գ) {6; 7}, դ) N; 707. բ)]−4,5; 0,25[, գ) [−2,5; 3,5[, դ)]−∞; −4,2] ∪]−
−4; ∞[; 708. ա)]−∞; −0,4[∪ [3; ∞[, դ) [−0,5; 2[; 711. ա) [−10; 4],
բ)]−∞; −17[∪]−1; ∞[, դ)]−∞; −10] ∪ [6; ∞[, դ)]−14; −12[; 712. ա)]−
−∞; −8]∪[−6; ∞[, բ)]−16; 6[, դ) [−14; −12], դ) [−11; −3]; 713. ա)]9;
25[, բ)]−∞; 12] ∪ [16; ∞[; 714. ա)]−∞; 8[∪]18; ∞[, բ) [−6; 18]; 717.
ա) y=2x+3 ուղղից վեր գտնվող բաց կիսահարթություն, գ) y=−3x−2 ուղղից ներքև գտնվող կիսահարթություն; 718. ա) y=2,5x+3,5 ուղղից ներքև գտնվող բաց կիսահարթություն, բ) y=−5,2x−4,4 ուղղից վեր գտնվող կիսահարթություն;

Գլուխ XII

735. ա) $\sqrt[4]{5^3}$; դ) $\sqrt[7]{6^5}$, ե) $\sqrt[5]{9}$; 736. բ) $\sqrt[7]{5^4}$, դ) $\sqrt[7]{14^3}$, ե) $\sqrt[5]{9}$, դ) արտահայտությունն իմաստ չունի; 737. ա) $\sqrt[24]{3^3\cdot5^4}$, դ) $\sqrt[15]{2^7}$, դ) $\sqrt[75]{2^7\cdot3^2}$, 738.
ա) $\sqrt[30]{2^5\cdot3^2}$, բ) $\sqrt[12]{2^2\cdot5^3}$, դ) $\sqrt[30]{2^{13}}$, դ) $\sqrt[30]{5^3\cdot6}$, 739. ա) $7\sqrt[4]{7^3}$
բ) $36\sqrt[5]{6^3}$, դ) $7\sqrt[4]{7}$; 741. բ) $b^2\sqrt[3]{3a^2}$, դ) $35p^{10}q^{15}$, 742. ա) $\sqrt[7]{a^3}$, բ) $\sqrt[10]{a}$,
դ) $a\sqrt[12]{a^{11}}$, 756. ա) 12,5 սմ, բ) 13,8 սմ,

Գլուխ XIII

776. ա) {0; 3}, բ) {0; 5}, դ) {−3; 3}, դ) ∅; 778. ա) ∅, բ) {0; 2},
դ) {0; 4}, դ) $\{-2\sqrt{5};\ 2\sqrt{5}\}$, 782. ա) {2; 3}, բ) {−1; 5}, դ) {−2; −7},
դ) {6; 8}, 783. ա) {−1; 4}, բ) {3, 11}, դ) {−1; −10}, դ) {−2; 3}; 789.
բ) $\left\{-\frac{2}{3};\ 3\right\}$, 790. բ) $\left\{-2;\ -\frac{8}{3}\right\}$, դ) {−3; 2}; 797. բ) 52; 2,6; 799.
ա) $\frac{y-5}{y-8}$, 805. բ) {3; 9,5}, 806. դ) {−7; 4}, 807. {3; −4,5}, 808. ա) {2; 3,5};

809. բ) $\left\{1; -\frac{13}{7}\right\}$, 810. բ) {—3. 0,8}, 813. 47 կմ/ժ, 814. 10 կմ/ժ, 815. 3 կմ/ժ, 817. 60 կմ/ժ, 818. 5; 3 կմ/ժ, 819. 50; 40 կմ/ժ, 820. 40; 60 կմ/ժ, 824. 10; 14 ժ, 825. 24; 30 ժ, 827. 8 ժ, 828. 3; 5 օր, 829. 20; 30 օր, 830. 12; 24 ժ կամ 16; 16 ժ, 831. 36; 24 սմ, 832. 4; 6 կգ, 834. 5; 7,5 ժ, 843. բ) $x \neq 3$, 844. ա)]—0,5; 3[, բ) $x \neq 2$, 847. ա)]—∞; +∞[, բ) ∅, 848. ա) ∅, բ)]—∞; — $-\frac{1}{7}$[⋃] 7; ∞[: 849. ա) {(3; —8), (8; —3)}, 850. ա) {(5; 7), (7; 5)}, 851. ա) {(9; 7), (7; 9)}, բ) {(4; —3), (17; 10)}, 853. ա) {(—5; 9), (9; —5)}, 854. բ) {(6; —2), (—2; 6)}, 858. ա) {(3; —1), (—3; —1)}, բ) {(2; 0), (3, 0)}, 859. 6; 14, 860. 8; 12 կամ —12; —8, 861. 6; 8 կամ —9; —7, 862. 5; 4; կամ —4; —5, 863. $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$, 864. 5, 12, 13 մ, 865. 11; 10 սմ, 866. 8; 15 ն.

Գլուխ XIV

888. ա) 20; 1098; բ) 153; 1323, 889. ա) 150; 1080, բ) 67, 1266, 890. ա) —7, —2220, բ) —3, 725, 891. ա) 21, —525, բ) 12; 408, գ) լուծում չունի, դ) 8; 308, 892. ա) —2; 4,25, բ) 7; 5, 893. ա) 3; 38, բ) —5, —31, 894. ա) 2; 22, բ) —10; 18, 895. ա) —17; 61, բ) 23; 58, 896. ա) 8; 23, բ) 12; 63, 897. ա) 5; 15 կամ 14, —12, բ) 10, 12 կամ 15, —8, 898. ա) 9, 15, 21; 27; 33; 39; 45; 51, բ) 97; 93; 89; 85; 81; 77; 73, 901. ա) 1820, բ) —910, 902. ա) —1820, բ) 910, 905. ա) 405; 605, բ) 2; 26,375, 906. ա) 0,25; 21,25, բ) 3; 219, 907. ա) 2; 60, բ) 0,5; 480, 908. ա) 3; 570, բ) 5; 605, 909. ա) 8; 1, բ) 3; 96, 910. ա) 8; 384, բ) 7; 5, 911. ա) 0,5; 6, բ) 2; 8, 912. ա) 5; 4, բ) 12; 3, գ) 32; 2 կամ 72, —3, 913. ա) 5; 15; 45; 135; 405 կամ 5; —15; 45; —135; 405, բ) 224; 112; 56; 28 14; 7, 914. 4, 915. 8, 916. 18; 6; 2 մ, 917. 3; 12; 48; ... կամ $\frac{63}{13}$; $-\frac{4 \cdot 63}{13}$; $\frac{16 \cdot 63}{13}$; ..., 918. 2; 14; 26; ...

Գլուխ XV

919. ե) $\sqrt{4x^5(x+y)^3}$, 920. ե) $\sqrt{25x(x-y)^5}$, 921. բ) $(x^2y^5)^{-\frac{1}{6}}$, 922. $(x^3y^4)^{\frac{1}{8}}$, 923. ա) 9, գ) 243, 924. ա) 8, դ) 8, 925. գ) $0,75a^{-2}b^5x^3y^{-5}$, 926. բ) $0,5a^7b^{-4}c^3$, 927. գ) $0,8a^{-\frac{2}{3}}b^5c^{-4}$, 929. բ) $6a^{2,5}xy^{-3}$, 930. $x^{\frac{17}{12}}y^{\frac{19}{15}}$, 931. բ) $x^{\frac{1}{12}}y^{-\frac{1}{12}}$, 932. ա) 150, բ) 3,5, 937. 10, 938. ա) 8, 939. բ) $\frac{x}{y}$, 940. ա) $\frac{2}{1-a}$, 962. ա) {1,5}, բ) {4}, 963. ա) {3}, բ) {0,5}, 964. ա) {7; 8}, բ) {3, 4}, 965. ա) {—2}, բ) {—5}, 967. ա) {2}, բ) {7}, 969. ա)]2; ∞[, բ)]5; ∞[, 970. ա)]—7; ∞[, բ)]—∞; —3[, 985. ե) 0,8751, գ) 2,6811, 988. գ) 2,9912, ե) 0,7993, 999. ա) {10}, դ) {2}, 1000. բ) {0,01}, գ) {0,1; 100}, 1001. ա) {2;

3}, դ) {5}, 1002. ա) {3, 4}, դ) {2}, 1003. բ)]−6, ∞[, դ)]4, 6[, 1004. ա) $\left]\frac{2}{7}, 3\right[$, դ) [−3, 2[, 1021. դ) 0,1890. 1022. դ) 0,01888:

Լրացուցիչ վարժություններ

1029. ա) 25, բ) 12 1030. ա) 8, բ) 3: 1031, ա) 0,77, բ) 0,13, 1033. ա) 80, 120մ; բ) 23, 1034. ա) 36 կմ, բ) 1120 կմ, 1035. ա) 12, բ) 14 ժ 24 ր, 1036. ա) 11 կմ/ժ, բ) 36 կմ/ժ: 1037. ա) {(5; 6)}: 1038. ա) {(5, 7)}, 1039. ա) {(2, 5)}, բ) {(0,5, 0,2)}, գ) {(−1; 5)}, դ) {(4; 1,5)}, 1040. ա) {(0,5, 3)}, բ) {(5; 2)}, գ) {(3; −2)}, դ) {(4; 0,5)}: 1041. ա) $\frac{3}{7}$, բ) $\frac{4}{15}$, 1043. ա) 405, բ) 903, 1044. ա) 874, բ) 742; 1045. ա) 25; 20. 15, բ) 6|; 60; 11, 1046. ա) 8,9, 7,3դ, բ) 11,3; 7,3 դ, 1047. ա) {4}, բ) {8}, 1048. ա) {2; 3}, բ) {10, 11; 12}: 1049. ա) {1; 2; 3}, բ) {4}. 1050. ա) {4}, բ) {0, 1; 2 3, 4, 5}: 1051. բ)]−∞, −6[, դ) ∅, 1052. ա)]10; ∞[, դ) ∅: 1053. դ) {−7; 1}, դ) ∅, 1054. դ) {−3, $-\frac{2}{9}$}, դ) ∅: 1055. ա)]−2, 0,25[, բ)]−∞, +∞[, դ) x≠0,75, դ) ∅: 1056. բ) ∅, դ) R, դ)]−∞, 0,2[∪[0,2, ∞[, 1057. բ) 75 հա, 1058. ա) 4, 12 կմ/ժ, բ) 40, 60 կմ/ժ: 1059. ա) 60, 75 մ³/ժ կամ 90, 105 մ³/ժ, բ) 55, 75 կմ/ժ: 1060. ա) 2 կմ/ժ, բ) 3 կմ/ժ: 1061. ա) 60, 72 կմ/ժ, դ) 30, 36 կմ/ժ: 1062. ա) 10 կմ/ժ: 1063. $\left\{(2; 5), \left(\frac{2}{3}, \frac{17}{3}\right)\right\}$: 1064. {(−1, −3,5), (−2, −5)}, 1065. $\left\{(7; 4), \left(2; -\frac{8}{3}\right)\right\}$, 1066. {(3; −4), (1; −7)}: 1067. $\left\{(2, 6), \left(-3; -\frac{2}{3}\right)\right\}$: 1068. {(−3 −1), (−5; −4)}, 1069. 8; 32, 1070. 8, 15: 1071. 28, 25 մ կամ $\frac{40}{3}$, $\frac{105}{2}$ մ: 1072. 8; 14, 1073. 8, 10 կամ 49, $-\frac{11}{3}$, 1074. 2, 2: 1075. 5, 7 9;... 1076. 3; 6; 9,...: 1077. 23, 71, 1078. 5, 1084. ա) {3}, բ) {2}, 1085. ա) {2}, բ) {3}, 1086. ա) {1}, բ) {−1}: 1088. բ)]−∞; −3[: 1091. բ)]−2; 5[: 1092. ա) {100}, բ) {10000}, 1093. ա) {1000}, բ) {100}, 1094. ա) $\left]-\frac{3}{4}; 3\right[$, բ)]18; ∞[, 1095. ա) [1; ∞[, բ) $\left]\frac{2}{5}; 4\right[$.

ԼԱՏԻՆԱԿԱՆ ԱՅԲՈՒԲԵՆ

Տպագիր		Տառի անունը	Ձեռագիր	
Մեծատառեր	Փոքրատառեր		Մեծատառեր	Փոքրատառեր
A	a	ա	A	a
B	b	բե	B	b
C	c	ցե	C	c
D	d	դե	D	d
E	e	է	E	e
F	f	էֆ	F	f
G	g	գե	G	g
H	h	հաշ	H	h
I	i	ի	I	i
J	j	յոտա (ժի)	J	j
K	k	կա	K	k
L	l	էլ	L	l
M	m	էմ	M	m

Տպագիր		Տառի անունը	Ձեռագիր	
Մեծատառեր	Փոքրատառեր		Մեծատառեր	Փոքրատառեր
N	n	էն	N	n
O	o	օ	O	o
P	p	պէ	P	p
Q	q	քյու	Q	q
R	r	էռ	R	r
S	s	էս	S	s
T	t	տէ	T	t
U	u	ու	U	u
V	v	վէ	V	v
W	w	դուբլվէ	W	w
X	x	իքս	X	x
Y	y	իփսիլոն (իգրեկ)	Y	y
Z	z	զեթ (ձետա)	Z	z

ՄԻՆՉԵՎ 1000 ՊԱՐԶ ԹՎԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿ

2	109	269	439	617	811
3	113	271	443	619	821
5	127	277	449	631	823
7	131	281	457	641	827
11	137	283	461	643	829
13	139	293	463	647	839
17	149	307	467	653	853
19	151	311	479	659	857
23	157	313	487	661	859
29	163	317	491	673	863
31	167	331	499	677	877
37	173	337	503	683	881
41	179	347	509	691	883
43	181	349	521	701	887
47	191	353	523	709	907
53	193	359	541	719	911
59	197	367	547	727	919
61	199	373	557	733	929
67	211	379	563	739	937
71	223	383	569	743	941
73	227	389	571	751	947
79	229	397	577	757	953
83	233	401	587	761	967
89	239	409	593	769	971
97	241	419	599	773	977
101	251	421	601	787	983
103	257	431	607	797	991
107	263	433	613	809	997

1-ԻՑ 10 ԲՆԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԽՈՐԱՆԱՐԴՆԵՐԻ ԵՎ 2, 3 ԵՎ 5 ԹՎԵՐԻ ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
5^n	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625

10-ԻՑ 99 ԲՆԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿ

Միավ. / Տասն.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Դ 1-ԻՑ 99 ԲՆԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿ

Միավ. / Տասն.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1,000	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,646	2,828	3,000
1	3,162	3,317	3,464	3,606	3,742	3,873	4,000	4,123	4,243	4,359
2	4,472	4,583	4,690	4,796	4,899	5,000	5,099	5,196	5,292	5,385
3	5,477	5,568	5,657	5,745	5,831	5,916	6,000	6,083	6,164	6,245
4	6,325	6,403	6,481	6,557	6,633	6,708	6,782	6,856	6,928	7,000
5	7,071	7,141	7,211	7,280	7,348	7,416	7,483	7,550	7,616	7,681
6	7,746	7,810	7,874	7,937	8,000	8,062	8,124	8,185	8,246	8,307
7	8,367	8,426	8,485	8,544	8,602	8,660	8,718	8,775	8,832	8,888
8	8,944	9,000	9,055	9,110	9,165	9,220	9,274	8,327	9,381	9,434
9	9,487	9,539	9,592	9,644	9,695	9,747	9,798	9,849	9,899	9,950

ՈՐՈՇ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՆՇԱՆՆԵՐ

$=$ — հավասար է

$\neq$ — հավասար չէ

$\approx$ — մոտավորապես հավասար է

$<$ — փոքր է (խիստ անհավասարություն)

$>$ — մեծ է (խիստ անհավասարություն)

$\leq$ — փոքր է կամ հավասար (ոչ խիստ անհավասարություն)

$\geq$ — մեծ է կամ հավասար (ոչ խիստ անհավասարություն)

$\Rightarrow$ — տրամաբանական հետևության նշան

$\Leftrightarrow$ — համարժեքության նշան

$\{a; b; \ldots\}$ — a, b, ... տարրերից կազմված բազմություն

$\varnothing$ — դատարկ բազմության նշան

$\in$ — տարրը բազմությանը պատկանելու նշան ($n \in N$)

$\notin$ — տարրը բազմությանը չպատկանելու նշան

$\subset$ — բազմությունը բազմության մեջ ընդգրկվելու նշան ($N \subset Z$)

$\cup$ — բազմությունների միավորման նշան

$\cap$ — բազմությունների հատման նշան

N — բոլոր բնական թվերի բազմությունը

Z — բոլոր ամբողջ թվերի բազմությունը

Q — բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմությունը

R — բոլոր իրական թվերի բազմությունը (թվային ուղիղը)

$[a; b]$ — a-ից b փակ միջակայք (հատված)

$]a; b[$ — a-ից b բաց միջակայք (ինտերվալ)

$]a; b]$, $[a; b[$ — կիսաբաց միջակայքեր

$]-\infty; a[$, $]a; +\infty[$ — բաց թվային ճառագայթներ

$]-\infty; a]$, $[a; +\infty[$ — թվային ճառագայթներ

$]-\infty; +\infty[$ — թվային ուղիղը (բոլոր իրական թվերի բազմությունը)

Ox — կոորդինատային ուղիղ

$M(x)$ — x կոորդինատով M կետ

Oxy — կոորդինատային հարթություն

$(a; b)$ — իրական թվերի կարգավորված զույգ. կոորդինատային հարթությանը պատկանող կետի կոորդինատներ

$A(x; y)$ — x և y կոորդինատներով M կետ

$[AB]$ — AB հատված

(AB) — AB ուղիղ

$|AB|$ — AB հատվածի երկարությունը

$\sqrt{\ }$ — թվաբանական քառակուսի արմատի նշան

$|a|$ — a թվի մոդուլը

f — ֆունկցիայի նշանակում

$f(x)$ — f ֆունկցիայի արժեքը x կետում

(a_n) — թվային հաջորդականություն

$\log_a b$ — b թվի լոգարիթմ a հիմքով

$\lg a$ — a թվի տասնորդական լոգարիթմ

$[a]$ — a թվի ամբողջ մասը

$\{a\}$ — a թվի կոտորակային մասը

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՎ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

Թվաբանական գործողությունների օրենքները

Գումարման և բազմապատկման տեղափոխական օրենքը

$$a+b=b+a, \quad ab=ba.$$

Գումարման և բազմապատկման զուգորդական օրենքը

$$a+(b+c)=(a+b)+c, \quad a(bc)=(ab)c.$$

Գումարման նկատմամբ բազմապատկման բաշխական օրենքը

$$a(b+c)=ab+bc.$$

Բազմանդամների ձևափոխությունները

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2,$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

Անհավասարություններ

$$(a>b, \quad k>0)\Longrightarrow ak>bk,$$
$$(a>b, \quad k<0)\Longrightarrow ak<bk.$$

Գումարում

$$\begin{array}{l} \quad a<x \\ +\,b<y \\ \hline a+b<x+y, \end{array}$$

Բազմապատկում

$$\begin{array}{l} \quad 0<a<x \\ \times\, 0<b<y \\ \hline 0<ab<xy, \end{array}$$

Հանում

$$\begin{array}{l} \quad a<x \\ -\,b>y \\ \hline a-b<x-y, \end{array}$$

Բաժանում

$$\begin{array}{l} 0<a<x \\ \quad b>y>0 \\ \hline 0<\frac{a}{b}<\frac{x}{y}, \end{array}$$

Արմատներ

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a, \quad a\geq 0 \quad \sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|,$$
$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}, \quad a\geq 0, \; m, n, p\in N,$$
$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}, \quad a, b>0,$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a\geq 0, \; b>0,$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}, \quad a\geq 0, \; m, n\in N,$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}, \quad a\geq 0, \; m \;\; n\in N.$$

Քառակուսի հավասարում

$$(ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0).$$

Արմատների բանաձևը.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad b^2\geq 4ac.$$

Վիետի թեորեմը.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Քառակուսի եռանդամի վերլուծումը արտադրիչների $(b^2\geq 4ac)$.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Ռացիոնալ ցուցիչով աստիճան

Սահմանումները.

$$a^n=\underbrace{aa\ldots a}_{n\ \text{արտադրիչ}}, \quad n\in N, \quad n\neq 1;$$

$$a^1=a,$$

$$a^0=1, \quad a\neq 0,$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, \quad a\neq 0, \quad n\in N,$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}, \quad a>0, \quad m\in Z, \quad n\in N.$$

Աստիճանների հատկությունները.

$$a^m a^n=a^{m+n},$$

$$a^m:a^n=a^{m-n}, \quad a\neq 0,$$

$$(a^m)^n=a^{mn},$$

$$(ab)^n=a^n b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}, \quad b\neq 0.$$

Թվաբանական պրոգրեսիա

$$a_n=a_1+d(n-1),$$

$$s_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n; \qquad s_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n.$$

Երկրաչափական պրոգրեսիա

$$b_n=b_1q^{n-1}, \quad b_1\neq 0, \quad q\neq 0,$$

$$s_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}, \qquad s_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, \quad q\neq 1.$$

Լոգարիթմներ

$$\log_a a=1, \qquad \log_a 1=0, \quad a>0, \quad a\neq 1,$$

$$a^{\log_a b}=b, \quad a>0, \quad a\neq 1, \quad b>0,$$

$$\lg(ab)=\lg a+\lg b, \quad a>0, \quad b>0,$$

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right)=\lg a-\lg b, \quad a>0, \quad b>0,$$

$$\lg a^k=k\lg a, \quad a>0,$$

$$\lg\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\lg a, \quad a>0, \quad n\in N.$$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ I. Թվաբանության և հանրահաշվի հիմունքներ (կրկնություն)

§ 1. Գործողություններ բնական թվերի հետ 3
§ 2. Գործողությունների բաղադրիչների և արդյունքների կապը 6
§ 3. Հավասարություն: Անհավասարություն: Աստյթ 7
§ 4. Հավասարում: Փոփոխականով անհավասարություն 9
§ 5. Բազմության հասկացությունը 11
§ 6. Տրված բազմության ենթաբազմության հասկացությունը 13
§ 7. Բազմությունների միավորում և հատում 15
§ 8. Բնական թվերի վերլուծումը պարզ արտադրիչների 17
§ 9. Կոտորակային թվեր: Տասնորդական կոտորակների գումարումն ու հանումը 20
§ 10. Տասնորդական կոտորակների բազմապատկումն ու բաժանումը . . . 21
§ 11. Կոտորակի հիմնական հատկությունը: Սովորական կոտորակների գումարումն ու հանումը 23
§ 12. Սովորական կոտորակների բազմապատկումն ու բաժանումը . . . 26
§ 13. Խառը գործողություններ տասնորդական և սովորական կոտորակների հետ . 27
Ինքնուրույն աշխատանք № 1 29
§ 14. Տրված թվի տոկոս գտնելը 30
§ 15. Թվի գտնելը ըստ իր տոկոսի 32
§ 16. Երկու թվերի տոկոսային հարաբերության գտնելը 34
§ 17. Խնդիրների լուծումը 36
Ինքնուրույն աշխատանք № 2 40
Հարցեր ինքնաստուգման համար 40

ԳԼՈՒԽ II. Ռացիոնալ թվեր

§ 18. Բացասական թվերը և դրանց կիրառությունները 43
§ 19. Կոորդինատային ուղիղ 45
§ 20. Թվերի բաղդատումը: Թվի մոդուլ 48
§ 21. Ռացիոնալ թվերի գումարումը 50
§ 22. Ռացիոնալ թվերի հանումը 53
§ 23. Ռացիոնալ թվերի բազմապատկումը 54
§ 24. Ռացիոնալ թվերի բաժանումը 57
§ 25. Հատվածի երկարությունը 60
§ 26. Կոորդինատային հարթություն 64
§ 27. Թվային միջակայքեր: Անհավասարությունների լուծումը . . . 69
Ինքնուրույն աշխատանք № 3 73
Հարցեր ինքնաստուգման համար 73

ԳԼՈՒԽ III. Փոփոխականներ պարունակող արտահայտություններ

§ 28. Փոփոխականներով արտահայտությունները և դրանց արժեքները . . 75
§ 29. Փոփոխականներով արտահայտությունների կազմումն ու ընթերցումը . 78
Ինքնուրույն աշխատանք № 4 80

§ 30. Նույնություն 80
§ 31. Թվաբանական գործողությունների օրենքները 83
§ 32. Փակագծերի բացումը և փակագծերի մեջ առնելը 87
§ 33. Ընդհանուր արտադրիչը փակագծերից դուրս բերելը և դրան հակադարձ ձևափոխությունը 89
§ 34. Նման գումարելիների միացում 91
Ինքնուրույն աշխատանք № 5 94
Հարցեր ինքնաստուգման համար 94

ԳԼՈՒԽ IV. Ուղիղ և հակադարձ համեմատականություն

§ 35. Մեծությունների հարաբերությունը 96
§ 36. Համեմատություն 99
§ 37. Երկու փոփոխականների ուղիղ համեմատականությունը 103
§ 38. Համեմատական բաժանում 107
§ 39. Երկու փոփոխականների հակադարձ համեմատականությունը 111
Ինքնուրույն աշխատանք № 6 115
Հարցեր ինքնաստուգման համար 116

ԳԼՈՒԽ V. Ֆունկցիա

§ 40. Ֆունկցիայի հասկացությունը 117
§ 41. Ֆունկցիայի տրման եղանակները 121
§ 42. Ուղիղ համեմատականության գրաֆիկը 124
§ 43. Հակադարձ համեմատականության գրաֆիկը 126
Ինքնուրույն աշխատանք № 7 128
Հարցեր ինքնաստուգման համար 129

ԳԼՈՒԽ VI. Մոտավոր հաշվումներ: Հաշվեքանոն

§ 44. Թվերի մոտավոր արժեքները և դրանց սխալները 130
§ 45. Թվի մոտավոր արժեքի բացարձակ սխալի եզրը 133
§ 46. Թվի մոտավոր արժեքի հարաբերական սխալի եզրը 138
§ 47. Թվերի կլորացումը: Թվի տասնորդական նիշերը և իմաստալից թվանշանները 140
§ 48. Թվերի մոտավոր արժեքների հետ կատարվող գործողությունների արդյունքների կլորացումը 143
§ 49. Հաշվեքանոնի կառուցվածքը 149
§ 50. Համեմատության անհայտ անդամը գտնելը 153
§ 51. Թվերի բազմապատկումը 156
§ 52. Թվերի բաժանումը 158
Ինքնուրույն աշխատանք № 8 161
Հարցեր ինքնաստուգման համար 161

ԳԼՈՒԽ VII. Մեկ փոփոխականով գծային հավասարումներ: Գծային ֆունկցիա

§ 53. Մեկ փոփոխականով գծային հավասարումների լուծումը 163
§ 54. Խնդիրների լուծումը հավասարումների միջոցով (սկիզբը) 166
Ինքնուրույն աշխատանք № 9 170
§ 55. Խնդիրների լուծումը հավասարումների միջոցով (ավարտ) 170
§ 56. Գծային ֆունկցիա 179
§ 57. Գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը 182
Ինքնուրույն աշխատանք № 10 186
Հարցեր ինքնաստուգման համար 186

ԳԼՈՒԽ VIII. Ամբողջ արտահայտություններ

§ 58. Բնական ցուցիչով աստիճան 187
§ 59. Ամբողջ արտահայտություններ։ Միանդամներ 190
§ 60. Բազմանդամներ։ Բազմանդամների գումարումը և տարբերությունը . . 193
Ինքնուրույն աշխատանք № 11 193
§ 61. Բազմանդամների արտադրյալը 198
§ 62. Գումարի քառակուսու ձևափոխումը գումարի 198
§ 63. Երկու արտահայտությունների գումարի և տարբերության արտադրյալի ձևափոխումը քառակուսիների տարբերության 202
§ 64. Գումարի խորանարդի ձևափոխումը գումարի 204
§ 65. Վերլուծում արտադրիչների՝ ընդհանուր արտադրիչը փակագծից դուրս բերելու եղանակով 205
§ 66. Վերլուծում արտադրիչների՝ գումարելիների խմբավորման եղանակով . . 207
§ 67. Երկու արտահայտությունների խորանարդների գումարի և տարբերության վերլուծումը արտադրիչների 210
§ 68. Նույնությունների ապացուցում 212
Ինքնուրույն աշխատանք № 12 215
Հարցեր ինքնաստուգման համար 216

217

ԳԼՈՒԽ IX. Ռացիոնալ արտահայտություններ

§ 69. Կոտորակներ։ Կոտորակի որոշման տիրույթը 218
§ 70. Կոտորակի հիմնական հատկությունը 221
§ 71. Կոտորակների արտադրյալը և քանորդը։ Կոտորակի աստիճանը . . . 223
§ 72. Ամբողջ ցուցիչով աստիճանի հասկացությունը 226
§ 73. Ամբողջ ցուցիչներով աստիճանների հատկությունները 228
§ 74. Թվի ստանդարտ տեսքը 230
Ինքնուրույն աշխատանք № 13 231
§ 75. Կոտորակների գումարը և տարբերությունը 232
§ 76. Ռացիոնալ արտահայտությունների նույնական ձևափոխություններ . . . 238
§ 77. Կոտորակի հայտարարում փոփոխական պարունակող հավասարումներ . . 242
Ինքնուրույն աշխատանք № 14 246
Հարցեր ինքնաստուգման համար 247

ԳԼՈՒԽ X. Գծային հավասարումների համակարգեր

§ 78. Երկու փոփոխականով գծային հավասարումը և նրա գրաֆիկը . . . 248
§ 79. Երկու փոփոխականով երկու գծային հավասարումների համակարգը և նրա գրաֆիկական լուծումը 251
§ 80. Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը հավասարումները գումարելու եղանակով 255
§ 81. Հավասարումների համակարգի լուծումը տեղադրման եղանակով . . . 259
§ 82. Կոտորակների հայտարարներում փոփոխականներ պարունակող հավասարումների համակարգեր 262
§ 83. Խնդիրների լուծումը հավասարումների համակարգերի միջոցով . . . 266
§ 84. Տրամաբանական հետևության հասկացությունը 272
Ինքնուրույն աշխատանք № 15 274
Հարցեր ինքնաստուգման համար 275

ԳԼՈՒԽ XI. Անհավասարություններ

§ 85. Հիմնական հասկացությունները։ Անհավասարությունների հատկությունները . . . 276
§ 86. Գործողություններ ճիշտ անհավասարությունների հետ . . . 279
§ 87. Մոտավոր հաշվումների ճշգրտության գնահատումը . . . 283
§ 88. Անհավասարությունների ապացուցումը . . . 286
§ 89. Մեկ փոփոխականով գծային անհավասարությունների լուծումը . . . 291
§ 90. Մեկ փոփոխականով երկու գծային անհավասարությունների համակարգերի լուծումը . . . 293
§ 91. Մոդուլի նշանի տակ փոփոխական պարունակող անհավասարությունների օրինակներ . . . 297
§ 92. Երկու փոփոխականով գծային անհավասարության գրաֆիկական լուծումը . . . 299
Ինքնուրույն աշխատանք № 16 . . . 302
Հարցեր ինքնաստուգման համար . . . 303

ԳԼՈՒԽ XII. Արմատներ

§ 93. Թվի արմատի հասկացությունը . . . 304
§ 94. $y=x^2$ ֆունկցիան և նրա գրաֆիկը . . . 306
§ 95. $y=\sqrt{x}$ և $y=-\sqrt{x}$ ֆունկցիաները և նրանց գրաֆիկները . . . 310
§ 96. $y=x^3$ և $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիաները և նրանց գրաֆիկները . . . 311
§ 97. $\sqrt{a^2}=|a|$ նույնությունը . . . 311
§ 98. Արմատի հիմնական հատկությունները . . . 318
§ 99. Արմատների բազմապատկումն ու բաժանումը . . . 319
§ 100. Արտադրիչը արմատանշանի տակից հանելը և արտադրիչը արմատանշանի տակ տանելը . . . 321
§ 101. Արմատը աստիճան բարձրացնելը և արմատից արմատ հանելը . . . 322
§ 102. Անհավասարությունների ապացուցումը։ Երկրաչափական միջին . . . 323
§ 103. Արմատների մոտավոր արժեքները . . . 325
§ 104. Հաշվումներ աղյուսակների օգնությամբ . . . 327
§ 105. Հաշվումներ հաշվեքանոնի միջոցով . . . 331
§ 106. Գաղափար իրական թվերի բազմության մասին . . . 337
Ինքնուրույն աշխատանք № 17 . . . 339
Հարցեր ինքնաստուգման համար . . . 339

ԳԼՈՒԽ XIII. Քառակուսի հավասարումներ

§ 107. Քառակուսի հավասարումներ։ Մասնավոր դեպքեր . . . 340
§ 108. Քառակուսի հավասարման արմատների բանաձևը . . . 342
§ 109. Վիետի թեորեմը . . . 345
§ 110. Քառակուսի եռանդամի վերլուծումը գծային արտադրիչների . . . 349
§ 111. Կոտորակի հայտարարում փոփոխական պարունակող հավասարումներ . . . 352
§ 112. Խնդիրների լուծումը քառակուսի հավասարումների միջոցով . . . 354
§ 113. Քառակուսային ֆունկցիա և նրա գրաֆիկը . . . 361
§ 114. Քառակուսային ֆունկցիա և նրա գրաֆիկը (շարունակություն) . . . 366
§ 115. Քառակուսի անհավասարությունների լուծման օրինակներ . . . 371
§ 116. Երկրորդ և առաջին աստիճանի մեկական հավասարումներ պարունակող համակարգերի լուծումը . . . 374
§ 117. Երկրորդ աստիճանի երկու հավասարում պարունակող համակարգերի լուծման օրինակներ . . . 377

§ 118. Խնդիրներ գրաֆիկների համար և շոշափման վերաբերյալ 380
Ինքնուրույն աշխատանք № 19 383
Հարցեր ինքնաստուգման համար 384

ԳԼՈՒԽ XIV. Թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաներ
§ 119. Հաջորդականության հասկացությունը։ Հաջորդականությունը բանաձևով տալը 385
§ 120. Հաջորդականության տրման անդրադարձ եղանակը 389
§ 121. Թվաբանական պրոգրեսիա 390
§ 122. Թվաբանական պրոգրեսիայի վերաբերյալ խնդիրների լուծումը . . 394
§ 123. Երկրաչափական պրոգրեսիա 397
§ 124. Երկրաչափական պրոգրեսիայի վերաբերյալ խնդիրների լուծումը . . 400
Ինքնուրույն աշխատանք № 20 404
Հարցեր ինքնաստուգման համար 404

ԳԼՈՒԽ XV. Ռացիոնալ ցուցիչով աստիճան։ Ցուցչային ֆունկցիա և լոգարիթմներ
§ 125. Կոտորակային ցուցիչով աստիճան 406
§ 126. Ռացիոնալ ցուցիչներով աստիճանների հատկությունները . . . 409
§ 127. Աստիճանային ֆունկցիայի հատկությունները 414
§ 128. Ցուցչային ֆունկցիան և նրա գրաֆիկը 416
§ 129. Ցուցչային ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները . . . 419
§ 130. Ցուցչային ֆունկցիայի երկու հատկությունների ապացուցումը . 421
§ 131. Ցուցչային հավասարումների և անհավասարությունների լուծման օրինակներ 425
Ինքնուրույն աշխատանք № 21 428
§ 132. Փոխհակադարձ ֆունկցիաներ 428
§ 133. Փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները 432
§ 134. Թվի լոգարիթմի հասկացությունը 436
§ 135. Լոգարիթմական ֆունկցիան, նրա գրաֆիկը և հատկությունները . 438
§ 136. Լոգարիթմների նույնական ձևափոխությունները 441
§ 137. Արտահայտությունների լոգարիթմումը և պոտենցումը . . . 443
§ 138. Լոգարիթմական հավասարումների և անհավասարությունների լուծման օրինակներ 446
§ 139. Թվի ամբողջ և կոտորակային մասերը։ Թվի լոգարիթմի բնութագիրը և հավելույթը 450
§ 140. Տասնորդական լոգարիթմների աղյուսակը և $y=10^x$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը 452
§ 141. Հաշվումներ հաշվեքանոնով 456
§ 142. $y=10^x$ և $y=\lg x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները 458
§ 143. Գործողություններ լոգարիթմների հետ։ Հաշվումներ լոգարիթմների աղյուսակներով 461
Ինքնուրույն աշխատանք № 22 464
Հարցեր ինքնաստուգման համար 464
Պատասխաններ 481
Լրացուցիչ վարժություններ 486
Հավելվածներ 487

Մարկ Սամսոնովիչ Գելֆանդ,
Վլադիմիր Պավլովիչ Պրոստոսերդով

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

Ուսումնական ձեռնարկ
երեկոյան
(ներափոխային) դպրոցի
6—9-րդ դասարանների համար

Խմբագիր՝ Բ. Հ. Քացախյան
Գեղ. խմբագիր՝ Բ. Վ. Մազմանյան
Կազմի նկարիչ՝ Բ. Ն. Յուսկին
Տեխն. խմբագիր՝ Մ. Ն. Դավլյան
Վերստուգող սրբագրիչ՝ Մ. Կ. Մկրտչյան

Պատվեր 509 Տպաքանակ 10000

Հանձնված է շարվածքի 24. 09. 1982 թ.։
Ստորագրված է տպագրության 7. 02. 1983 թ.։
Թուղթ № 3, $60\times90^{1}/_{16}$, բարձր տպագրություն, տառատեսակը՝ գրքի սովորական, տպագր. 31,25 մամ., հրատ. 27,55 մամ., տպ. 31,4 գուն. թ. օտ.։
Գինը՝ 45 կոպ.։
ИБ № 1000
«Լույս» հրատարակչություն, Երևան-9, Կիրովի փող. 19 ա։
Издательство «Луйс», Ереван-9, ул. Кирова, 19а.

ՀՍՍՀ հրատարակչությունների, պոլիգրաֆիայի և գրքի առևտրի գործերի պետական կոմիտեի № 1 տպարան, Երևան, Ալավերդյան փող. 19ա։
Типография № 1 Госкомитета Арм. ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ереван, ул. Алавердяна, 65.

45 ԿՈՊ.

«ԼՈՒՅՍ»

69